SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Acad. NICOLAE TEODORESCU
VALERIU MANGU, CONSTANTIN CĂRBUNARU,
ALEXANDRINA DUMITRU, ADRIAN GHIOCA, JULIA SEBESTEYÉN,
ION CHEŞCĂ, ADRIAN NEGRU, MIRCEA TRIFU, LAURENŢIU GÎRBĂ

9

CULEGERE DE PROBLEME în sprijinul elevilor claselor I—VIII

Partea I

Coordonator general: Acad. NICOLAE TEODORESCU
Redactarea finală – coordonare: VALERIU MANGU
ADRIAN NEGRU

BUCUREŞTI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Acad. NICOLAE TEODORESCU

VALERIU MANGU, CONSTANTIN CĂRBUNARU, ALEXANDRINA DUMITRU,
ADRIAN GHIOCA, JULIA SEBESTEYÉN, ION CHEŞCĂ,
ADRIAN NEGRU, MIRCEA TRIFU, LAURENŢIU GÎRBĂ

MATEMATICA ÎN GIMNAZIU ŞI LICEU, VOL II **9**

CULEGERE DE PROBLEME în sprijinul elevilor claselor I–VIII

PARTEA I: CLASELE I – V

- — Rezolvări ale problemelor din manuale;
- — Probleme pentru pregătirea şi aprofundarea materiei;
- — Teme pentru cercurile de elevi;
- — Probleme date la proba de verificare pentru înscrierea şi admiterea în treapta I de liceu;
- — Probleme date la olimpiadele şcolare;
- — Probleme pregătitoare pentru concursuri;
- — Probleme din Gazeta Matematică şi reviste străine;
- — Probleme recreative şi distractive.

Coordonator general: Acad. NICOLAE TEODORESCU

Redactarea finală-coordonare: VALERIU MANGU, ADRIAN NEGRU

BUCUREŞTI

Lucrarea face parte din planul de tipărituri al Ministerului Educației și Învățămîntului, tipărirea fiind aprobată de către Consiliul Culturii și Educației Socialiste cu nr. 16334/1983, poziția 94

Referenți:
Paul Radovici—Mărculescu, matematician dr.
Radu Nicolescu, matematician
Mihaela Gugiu, învățătoare

EDITORIAL FESTIV

I. Culegeri de probleme cu caracter festiv pentru Gazeta Matematică

Începînd din anul trecut, 1984, Societatea de Ştiinţe Matematice din R. S. România pregăteşte aniversarea celor 90 de ani de existenţă şi apariţie neîntreruptă a revistei sale *Gazeta Matematică.*

Considerăm că cel mai frumos omagiu pe care i-l pot aduce cei care, ca cititori, rezolvitori şi propunători de probleme şi-au început şi dezvoltat educaţia matematică prin această revistă de largă circulaţie naţională şi de frumoasă reputaţie internaţională, ar fi un mănunchi de culegeri de probleme menite să acopere aria de cuprindere a articolelor, notelor şi problemelor ce au ilustrat, de-a lungul celor 90 ani, paginile *Gazetei* şi numele colaboratorilor şi redactorilor ei. De aceea, în primele luni ale anului 1984 a apărut în Editura Tehnică, la solicitarea acesteia, culegerea *Probleme din Gazeta Matematică* (ediţie selectivă şi metodologică semnată de un grup de autori, dintre care trei redactori şi redactorul şef al revistei-ceilalţi fiind colaboratori prea bine cunoscuţi).

Succesul deosebit al acestei culegeri care cinstea în acelaşi timp şi centenarul apariţiei primei reviste de matematică din ţară, *Recreaţii ştiinţifice*, căreia *Gazeta Matematică* i-a succedat, începînd din 1885, ne-a dat convingerea că sutele de mii de elevi, studenţi, profesori, ingineri şi atîţi alţi specialişti care iubesc de-a lungul atîtor generaţii *Gazeta*, aşteaptă de la noi ceva nou în materie de culegeri de probleme.

Într-adevăr, culegerea *Probleme din Gazeta Matematică* nu este adresată unei categorii de cititori care urmăresc să treacă examene de admitere în cele două trepte ale liceului sau în facultăţi. Ea este structurată pe utilităţi, începînd cu problemele de antrenament şi mergînd pînă la cele de olimpiade, concursuri şi la probleme care suscită alte probleme. Există acolo şi două capitole cu probleme din reviste străine, dar nimeni pînă în prezent nu ne-a făcut o critică pentru varietatea şi dificultatea unora din problemele ediţiei selective şi metodologice. Explicaţia stă în acest al doilea calificativ, fiindcă am urmărit deliberat obiective metodologice gradate după puterile cititorilor, fiecare putînd ajunge undeva.

În cursul verii 1984, am editat noi înşine Culegerea de probleme în sprijinul celor ce se pregătesc pentru treapta a II-a. A fost un succes care a depăşit aşteptările noastre, deşi lucrarea s-a elaborat şi tipărit într-un timp record, deşi are lipsuri inerente unei curse contra cronometru. Explicaţia, tot caracterul metodologic afirmat atît în alegerea problemelor cît şi în structurarea capitolelor, precum şi în articolele introductive cu caracter de prezentare istorică a evoluţiei ideilor matematice exprimate prin problemele fiecărui capitol. Ediţia I s-a dovedit insuficientă, cererea fiind insistentă de pretutindeni. Chiar şi filiale ale S.S.M. care nu afirmaseră atenţie deosebită pentru activităţile Societăţii s-au constituit imediat ca beneficiare prezumtive, cerîndu-ne să le satisfacem solicitările, ceea ce am şi făcut.

Şi această a doua publicaţie, realizată în decursul anului 1984, este un semn de omagiu şi recunoştinţă faţă de *Gazeta Matematică*, dar în acelaşi timp este şi împlinirea unui angajament faţă de elevii din ţara noastră de a-i ajuta să-şi însuşească mai uşor şi mai cu plăcere cunoştinţele matematice aşa cum urmăreşte *Gazeta Matematică* de 90 de ani: să fie un ghid şi o mînă de ajutor pentru cei care o solicită.

În planul nostru de activitate consacrată omagierii aniversării a 90 ani de existenţă, mereu tinerească şi avîntată, a *Gazetei Matematice*, este înscrisă realizarea unui set de culegeri care să acopere întreg învăţămîntul elementar şi liceal, apoi să se adreseze studenţilor din anii I şi II, cuprinzînd şi exigenţele concursului „Traian Lalescu" şi ale „Balcaniadelor pentru studenţi şi tineri cercetători".

De aceea, în acest început al anului 1985, an aniversar pentru S.S.M., a intrat în tipografie această culegere, care este destinată elevilor din ciclul primar şi celor din ciclul gimnazial, deci claselor I—VIII. Ea va fi urmată de culegerea pentru clasele XI—XII şi de cea pentru studenţi. Cum sutele de mii de elevi, care cunosc şi folosesc *Gazeta* nu au posibilitatea de a şti ce înseamnă şi ce a însemnat această revistă a lor de-a lungul celor 90 de ani de cînd apare fără întrerupere, credem util să dăm, tot cu titlu omagial, o informare succintă asupra ei şi asupra celor care au conceput-o şi înfiinţat-o în 1895.

II. Gazeta Matematică şi Societatea „Gazeta Matematică"

Iniţiativa înfiinţării *Gazetei Matematice* şi, drept urmare, a „Societăţii « Gazeta Matematică »" a aparţinut unui grup de entuziaşti şi inimoşi ingineri — ale căror nume au devenit mai tîrziu glorioase —, absolvenţi ai Şcolii naţionale de poduri şi şosele: Ion Ionescu, Vasile Cristescu, Victor Balaban, Mihail Roco şi Ion Zottu. Toţi aceştia lucrau, sub conducerea lui Anghel Saligny, la construcţia celebrului pod peste Dunăre şi a căii ferate Feteşti—Cernavoda. Lor li s-au alăturat, ulterior, inginerul Andrei G. Ioachimescu, întors din străinătate în vara anului 1895, unde fusese trimis pentru studii de specializare în fabricarea tutunului şi a chibriturilor şi unde îşi luase şi licenţa în matematici, şi marele profesor şi pedagog George Ţiţeica.

Apariţia *Gazetei Matematice* a fost urmarea existenţei unor lipsuri în pregătirea matematică a elevilor din ciclul liceal precum şi a dificultăţilor întîmpinate de aceştia în înţelegerea şi aprofundarea diverselor aspecte legate de stadiul de dezvoltare a matematicii cunoscute la acea vreme, în care îşi făceau tot mai des loc noile descoperiri din Analiză şi Algebră, capitole fecunde şi cu vaste aplicaţii în toate ştiinţele şi practica umană. Aceste carenţe ieşiseră în mod catastrofal la iveală cu prilejul concursului de admitere în anul I la Şcoala naţională de poduri şi şosele din Bucureşti, organizat în anul 1894, cînd rezultatele au fost submediocre.

Gazeta Matematică a apărut, deci, din nevoia de a avea studenţi bine pregătiţi în matematici şi nu ca o necesitate reclamată de procesul de învăţămînt matematic din ţara noastră sau de lipsa unei şcoli româneşti de matematică ai cărei muguri nu au întîrziat să înflorească : George Ţiţeica îşi trece doctoratul în 1898, Anton Davidoglu în 1900, Dimitrie Pompeiu în 1905, apoi Alexandru Myller, Traian Lalescu, Victor Vâlcovici, Simion Sanielevici, şi alţii.

Începînd cu 1 septembrie 1909, Redacţia *Gazetei Matematice* a fost transformată în „Societatea « Gazeta Matematică »", recunoscută ca „persoană morală" prin Legea votată în Senat la 27 noiembrie 1911.

„Societatea « Gazeta Matematică »" urmărea, aşa cum se arăta în articolul 1 al Statutului său, „răspîndirea gustului pentru studiul ştiinţelor matematice şi îndrumarea spre cercetări originale relative la această ramură de ştiinţă". De asemenea, ea îşi propunea ca, pe lîngă principala sa menire — editarea *Gazetei Matematice* — să publice o serie de lucrări de matematici elementare sau superioare cu caracter atît teoretic cît şi practic, culegeri de probleme, toate acestea constituind „Biblioteca « Gazetei Matematice »". Această colecţie de lucrări fusese deja iniţiată la finele anului 1901 prin editarea „Culegerii de probleme de aritmetică, geometrie, algebră şi trigonometrie" de Ion Ionescu, George Ţiţeica, Andrei G. Ioachimescu şi Vasile Cristescu şi a fost continuată cu alte lucrări valoroase cum sînt „Culegere de probleme de Geometrie" a lui Ţiţeica şi „Geometria triunghiului" de Traian Lalescu. Ulterior, această Bibliotecă a fost îmbogăţită cu o serie de lucrări editate de către S.S.M. împreună cu Editura Tehnică, iar în anii din urmă, în regie proprie.

De asemenea „Societatea « Gezeta Matematică »" şi-a propus organizarea, anual, a concursului *Gazetei Matematice* pentru elevii de liceu. Prima ediţie a acestui concurs s-a desfăşurat în anul 1905, simultan în mai multe oraşe din ţară (pînă în 1908), iar din anul 1909 numai la Bucureşti. Acest concurs s-a transformat, treptat, în Olimpiada naţională de matematică (cu cele trei faze : locală, judeţeană, pe ţară) organizată pînă în anii din urmă tot de S.S.M., cînd această sarcină şi-a asumat-o, în mod direct, Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului, preluînd astfel o tradiţie glorioasă în materie de concursuri.

Actualul Concurs anual al *Gazetei matematice*, organizat an de an de către S.S.M., mobilizează din ce în ce mai mulţi elevi — rezolvitori ai problemelor publicate în acest scop în *Gazeta Matematică* — şi se finalizează printr-un cantonament ce se desfăşoară, la începutul fiecărui an şcolar, la Cîmpulung Muscel. La această ultimă fază a concursului participă rezolvitorii care, de-a-lungul unui întreg an şcolar, au rezolvat cele mai multe probleme şi au acumulat cele mai multe puncte.

Pe aceeaşi linie, S.S.M. a iniţiat Olimpiada celor mai mici matematicieni — elevi ai claselor IV—VI — a cărei primă ediţie (1983/1984) s-a bucurat de un frumos succes. De asemenea, trebuie menţionat faptul că ţara noastră este — la propunerea S.S.M. — iniţiatoarea Olimpiadei Internaţionale de Matematică, întrecere desfăşurată între tineri de pe toate continentele în spiritul păcii şi prieteniei şi la care echipele noastre au obţinut, în ultimii ani, rezultate de-a dreptul remarcabile.

Începînd cu octombrie 1934, alături de *Gazeta Matematică* a apărut (pînă în iunie 1949) un ,,Supliment cu exerciţii al « Gazetei Matematice »" destinat elevilor din toate ciclurile de învăţămînt şi a cărui utilitate s-a făcut larg simţită în dezvoltarea învăţămîntului nostru matematic.

III. Societatea de Ştinţe Matematice din R.S.România şi Gazeta Matematică

În anul şcolar 1949 — 1950 a fost creată ,,Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice", iar în locul *Gazetei Matematice* a apărut *Gazeta Matematică şi Fizică — seria B*, destinată elevilor, precum şi *Gazeta Matematică şi Fizică — seria A* destinată studenţilor şi profesorilor. În 1964 este creată ,,Societatea de Ştiinţe Matematice", revistele avînd titlul *Gazeta Matematică — seria B* şi *Gazeta Matematică — seria A*, publicaţii care astăzi poartă denumirile *Gazeta Matematică — publicaţie pentru tineret* şi *Gazeta Matematică — perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică.*

Ca tematică, actualele reviste editate de S.S.M. — *Gazeta Matematică* pentru elevi şi versiunea sa în limba maghiară *Matematikai Lapok*, *Gazeta Matematică* pentru profesori şi *Bulletin Mathématique* — — acoperă o bogată arie tematică. În ele sînt publicate editoriale, analize şi recenzii, articole metodico-ştiinţifice, studii şi cercetări originale şi de informare, articole de istorie a matematicii, articole privind viaţa S.S.M., articole redactate în limbi de circulaţie internaţională, probleme propuse spre rezolvare de către elevii din clasele I —IV, V —VIII, IX —XII, pentru elevii care doresc să participe la Concursul *Gazetei Matematice* sau Olimpiada Internaţională de Matematică, articole şi probleme de informatică şi tehnică de calcul, probleme comentate din *Gazeta Matematică* sau reviste străine, din manuale sau date la diverse concursuri etc. La elaborarea acestor materiale participă o gamă variată de elevi, studenţi, învăţători, profesori din ciclul gimnazial şi liceal, cadre universitare, cercetători români şi străini cu rezultate valoroase în diverse domenii ale matematicii de care domniile-lor se ocupă.

Tirajele acestor publicaţii sînt, în raport cu obiectivul urmărit de fiecare, impresionante: 80 000 —120 000 exemplare la *Gazeta* pentru tineret, 10 000 exemplare la cea pentru profesori, studenţi şi cercetători 5 000 exemplare la *Matematikai Lapok*. Revista *Bulletin Mathéma-*

tique are, de asemenea, un larg ecou intern şi internaţional, fiind solicitată în circa 40 de state ale lumii.

Societatea de Ştiinţe Matematice întreţine numeroase legături internaţionale, concretizate prin conferinţe, simpozioane, schimburi de publicaţii, afilieri la organisme şi organizaţii internaţionale, precum şi un contact permanent cu membrii săi activi, din ce în ce mai numeroşi, prin organizarea a numeroase consfătuiri tematice şi schimburi de experienţă, practic în toate judeţele ţării.

Începînd cu anul 1 977, S.S.M. a iniţiat, în sprijinul tuturor categoriilor de beneficiari, o nouă serie de lucrări metodico-ştiinţifice de nivel elementar, mediu sau superior. Greutăţi de tot felul au făcut ca apariţia acestora să fie foarte neregulată, reuşindu-se ca, pînă în momentul de faţă, să vadă lumina tiparului doar 9 (inclusiv cea de faţă) astfel de lucrări. Ele au fost generos primite de către elevi şi profesori, ultima apariţie — volumul I din „Matematica în gimnaziu şi liceu" — constituind un succes editorial. Tirajul s-a dovedit a fi neîndestulător, tot mai multe şcoli solicitînd reeditarea ei cît mai neîntîrziată.

IV. Gazeta Matematică, astăzi la aniversarea a 90 de ani de existenţă

În politica generală a învăţămîntului nostru, matematica, alături de celelalte ştiinţe fundamentale, ocupă un loc de frunte, făcînd parte din programele şcolare de toate gradele şi din materiile examenelor de admitere. *Gazeta Matematică* a devenit, astfel, o publicaţie de largă răspîndire, ajungînd în ultimii 10 ani la tiraje între 80 000 şi 120 000 exemplare lunar.

Pentru a corespunde cerinţelor elevilor şi studenţilor, ale învăţătorilor, profesorilor şi cadrelor din învăţămîntul superior, ea şi-a îmbogăţit continuu conţinutul, l-a diversificat şi l-a adaptat tuturor formelor de însuşire, asimilare şi perfecţionare a cunoştinţelor matematice. Ea se adresează astăzi tuturor elevilor, nu numai vîrfurilor, dar nu uită nicicînd că are şi menirea de a descoperi şi stimula aptitudini şi talente.

În sprijinul studenţilor, învăţătorilor şi profesorilor, al informaticienilor, inginerilor şi al altor beneficiari şi utilizatori de matematică, S.S.M. completează revista prin *Gazeta Matematică — perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică*, publicaţie care conţine şi o parte redactată în limbi de circulaţie internaţională, fiind recenzată în revistele de recenzii.

Ediţia în limba maghiară *Matematikai Lapok* se bucură şi ea de întreaga apreciere a cititorilor de limbă maghiară din ţară, fiind apreciată şi în R. P. Ungară şi în alte ţări.

Astfel, *Gazeta Matematică*, astăzi cînd împlineşte 90 de ani de existenţă, se prezintă ca un complex de publicaţii consacrate în primul rînd învăţămîntului unitar şi integrat, aşa cum trebuie să fie un învăţămînt care are ca finalitate pregătirea tineretului pentru viaţă în ţara noastră, care înfăptuieşte ştiinţific şi cu deosebit succes etapa actuală a construcţiei socialiste multilateral dezvoltate.

Culegerile de probleme editate de S.S.M. se elaborează într-o largă măsură din probleme publicate în *Gazeta Matematică*, iar spiritul în care sînt alcătuite aceste culegeri reflectă orientarea metodică şi metodologică afirmată în ediţia *Gazetei* adresată studenţilor, cadrelor didactice şi altor specialişti.

În acest spirit a fost alcătuită şi prezenta culegere, dedicată aniversării celor 90 de ani de existenţă neîntreruptă şi prestigioasă a acestei reviste.

Acad. NICOLAE TEODORESCU

**Preşedintele Societăţii de Ştiinţe Matematice
din
Republica Socialistă România**

PREFAȚĂ

de

Acad. NICOLAE TEODORESCU

I. Culegerile de probleme ca forme incipiente ale unor discipline

Culegerile de probleme au constituit cea mai veche formă de organizare a textelor matematice. Istoria științei ne-a transmis unele dintre cele mai îndepărtate în timp, cum sînt papirusurile egiptene, în particular celebrul papirus RHIND sau tabletele asiro-babiloniene ca și vechile texte chineze sau indiene. Chiar și după producerea miracolului grec, opera geometrilor greci preeuclidieni s-a concretizat tot în culegeri de descoperiri enunțate ca probleme.

Primul tratat organizat pe baze noi este cel al **Elementelor** lui EUCLID, edificat pe *baze axiomatice* care impun o anumită desfășurare: logic-deductivă a textului. Această organizare pune în lumină teoremele ca elemente ale unei teorii, așezate ca niște cărămizi pentru înălțarea încetul cu încetul a unui edificiu matematic. **Elementele** lui EUCLID au constituit timp de 2 000 de ani monumentul matematic desăvîrșit, deci avea la bază o întrebare care a căutat și așteptat răspuns pînă în secolul al XIX-lea, cînd s-a dovedit că se pot construi edificii tot atît de sigure ca și geometria euclidiană, cum sînt geometriile neeuclidiene.

Necesitatea de a se organiza textele matematice pornind de la principii sau adevăruri de bază a apărut încă din Antichitate, dar realizarea organizării a durat multe secole. Aritmetica, de pildă, și algebra, au grupat cunoștințe legate în prima, de numere și operații cu acestea, în cea de-a doua de operații care extindeau și lărgeau pe cele aritmetice.

Pe măsura acumulărilor cantitative s-au formulat noi probleme mai generale, mai abstracte, mai orientate spre obiective majore. Astfel, algebra și-a ales ca obiectiv rezolvarea ecuațiilor algebrice, iar aritmetica a condus la teoria numerelor.

Trebuie să observăm că toate aceste organizări pe discipline au la bază dezbateri și culegeri de probleme variate, dar care se grupau în jurul unor idei sau obiective centrale.

II. Culegerile ca auxiliare ale manualelor și tratatelor

În epoca modernă, începînd din secolul al XIX-lea, culegerile de probleme au trecut pe planul al doilea ca forme de organizare a textelor matematice și au căpătat un caracter didactic, sau uneori de avangardă a unor frămîntări matematice care au condus numai la rezultate parțiale. Astfel, au apărut culegerile de probleme ca auxiliare ale manualelor, cursurilor și chiar ale unor tratate, pentru a ușura înțelegerea și asimilarea constructivă a teoriilor matematice. De asemenea, culegerilor le-a revenit sarcina de a prezenta și cultiva aplicațiile teoremelor fie în cadrul disciplinelor matematice, fie în alte discipline sau în practică.

Culegerile se prezintă nu numai sub forma de volume de enunțuri și rezolvări, sau uneori numai de enunțuri, ci și ca anexe la capitole din manuale sau tratate. În această ultimă înfățișare ele sînt constituite din probleme și exerciții centrate pe textele capitolelor respective și au ca menire elucidarea dificultăților tematice, dar și înarmarea cititorului cu tehnici de rezolvare a problemelor legate de tematica respectivă.

Ceea ce lipsește, în general, tuturor culegerilor de probleme este o afirmare hotărîtă și sistematică a caracterului metodologic care, de fapt, ar trebui să fie specific acestui gen de text matematic didactic. Nimeni nu ne învață în mod deliberat cum să abordăm o problemă, cum să-i analizăm enunțul, cum să-l completăm cu puncte de sprijin, cum să punem un diagnostic matematic și cum să precizăm metodele de rezolvare. Desigur, fiecare problemă poate să ne învețe ceva, să adauge ceva la antrenamentul nostru de rezolvitori. Experiența arată însă că înțelegerea soluției nu aduce după sine și stăpînirea ei.

Este nevoie să reflectăm în continuare la ceea ce am avut de rezolvat și la ceea ce am realizat, să stabilim conexiuni între noțiunile, strategiile și rezultatele cuprinse în problemă și altele cu care ar putea avea conexiuni. Aceasta revine la a căuta să organizăm materialul faptic și tematic al culegerilor de probleme în sisteme de cunoștințe, tehnici și metode fructificabile în împrejurări noi, dar care au conexiuni cu cele din sistemul considerat.

III. Culegerile și metodologiile de rezolvare a problemelor

Culegerile de pînă acum nu au manifestat decît sporadic preocupări metodologice, lăsînd cititorilor sarcina de a-și forma o pregătire tactică și strategică de rezolvare a problemelor cu care sînt confruntați. În ultimii ani, unele reviste de matematici ca *Der Mathematik Underricht*, au abordat tema metodologiilor de rezolvare, publicînd articole metodologice cu explicații și orientări privitoare la capitole importante cum ar fi inegalitățile, integralele definite și primitivele, configurațiile și construcțiile geometrice maximale și minimale, numerele complexe etc.

Obiectivele urmărite sînt de a atrage cititorilor atenția asupra problemelor care se pun în aceste capitole, dînd și unele exemple tratate schematic și de a-i familiariza cu ideile care pot sta la baza acestor probleme. Astfel, celebrul principiu al cutiei sau al lui DIRICHLET este prezentat ca o sursă de metode de rezolvare a unor probleme care pot părea inabordabile prin alte metode. Se vede deci că, în stadiul actual de dezvoltare a matematicii, cînd nivelul teoretic înalt şi axiomatizarea primează în învăţămîntul matematic, a apărut necesitatea de a se acorda problemei un rol constructiv pentru a se evita acumularea de cunoştinţe înalte, fără preocuparea de a le folosi chiar şi pentru fixarea şi fructificarea lor. În acelaşi timp, pătrunderea matematicii în toate sectoarele cunoaşterii şi practicii impune folosirea tehnicilor matematice în rezolvarea de probleme. De aceea, metodologiile de rezolvare devin necesare prin a fi indispensabile.

IV. Culegerile Societăţii de Ştiinţe Matematice. Culegerea pentru clasele I—VIII

Culegerile editate de Societatea de Ştiinţe Matematice din R. S. România sînt concepute cu scopul de a avea caracter metodologic. De aceea se urmăreşte întovărăşirea textelor manualelor prin prezentarea de probleme adecvate punctelor de reper ale teoriilor. Uneori, aceste teorii sînt introduse fără a se încerca puterea de asimilare a elevilor la vîrstele respective, ceea ce produce şocuri şi inerţii. Este nevoie de un ghid şi de o mînă de ajutor din partea profesorilor şi cu atît mai mult din partea autorilor culegerilor. Este ceea ce formează obiectivul major al acestora şi sperăm că structura şi organizarea culegerilor noastre au acest caracter de ghid şi de mînă de ajutor metodologic.

Culegerea de faţă este adaptată caracterului unitar şi integrat stabilit învăţămîntului de politica generală a partidului şi statului nostru. Ea se adresează claselor I—VIII, prezentînd în prima parte exerciţii şi probleme destinate învăţămîntului primar la care se adaugă cele pentru nlasa a V-a. În acest mod urmărim să înlăturăm şocul la trecerea în gimcaziu, întinzînd o punte de legătură care se poate observa prin compararea unora dintre probleme destinate claselor a III-a şi a IV-a cu probleme adresate elevilor clasei a V-a. În ceea ce priveşte partea a II-a, am ţinut să marcăm, de asemenea, această idee prin gruparea materiei pe clase. Clasei a VIII-a i s-a rezervat o atenţie specială, fiind cea care închide ciclul gimnazial şi este preliminară probei de verificare pentru înscrierea şi admiterea în treapta I, care deschide porţile învăţămîntului liceal.

Întrucît ne adresăm elevilor de toate categoriile de apreciere, nu numai celor mai slabi sau numai celor ce se disting, problemele sînt şi ele de toate categoriile şi urmăresc, în primul rînd, să ajute rezolvarea celor din manuale. De aceea au fost alese din aceste manuale probleme care cereau un ghid şi o mînă de ajutor competent şi binevoitor, dar culegerea nu este structurată ca o culegere de probleme din manuale, nici ca o completare a acestora. Ea are structura unui ghid metodologic de explorare a teritoriului plin de surprize şi emoţii alcătuit din probleme cu caracter elementar, dar de conţinut, care îndeamnă la prelucrare şi la străduinţă. Articolele introductive, care deschid unele capitole, au tocmai acest rol de ghid. Ele se adresează mai ales profesorilor şi altor categorii de cititori cu cultură matematică dezvoltată şi conţin idei care mai pot fi utilizate şi fructificate în continuare.

Cititorului avizat i se vor semnala suficient pentru a nu trece cu indiferență sau condescență peste problemele de curs primar. Unele dintre acestea sînt excelente pentru a ne testa profunzimea și elasticitatea capacității de a răspunde la întrebări adecvate copiilor, capacitate care nu este de disprețuit. De asemenea, problemele din reviste străine vor interesa cu siguranță pe toți cei care vor să-și îmbogățească arsenalul tactic cu metode și chiar teme noi de rezolvare. O atenție deosebită merită jocurile logice, cărora li se dă și teoria matematică prin care devin efectiv instructive. La sfîrșitul primei părți apar probleme atractive și distractive care stimulează și pun la încercare raționamentul logico-deductiv.

V. Structura culegerii pentru clasele I — VIII

Sarcina pe care S.S.M. și-a asumat-o prin publicarea cărții de față incumbă, fără doar și poate, o mare răspundere și un act de mare curaj. A alcătui o lucrare de mari proporții care urmează să se adreseze la 3 000 000 de elevi este o întreprindere grea, foarte grea, chiar dacă la elaborarea ei a participat un numeros colectiv de autori, în mare parte consacrați prin publicații anterioare. Problemele legate de elaborarea structurii cărții, de definitivarea acesteia, de redactare a materialului, de ordonare și selectare a lui, de tehnoredactare, machetare și corectură, de urmărire a producției poligrafice precum și toate celelalte aspecte reclamate de editarea unei cărți s-au dovedit, nu rareori, foarte dificile. Cu răbdare și tenacitate, pornindu-se de la țelul mai înalt pe care-l urmărește cartea, printr-o mobilizare permanentă a întregului colectiv de autori și redacțional, a atît de harnicilor lucrători tipografi, aceste dificultăți au fost, pînă la urmă, învinse.

În literatura noastră de specialitate există — inexplicabil — puține lucrări de acest gen, destinate, deci, elevilor claselor I—VIII și profesorilor lor. Binecunoscutele culegeri „Artin", „Gheba", „Arimescu", „Olivotto" etc. și-au dovedit, fără îndoială, utilitatea într-un moment determinat, fixat în timp, utilitate care a satisfăcut cerințele unui învățămînt în definitivare. Momentul actual — surprins corespunzător și în programele școlare — se caracterizează printr-o infuzie a teoriei mulțimilor și a raționamentului abstract practic în toate capitolele matematicii, în toate disciplinele de graniță. Progresul științei, al societății, în general, nu se poate realiza printr-o atitudine statică, rigidă, ci printr-o dinamică permanentă și creatoare. Concepția potrivit căreia dezvoltarea deprinderilor calculatorii insuficient motivate trebuie să primeze în învățămîntul elementar este acum retrogradă: elevii trebuie învățați să gîndească, să modeleze diversele fenomene reale, să opereze cu concepte care altădată constituiau monopolul specialiștilor. Știința, în speță matematica nu se poate limita la nivelul epocalelor descoperiri ale Antichității sau Renașterii — rezolvarea ecuațiilor algebrice, geometria euclidiană, calculul integral etc. — fiindcă dezvoltîndu-se potrivit legilor ei interne, Omenirea este datoare să înțeleagă aceste legi, să le aplice și să fructifice roadele lor la scară planetară, nu numai în laboratoarele cercetătorilor.

Iată de ce sarcina pe care ne-am asumat-o, aceea de a reînnoi spiritul culegerilor apărute la noi, de a reevalua diversele puncte de vedere în această chestiune este o acţiune deliberată pe care Societatea de Ştiinţe Matematice a pus-o, în ultimii doi ani, în centrul activităţii sale. Este cert că uriaşa masă de elevi — copiii noştri, în fond — are nevoie de astfel de lucrări, tot aşa de mult cum are nevoie de hrană, de apă, de somn.

Lucrarea este ilustrată cu numeroase desene sugestive, adaptate cerinţelor vîrstei fragede a elevilor, desene care sperăm ca vor întruni aprecieri favorabile, datorită caracterului lor distractiv care face ca semnificaţiile serioase să se reţină mai repede şi mai durabil.

Lucrarea de faţă abordează 3 mari subiecte: I. Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor I—V; II: Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor VI—VIII; III. Secţiuni speciale. Împărţirea acestora în cuprinsul cărţii este mai greu de urmărit şi, de aceea, sînt necesare cîteva precizări suplimentare.

Partea I cuprinde materia destinată elevilor claselor I—V, aşa cum este ea organizată şi prezentată în programele şcolare. Structurarea materialului destinat claselor I—IV nu a fost făcută pe clase, ci pe capitole, elevii din diverse clase extrăgîndu-şi problemele adecvate materiei pe care o învaţă. Capitolul destinat clasei a V-a a fost împărţit în capitole. La finele părţii I au fost incluse secţiuni speciale: A. Probleme atractive cu substrat logico-matematic; B. Jocuri logice şi teoria lor matematică.

Această primă parte a cărţii este ilustrată cu un bogat materal grafic, specific nivelului de înţelegere al elevilor cărora se adresează.

Partea a II-a cuprinde materia claselor VI—VIII şi următoarele secţiuni speciale. Secţiunea destinată claselor VI—VIII a fost împărţită pe clase, în cadrul fiecărei clase existînd două diviziuni: Algebră şi Geometrie. Secţiunile speciale sînt: C. Probleme din reviste străine; D. Probleme atractive cu conţinut logico-matematic; E. Probleme date la Olimpiadele de matematică; F. Teme pentru cercurile de elevi; G: Probleme date la proba de verificare pentru înscrierea în treapta a II-a de liceu.

Problemele au fost extrase din manuale, din *Gazeta Matematică* sau reviste străine, din cele date la diverse concursuri sau publicate în lucrări similare. Altele aparţin autorilor. Lucrarea se completează cu o bibliografie selectivă, un index de probleme şi autori.

Potrivit utilităţii lor, problemele au fost marcate cu o serie de coduri, potrivit legendei: M_3 = problemă din manualul clasei a III-a; M = problemă din manual; PP = problemă pregătitoare a unei probleme care urmează celei prezentate; PO = problemă pregătitoare pentru olimpiadă; PT = problemă pregătitoare pentru proba de verificare organizată în vederea înscrierii în treapta I.

Actualul volum acoperă, împreună cu primul din lucrarea „Matematica în gimnaziu şi liceu", materia prevăzută de programele şcolare ale clasei I—X. În intenţia de a încheia acest ciclu, S.S.M. va publica şi o „Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor XI—XII şi a celor care se pregătesc pentru concursuri" care cuprinde: A. Recapitularea materiei claselor IX—X; B. Materia claselor XI—XII; C. Probleme date la olimpiadele naţionale şi internaţionale; D. Concursul „Gazetei Matematice"; E. Probleme selectate din reviste străine; F. Probleme date la admiterea în învăţămîntul superior; G. Probleme pregătitoare pentru admiterea în învăţămîntul superior, pentru pregătirea olimpiadelor naţionale şi internaţionale.

VI. Colectivul de autori

Colectivul de autori ai acestei culegeri se compune, ca întotdeauna, din activişti ai S.S.M. şi, în particular, ai *Gazetei Matematice*. Acestora li s-a cerut să urmeze linia acestei reviste şi, în general, a publicaţiilor Societăţii de a stimula interesul maselor largi ale tineretului pentru însuşirea şi folosirea matematicii. Pînă nu demult, aria de cuprindere a publicaţiilor noastre nu se întinsese la învăţămîntul primar; astăzi, atît prin *Gazeta Matematică* precum şi prin aceste culegeri, acest învăţămînt căruia toţi îi datorăm recunoştinţă, este integrat în preocupările permanente ale Societăţii şi aşteptăm cu emoţie primirea pe care elevii şi învăţătorii lor o vor face iniţiativei noastre de a elabora şi pentru ei o culegere cu titlu experimental.

Un interes tot atît de mare este acordat de grupul de autori elevilor clasei a VIII-a, cărora li se pune la dispoziţie, în afară de problemele care îi vor ajuta să depăşească fără greutăţi copleşitoare încercările examenului de treaptă şi să intre cu o pregătire liniştitoare în ciclul liceal, probleme mai speciale de concurs pentru olimpiade. Astfel, unii dintre ei îşi vor descoperi vocaţii pentru matematică şi vor fi atraşi spre cercetare. În acest mod, culegerea îşi va fi îndeplinit rolul metodologic, investind pe fiecare dintre elevi şi, în general, dintre cititori să rezolve probleme corespunzătoare atît necesităţilor cît şi aspiraţiilor sale. O condiţie *sine qua non* este de a studia problemele alese cu creionul, refăcînd raţionamentele şi interogînd atît pe autori cît şi pe sine însuşi nu numai în punctele dificile, dar şi în cele care ilustrează un rezultat nou, elegant sau surprinzător. Aşa se citeşte o culegere metodologică şi numai aşa lectura ei este profitabilă atît azi, cît şi mîine şi mai tîrziu.

Largul democratism pe care S.S.M. înţelege să-l imprime activităţii ei prezente şi viitoare se reflectă, în cazul de faţă, şi prin apartenenţa autorilor culegerii la filialele S.S.M.: filiala Bucureşti (prof. Constantin Cărbunaru, prof. Valeriu Mangu, prof. Adrian Negru, înv. Alexandrina Dumitru, prof. Laurenţiu Gîrbă), filiala Tîrgu Mureş (prof. Julia Sebesteyén), filiala Călăraşi (prof. Ion Cheşcă), filiala Giurgiu (prof. Mircea Trifu), filiala Prahova (prof. Adrian Ghioca).

Responsabilitatea redactării secţiunilor lucrării este, în ceea ce priveşte structurarea şi elaborarea materialului, următoarea:

Secţiunea I (clasele I—IV): Alexandrina Dumitru;

Secţiunea a II-a (clasa a V-a): acad. Nicolae Teodorescu, Constantin Cărbunaru, Valeriu Mangu, Adrian Negru;

Secţiunea a III-a (La granița dintre matematică și logică) : Valeriu Mangu, Ion Cheşcă ;

Secţiunea a IV-a (clasa a VI-a) : Valeriu Mangu, Ion Cheşcă, Mircea Trifu, Laurenţiu Gîrbă ;

Secţiunea a V-a (clasa a VII-a) : Constantin Cărbunaru, Valeriu Mangu, Adrian Negru, Laurenţiu Gîrbă ;

Secţiunea a VI-a (clasa a VIII-a) : Adrian Negru, Constantin Cărbunaru, Julia Sebesteyén, Valeriu Mangu, Ion Cheşcă ;

Secţiunea a VII-a (Subiecte date la concursurile de matematică) : Mircea Trifu, Laurenţiu Gîrbă, Valeriu Mangu ;

Secţiunea a VIII-a (Subiecte date la proba de verificare şi admitere în treapta I de liceu) : Constantin Cărbunaru, Valeriu Mangu ;

Secţiunea a IX-a (Teme pentru cercurile de elevi) : Adrian Ghioca ;

Secţiunea a X-a (Probleme comentate din reviste străine (II)) : acad. Nicolae Teodorescu ;

Secţiunea a XI-a (Surprize ale matematicii elementare) : Valeriu Mangu, Laurenţiu Gîrbă.

De asemenea, şi-a adus contribuţia la definitivarea secţiunilor:

Acad. Nicolae Teodorescu: introduceri metodologice la capitole ale secţiunilor I, II, şi IX;

Valeriu Mangu: introducere metodologică la capitolul III al secţiunii I, redactări ale unor soluţii de probleme din secţiunea I;

Julia Sebesteyén: Probleme alese pentru secţiunile II, V, VI.

ABREVIERI, NOTAŢII PRINCIPALE

ALGEBRĂ

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	mulţimile numerelor: naturale, întregi, raţionale, reale.
$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$	mulţimile: $\mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$.
$a \mid b$	a divide pe b.
$a \vdots b$	a se divide la b.
$a \nmid b$	a nu divide pe b.
$\mathcal{M}a$	multiplu de a.
$(a, b)_*$	cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b.
$[a, b]_*$	cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b.
$[a]_*$	partea întreagă a lui a.
$\{a\}_*$	partea fracţionară a lui a.
$(\exists)$	există.
$(\forall)$	oricare.
$\stackrel{\text{def.}}{=}$	egal prin definiţie.
$\emptyset$	mulţimea vidă.
$\in$, $\notin$	aparţine, nu aparţine.
G.M.	Gazeta Matematică.
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}_{(q)}$	scrierea poziţională, în baza q, a numărului cu cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
$k = \overline{1, 2, 3, \ldots, n}$	k ia valorile $1, 2, 3, \ldots, n$.
$k \in \overline{1, n}$	k aparţine mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

NOTĂ: Lista notaţiilor geometrice se găseşte la începutul părţii a II-a a lucrării.

NOTĂ ASUPRA EDIȚIEI

Ediția I a lucrării „Matematica în gimnaziu și liceu, vol. II — Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor I—VIII" de acad. Nicolae Teodorescu, Valeriu Mangu, Constantin Cărbunaru, Alexandrina Dumitru, Adrian Ghioca, Julia Sebesteyén, Ion Cheșcă, Adrian Negru, Mircea Trifu, Laurențiu Gîrbă, a apărut în anul 1985 sub egida Societății de Științe Matematice din Republica Socialistă România.

Președinte: Acad. Nicolae Teodorescu.

Secretar responsabil: Lector univ. dr. Bucur B. Ionescu.

Lucrarea a fost elaborată în conformitate cu cerințele exprimate de programele școlare în vigoare; ea conține dezvoltări teoretice de ordin metodologic și o gamă variată de probleme extrase din manuale, din *Gazeta Matematică* și reviste străine, din lucrări similare precum și aparținînd autorilor.

Coordonator general: acad. Nicolae Teodorescu.

Redactarea finală-coordonare: Valeriu Mangu, A. Negru.

Tipărirea lucrării a fost asigurată de către Întreprinderea Poligrafică „Informația", str. Brezoianu nr. 23—25, București, sub nr. de comandă 850—851.

Director: ing. Niculae Vasilache.

Inginer șef: Ioana Bănică.

Șef producție: ing. Aurel Popescu.

Șef secție: Dumitru Neacșu.

Sector tastere: șef atelier Gheorghe Drăgan,
brigadieri: Florian Țoropoc, Gheorghe Mercurian;
tasteriști: Lizica Mihăilescu, Dumitru Petre.

Sector monoturnat: maistru Vasile Nuțescu,
monoturnători: Gheorghe Nicolae, Vasile Bujor.

Sector urmărirea materiei: Constanța Cotîrță, Florea Grafu.

Sector corectură internă: brigadier Elena Bârsăneanu, corector Margareta Nae, Maria Ionescu, Pia Niculae.

Atelier zețărie: șef atelier: Lucian Gugiu, maistru Alexandru Nițu, brigadier: Ștefan Nicolae.

zețari: Maria Bucur, Ștefan Rătescu, Teodora Corbea, Tatiana Scorei, Viorica Constantin, Ioana Diaconu, Lucian Marinescu, Drina Fieraru, Dumitra Cristea, Ion Iordănescu, Constantin Georgescu, Traian Bădican, Mariana Costea, Țică Gheorghe, Claudia Ionescu, Ștefan Dinu, Tudor Ionescu, Nicolae Ciobănescu, Nina Andronache, Constanța Pandele, Spiridon Bănuță, Liliana Stoica, Lidia Nedelcu, Ileana Preoteasa.

Sector zincografie: maistru Gheorghe Petrescu;

zincografi: Mihail Georgescu, Nicolae Călin, Anca Roșca.

Sector prerevizie: brigadier Petre Dobre, Tudor Lungu, Eugen Milostivu, Marin Tanache, Vasile Călin, Gheorghe Popa, Mihăiță Baban, Petre Mihăilescu, Tudorel Botez.

Sector revizie: Mariana Tumpac, Constantin Radu, Mariana Drăgan, Ion Ivanovici, Ioan Moroșanu, Dioghen Petrescu, Ion Mănăilescu, Marian Pațanghel, Aurelian Barbu, Ciprian Guriuc, Nae Căprioreanu, Marian Ciocan, Tudor Năstase, Cristea Ene.

Atelier imprimare: șef atelier Nicolae Antonescu, maiștri Iulian Pop, Daniel Mardan, Alexandru Dumitran;

mașiniști: Dumitru Bîrzoiu, Iuliana Tunaru, Luca Miu, Alexandrina Plăcintă, Marin Bujoreanu, Gheorghe Pelmuș, Constantin Ene, Gheorghe Cristea, Marian Ilie, Petre Mladin, Gheorghe Dondoți, Costinel Zaharia, Aurelia Mardale, Maria Nicolae, Mihaela Barbu, Aurică Nicolae, Ion Mocanu.

Atelier finisare: șef atelier Gheorghe Iordache.

legători: Ileana Liță, Ecaterina Roșca, Aurel Racoviță, Petra Chiriță.

Biroul aprovizionare: Arthur Mihăilescu, Jean Strîmbu.

Lector de carte: prof. Eugen Keyl.

Tehnoredactor: Cornel Cristescu.

Corectura: Nicolae Gache.

Grafica: Dragoș Grecea, George Dăbuleanu, Camelia Santarosa, Alexandru Negulescu, ing. Ion Paraschiv, ing. Mircea Popescu, Irina Străistaru, Valer Nechita, Anca Bobeanu.

Coperta: Cornel Negru.

SECȚIUNEA I

CLASELE I–IV

NOȚIUNI ELEMENTARE DESPRE MULȚIMI

TEORIA MULȚIMILOR ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PRIMAR

I. Manuale și culegeri de probleme pentru începători

A preda primele noțiuni de matematică unor copii de 6—10 ani este o sarcină pe care cel ce și-o ia trebuie să aibă atît deplina conștiință a unei răspunderi greu de estimat, cît și talentul incomparabil de a se putea face înțeles de copii care au ajuns în dezvoltarea lor intelectuală și psihologică în etapa însușirii și folosirii raționamentului logic-deductiv specific construcției matematicii.

De aceea, conceperea, elaborarea și predarea unui manual de elemente de matematică pentru învățămîntul primar necesită, pe lîngă calitățile enumerate, și o experiență rodnică îmbinată cu capacitatea de dăruire și de comunicare pe care o cerem și o așteptăm de la învățători și învățătoare, de care ne amintim cu afecțiune și recunoștință cînd sîntem maturi și ne amintim de primii pași în deprinderea buchiilor matematicii.

Cu atît mai grea este sarcina de a elabora o culegere de exerciții și probleme pentru cei mici, prin care le cerem să gîndească, uneori prematur, și să răspundem la întrebări matematice prin fraze logice, corecte și bine formulate și prin calcule cu cifre și simboluri.

II. Noțiunea de mulțime și integrarea ei în învățămînt

Noțiunea de *mulțime* este naturală și fundamentală, corespunzînd capacității de identificare și strîngere laolaltă a obiectelor, animalelor, plantelor, viețuitoarelor de tot felul, a faptelor, produselor muncii și membrilor colectivităților omenești. Această capacitate a fost cîștigată de om odată cu conștiința și este una dintre primele manifestări ale acesteia, deși poate nu este specifică numai omului, unele viețuitoare dînd semne că o au și ele, cel puțin într-o măsură rudimentară și adecvată unor necesități practice sau de viață.

Totuși, omenirea a trăit milenii după milenii fără a adînci semnificația acestei noțiuni în cadrul unei discipline științifice. Cînd ea a apărut spre sfîrşitul secolului trecut prin intuiţia şi concepţia lui CANTOR, nu a fost înţeleasă decît cu greutate şi întîrziere, dînd loc la dispute şi controverse ştiinţifice asupra paradoxelor pe care le ridică, de-a lungul a peste 40 de ani.

Între timp, unii matematicieni de seamă şi-au însuşit-o, alţii însă au continuat s-o considere discutabilă şi în orice caz să nu o folosească în lucrările lor. Revoluţia structurală, ca şi orientările deliberate ale unor grupuri de matematicieni au adus triumful teoriei mulţimilor ca fundament al matematicii şi au determinat introducerea acesteia şi ca bază a unor tratate, manuale, monografii şi studii cu caracter didactic de nivel superior.

Pătrunderea ei în învăţămîntul secundar şi elementar este rezultatul necesităţii modernizării învăţămîntului de toate gradele care a devenit imperioasă după cel de-al doilea război mondial, ca urmare a extinderii revoluţiei tehnico-ştiinţifice contemporane pe tot globul pămîntesc.

Între anii 1960—1970 numeroase ţări, urmînd exemplul Franţei, unde influenţa grupului reformator BOURBAKI a fost predominantă, au adoptat teoria mulţimilor ca bază a dezvoltării învăţămîntului matematic, unele cu caracter experimental şi limitat, alte cu deplină convingere revoluţionară.

III. Dificultăţi de înţelegere a noţiunii de mulţime în învăţămîntul elementar

Experienţa a arătat că noţiunea de mulţime, dacă este predată ca atare şi mai ales în cursul primar, ca şi în primele clase gimnaziale, ridică numeroase dificultăţi de înţelegere şi nu conduc la scopul urmărit — de a fundamenta disciplinele de bază : aritmetica, geometria şi algebra în mod rodnic şi util. În special, în cursul primar, introducerea unor noţiuni ca cele de *element*, *mulţime vidă*, *mulţime cu un singur element*, *reuniune* şi *intersecţie de mulţimi şi submulţimi*, etc., nu numai că nu a adus lumină în minţile fragede ale copiilor, dar nici nu a servit la explicarea şi asimilarea logică a operaţiilor elementare cu numere naturale.

S-a dat vina adeseori pe învăţători, această armată de misionari ai cunoaşterii şi educaţiei, unii acuzîndu-i că ei nu reuşesc să stăpînească noţiunile de bază începînd cu cea de mulţime. Într-adevăr, şocul primit de majoritatea covîrşitoare a învăţătorilor, care nu primiseră în cursul pregătirii lor profesionale cunoştinţe de teoria mulţimilor, a fost puternic şi real. Dar, chiar şi cei mai tineri, pregătiţi ad-hoc prin reciclări deliberate nu au obţinut, decît rareori, satisfacţia de a fi însămînţat în minţile elevilor lor noţiunile, metodele şi semnificaţiile teoriei mulţimilor, oricît de intensiv ar fi predat-o.

În realitate, dificultăţile înţelegerii şi, mai ales, fructificării cunoştinţelor de teoria mulţimilor sînt esenţiale la elevii de vîrste mici, fiindcă cer eforturi de abstracţie pe care dezvoltarea intelectuală la aceste vîrste nu le poate învinge. Procesul de însuşire şi asimilare a raţionamentelor logic-deductive este îndelungat şi reuşeşte diferenţiat în masa copiilor, fără ca această diferenţiere să fie o deficienţă specifică. De aceea, după o perioadă mai scurtă sau mai lungă de experienţe pedagogice s-a reţinut necesitatea de a se adapta prezentarea noţiunilor şi operaţiilor de bază sub forme cît mai intuitive, gradat şi legat de aplicaţii cît mai apropiate de exemple de mulţimi, de obiecte uzuale, de ambianţe din mediul familial sau şcolar, de jocuri şi relaţii sociale etc.

IV. Prezentarea intuitivă a mulţimilor şi culegerile de probleme

Acest mod de prezentare aduce pe un plan de interes deosebit exerciţiile, exemplele, problemele, testele care se pot include în manuale şi culegeri de exerciţii şi probleme.

Culegerea de probleme destinată elevilor din clasele I—VIII şi cadrelor didactice care predau matematica în aceste clase, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice, avînd un caracter metodologic, pune un accent deosebit pe sprijinirea elevilor în însuşirea, asimilarea şi fructificarea noţiunilor de bază. De aceea, exerciţiile şi problemele de teoria mulţimilor ocupă un loc de seamă în această culegere, atît direct, cît şi prin infiltrarea noţiunilor respective în operaţiile şi raţionamentele din alte sectoare ale matematicii.

Fiindcă criteriul utilităţii este hotărîtor pentru instigarea interesului mai ales al începătorilor, care se întreabă printr-o reacţie de apărare naturală: „*cui prodest*”, ori de cîte ori primesc şocul noutăţii în contactul cu disciplinele teoretice şi în primul rînd cu cele matematice.

Ceea ce produce confuzie şi nedumerire în mintea fragedă a copiilor sînt definiţiile şi simbolismul neobişnuit pe care mulţimile, elementele şi componentele lor, pe de o parte, operaţiile şi relaţiile dintre acestea pe de altă parte, le impun de la început. Sînt dificultăţile ce se întîlnesc în învăţarea, reţinerea, asimilarea şi folosirea unei limbi străine cu *sintaxa* şi *semantica* ei. Au circulat numeroase glume şi butade pe seama introducerii şi implantării elementelor de teoria mulţimilor în învăţămîntul preşcolar şi primar pretutindeni, fiindcă şocul a fost general şi asemănător. Modul în care a fost atenuat în prezent ne permite să considerăm că, într-adevăr, aşezarea acestor elemente la baza învăţămîntului elementar poate fi susţinută ca un progres, dar cu o condiţie esenţială: *să fie prezentată intuitiv şi integrată în limbajul şi activităţile de toate zilele*, ca şi elementele de aritmetică şi geometrie pe care astăzi şi de multe secole nimeni nu le mai respinge, cînd sînt introduse cu tact şi raportate la viaţa curentă a tuturor vîrstelor.

Este ceea ce-şi propune culegerea de probleme pe care a editat-o Societatea de Ştiinţe Matematice pentru elevii şi cadrele didactice din clasele I—VIII, punct de vedere şi atitudine pe care le exemplificăm prin întrebările, exemplele, exerciţiile şi problemele ce urmează şi pe care le vom prezenta în acest consens pentru a ilustra consideraţiile precedente.

V. Prezentarea sumară a capitolului consacrat elementelor de mulţimi

Exemplul **I.1** atrage atenţia asupra unei convenţii de ordin lingvistic prin care un cuvînt din vorbirea curentă, „*mulţime*”, este introdus în limbajul şcolar. El cere celor mai mici elevi să extrapoleze şirul exemplelor.

Exemplul **I.2** introduce noţiunea de „*element*” al unei mulţimi tot sub forma convenţională lingvistică. Aici apare o greutate pe care strategia învățătoarei sau a învățătorului trebuie s-o învingă fără să aibă aerul de a impune un termen ciudat și ambiguu. Fiindcă desemnarea atomilor din care se compune mulțimea prin cuvîntul element, implică o abstractizare, căreia intenția vizuală și contactuală îi opune, în general, o complexitate evidentă. Într-adevăr, exemplele de elemente cum sînt păsărelele, ursuleții, membrii familiei, poate că se înțeleg mai ușor, dar cînd o mulțime este alcătuită din obiecte dispersate cum ar fi mesele, scaunele, farfuriile, tacîmurile și perdelele dintr-o cantină școlară, este nevoie de o cuprindere intelectuală pe care nu o au toți copiii în aceeași măsură.

De aceea, exemplul **I.2** este completat cu îndemnul ca elevii să continue ei înșiși *afirmațiile*, termen care atrage discret, dar deliberat atenția cadrelor didactice asupra eventualelor dificultăți de înțelegere ale copiilor.

De aceea, testînd această înțelegere, apar întrebări ca **I.3** și **I.4** unde mulțimile ce sînt interogate sînt chiar cuvinte ca *școală* sau *aviator*.

De aici înainte se face apel la imagini vizuale în care mulțimile sînt desenate și încadrate în contururi, care le separă de alte configurații sau le plasează într-un vid grafic. Ceea ce se cere acum este *caracterizarea* elementelor printr-o *proprietate comună* ca în **I.5**, **I.6**, **I.7**. Apoi, în **I.8**, se cere să se dea *denumiri* unor mulțimi formate din imagini, deci să se pună în evidență proprietatea comună a elementelor acestora.

Înaintarea în complexitate este prudentă. Se construiesc mulțimi cu elemente care au o proprietate comună, dar unele mai au și alte proprietăți, de unde cerința de alcătuire de *submulțimi* sau *părți* ca în **I.9**, iar în **I.10**, după alcătuirea acestora apar și relațiile între părți : existența de elemente comune, reuniunea, intersecția, neapartenența la mulțimea cerută. În plus, o nouă dificultate de *natură logică* apare aici, fiindcă se cere să se judece dacă unele afirmații asupra naturii acelor părți sînt adevărate sau false.

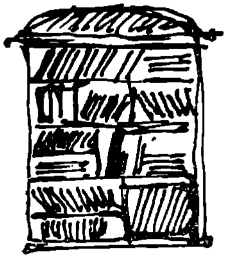
Pînă la exercițiul **I.12** inclusiv, tratarea este discursivă și modelarea matematică, grafică. Începînd însă cu **I.13** apare simbolismul grafic al teoriei mulțimilor ca $M = \{a, b, c, d\}$, semnele $\in$ și $\notin$ de apartenență sau neapartenență și folosirea lor în caracterizarea părților și elementelor, cerîndu-se aprecierea unor propoziții de caracterizare ca adevărate sau false.

Începînd cu **I.17**, exercițiile se complică și devin probleme odată cu **I.20**, ultima fiind **I.23** care încheie capitolul de „Noțiuni elementare despre mulțimi" pentru cursul primar.

În învățămîntul de toate gradele se introduc uneori, cu mult curaj, noțiuni, tehnici și metode care strălucesc prin prestigiu și noutate, dar care odată prezentate și așezate într-un context general, nu mai apar decît rar sau uneori chiar deloc mai tîrziu.

Culegerea aceasta va ține seama de astfel de strategii fără urmări și va căuta să le evite. De aceea, numărul relativ mic de exerciții și probleme privind elementele de mulțimi va fi completat ulterior cu folosirea acestora în aplicații justificative și, sperăm, recunoscute ca atare.

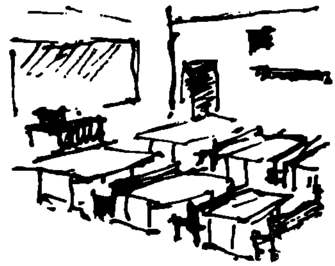
I.1. Spunem :



a) mulțimea cărților din biblioteca aflată în camera voastră;

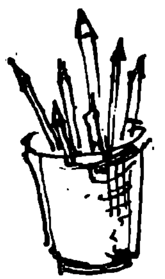
b) mulțimea cărților din biblioteca școlii;

c) mulțimea cărților din librăria „Mihai Eminescu" aflată în orașul București;



d) mulțimea băncilor așezate pe rîndul de la fereastră;

e) mulțimea băncilor din clasa în care învățați;



f) mulțimea creioanelor de culoare roșie aflate în penarele elevilor din clasa I;

g) mulțimea creioanelor din penarul colegului de bancă.

Continuați exemplele !

I.2. Spunem :

a) Elementele mulțimii cărților din biblioteca aflată în camera voastră sînt cărțile :

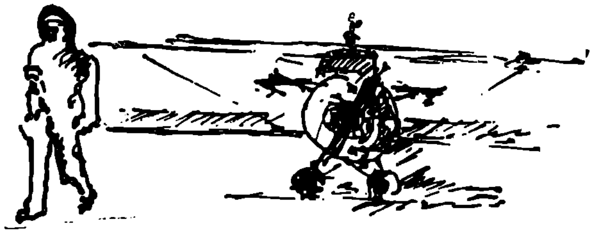
b) Elementele mulțimii băncilor din clasa în care învățăm sînt băncile.

Continuați afirmațiile !

I.3. Care sînt elementele mulțimii formate din literele cuvîntului *școală*?

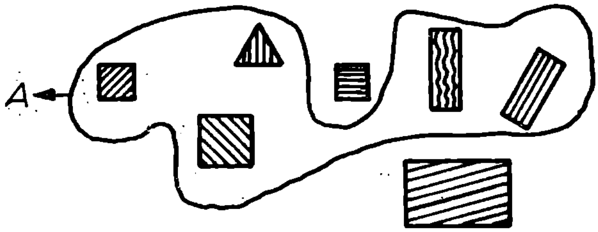
Răspuns : Mulțimea formată din literele cuvîntului este {*ș*, *c*, *o*, *a*, *l*, *ă*}, deci elementele cerute sînt : *ș*, *c*, *o*, *a*, *l*, *ă*.

I.4. Care sînt elementele mulţimii formate din literele cuvîntului *aviator*?



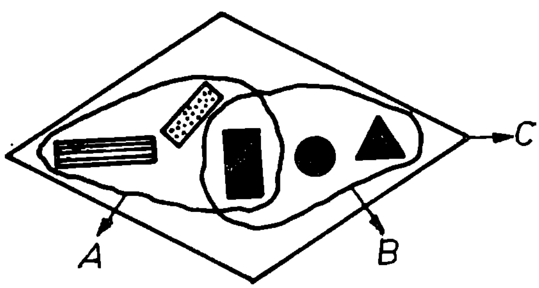
Răspuns: Mulţimea formată din literele cuvîntului este $\{a, v, i, t, o, r\}$, deci elementele cerute sînt: v, i, a, t, o, r.

I.5. Priviţi imaginea şi desenaţi numai figurile geometrice, elemente ale mulţimii A.



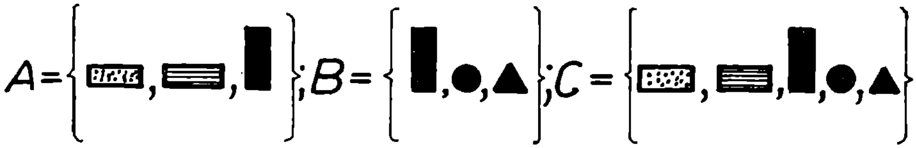
I.6. Folosind piesele trusei „Logi II", formaţi mulţimi astfel ca:
a) elementele fiecărei mulţimi să fie de aceeaşi culoare;
b) elementele fiecărei mulţimi să fie de aceeaşi formă;
c) elementele fiecărei mulţimi să fie de aceeaşi mărime.

I.7. Priviţi imaginea următoare:

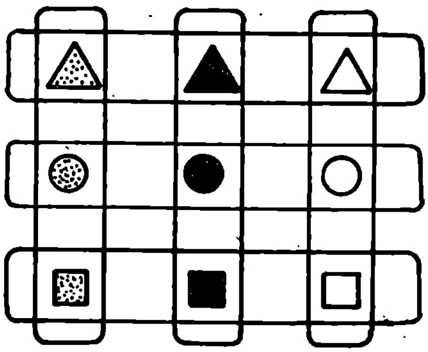


Scrieţi elementele:
a) mulţimii A, a figurilor geometrice în formă de dreptunghi;
b) mulţimii B, a figurilor geometrice de culoare neagră;
c) mulţimii C, a figurilor geometrice aflate în interiorul patrulaterului.

Răspuns : Cercetînd imaginea, rezultă :



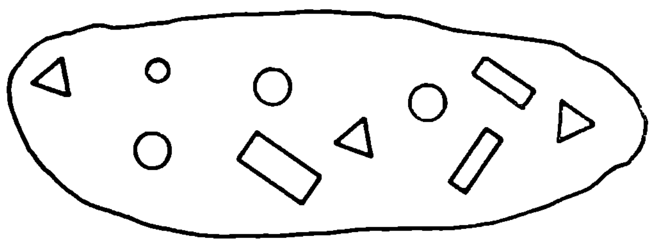
I.8. a) Urmăriţi desenul şi denumiţi elementele mulţimilor conturate :



b) Desenaţi elementele fiecărei mulţimi.

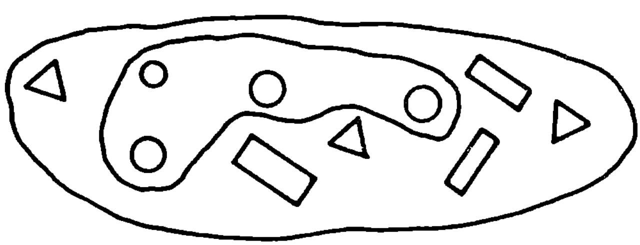
Răspuns : Triunghi, cerc, pătrat.

I.9. a) Copiaţi figura următoare, apoi conturaţi submulţimea cercurilor.



b) Ce submulţimi cu elemente de aceeaşi formă se mai pot alcătui ?

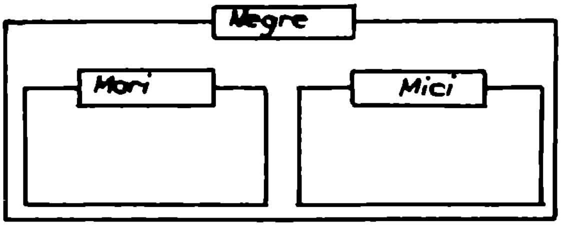
Răspuns : a)



b) Submulţimea triunghiurilor ; submulţimea dreptunghiurilor.

I.10. Așezați figurile geometrice:

la locul potrivit, apoi stabiliți care propoziții sînt adevărate:

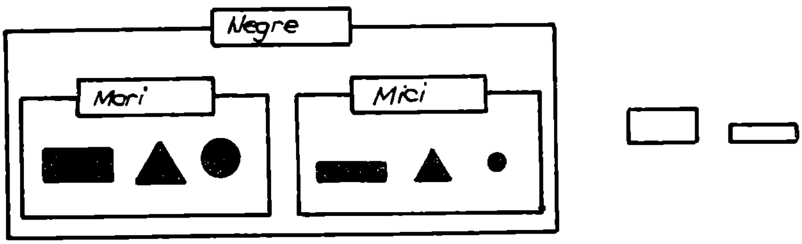


a) Cele două submulțimi ale mulțimii figurilor negre au elemente comune;

b) Mulțimea-reuniune a submulțimilor anterioare este mulțimea pieselor negre;

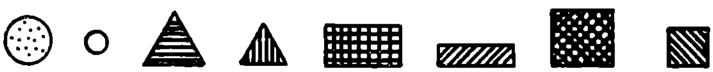
c) Mulțimea-intersecție a submulțimilor de la punctul a) este mulțimea pătratelor albe.

Răspuns: Avem desenul:

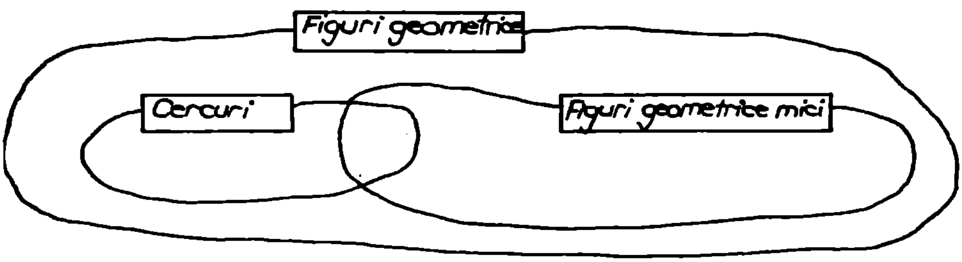


Rezultă: a) falsă; b) adevărată; c) falsă, deci numai propoziția de la punctul b) este adevărată.

I.11. Așezați figurile geometrice:

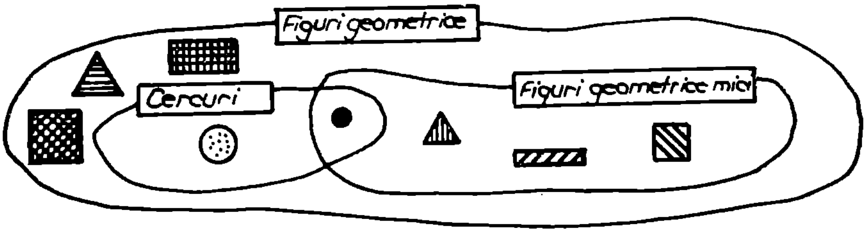


la locul potrivit în desenul de mai jos. Se formează o mulțime de figuri geometrice cu două submulțimi: submulțimea cercurilor și submulțimea figurilor geometrice mici.



a) Cele două submulţimi au elemente comune? Denumiţi-le!
b) Care este mulţimea-reuniune a submulţimilor conturate?
c) Care sînt mulţimile obţinute făcînd diferenţele dintre submulţimile conturate?

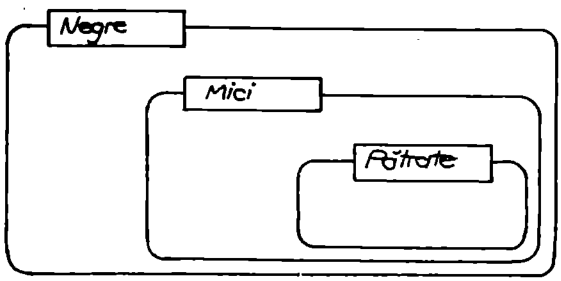
Răspuns: Avem desenul:



a) Da, cercul negru mic este element comun;
b) Mulţimea-reuniune este mulţimea cercurilor şi a figurilor geometrice mici;
c) Obţinem mulţimea cercurilor mari, respectiv mulţimea figurilor geometrice mici care nu sînt cercuri.

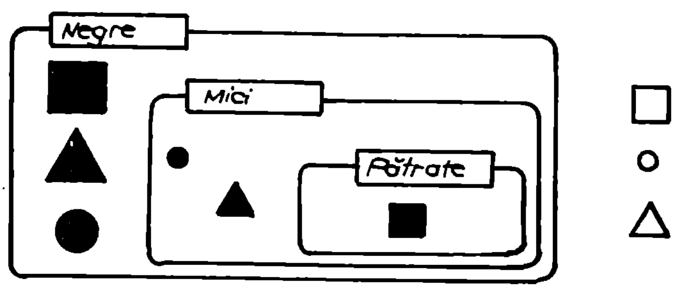
I.12. Aşezaţi figurile geometrice:

în desenul de mai jos la locul potrivit, apoi răspundeţi la următoarele întrebări:



a) Care este submulţimea figurilor geometrice negre, mici?
b) Care elemente nu aparţin mulţimii figurilor geometrice negre?

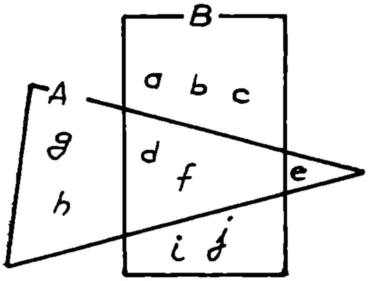
Răspuns: Desenul completat arată astfel:



a) Submulţimea cerută este submulţimea care conţine pătratul, cercul şi triunghiul, negre, mici;

b) Nu aparţin pătratul, cercul, triunghiul, albe.

I.13. A fiind mulţimea literelor din interiorul triunghiului mare, iar B mulţimea literelor din interiorul dreptunghiului, scrieţi elementele următoarelor mulţimi:



a) reuniunea mulţimilor A şi B;
b) reuniunea mulţimilor B şi A;
c) intersecţia dintre mulţimea A şi mulţimea B;
d) intersecţia dintre mulţimea B şi mulţimea A;
e) diferenţa dintre mulţimile A şi B;
f) diferenţa dintre mulţimile B şi A.

Răspuns: Avem: a) {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}; b) {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, deci reuniunea este *comutativă*; c) {d, f}; d) {d, f}, deci intersecţia este *comutativă*; e) {g, h, e}; f) {a, b, c, i, j}, deci diferenţa mulţimilor nu este comutativă.

I.14. Fie propoziţia: *Eu iubesc învăţătura.*

a) Să se scrie mulţimile M_1, M_2, M_3 formate din literele care cuprind sunetele distincte din fiecare cuvînt al propoziţiei.

b) Căror mulţimi aparţine litera e şi cărei mulţimi nu îi aparţine această literă?

c) Să se scrie mulţimea M a literelor folosite pentru scrierea cuvintelor din propoziţie. Compuneţi această mulţime cu ajutorul lui M_1, M_2, M_3.

Răspuns: a) Mulţimile cerute sînt $M_1 = \{e, u\}$; $M_2 = \{i, u, b, e, s, c\}$; $M_3 = \{î, n, v, ă, ţ, t, u, r, a\}$; b) Avem $e \in M_1$; $e \in M_2$; $e \notin M_3$; c) Avem $M = \{a, ă, b, c, e, i, î, n, r, s, t, ţ, u, v\}$, deci M este reuniunea mulţimilor M_1, M_2, M_3.

I.15. Se dau mulţimile M_1 şi M_2 care au ca elemente: denumirea zilelor săptămînii, respectiv denumirea lunilor anului.

Scrieţi elementele fiecărei mulţimi, apoi stabiliţi care dintre propoziţiile următoare sînt adevărate şi care sînt false:

a) „marţi" aparţine mulţimii M_1;

b) „iunie" aparţine mulţimii M_1;

c) mulţimile M_1, M_2 au unele elemente comune.

Răspuns: Propoziţiile sînt: a) adevărată; b) falsă; c) falsă.

I.16. Mulţimile E_1 şi E_2 sînt reprezentate de: literele alfabetului care sînt vocale, respectiv literele alfabetului care nu sînt consoane.

a) Stabiliţi care propoziţii sînt adevărate şi care sînt false ($\in$ este semnul de apartenenţă, $\notin$ este semnul de neapartenenţă):

$$p \in E_1;\ p \notin E_2;\ b \in E_2;\ b \notin E_1,\ e \in E_1;\ a \notin E_2;$$

b) Înlocuiţi cu $\in$ sau $\notin$ sau $=$ punctele de suspensie din scrierile de mai jos:

$e \ldots E_2$; $b \ldots E_1$; $o \ldots E_2$; $u \ldots E_2$; $p \ldots E_2$; $i \ldots E_1$; $E_1 \ldots E_2$.

Răspuns : Avem:
$E_1 = \{a, e, i, o, u, ă, â, î\}$; $E_2 = \{a, e, i, o, u, ă, â, î\}$.
a) Propozițiile sînt : falsă, adevărată, falsă, adevărată, adevărată, falsă.

b) Avem : $e \in E_2$; $b \notin E_1$; $o \in E_2$; $u \in E_2$; $p \notin E_2$; $i \in E_1$; $E_1 = E_2$.

I.17. a) Scrieți submulțimea formată din numerele impare ale mulțimii numerelor naturale mai mari sau egale cu unu și mai mici sau egale cu nouă.

b) Scrieți submulțimea formată din numerele pare ale mulțimii numerelor naturale mai mici sau egale cu zece și strict mai mari ca 0.

Răspuns : Avem: a) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

I.18. Reuniți mulțimea formată din literele cuvîntului *gînd* și cele ale cuvîntului *ac*. Ce cuvînt se formează cu elementele acestei mulțimi?

Răspuns : Se formează cuvîntul „*gîndac*".

I.19. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$ este o mulțime de litere din alfabet, care dintre următoarele afirmații :

a) $A = B$;

b) numărul elementelor mulțimii A este egal cu numărul elementelor mulțimii B;

c) mulțimea A este inclusă în mulțimea B

sînt adevărate și care false?

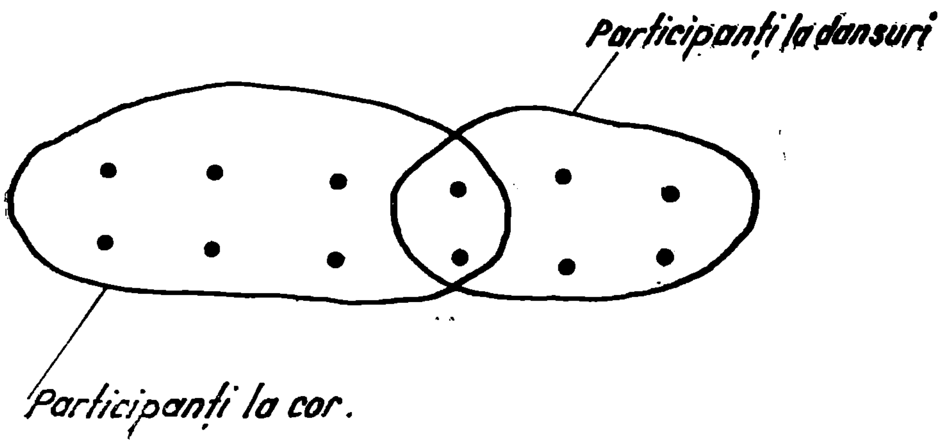
Răspuns : Afirmațiile sînt : a) falsă, b) adevărată, c) falsă.

I.20. Clasa noastră pregătește o serbare. Un număr de 8 elevi participă la cor, iar 6 elevi sînt la dansuri.

Știind că dintre elevii de la dansuri, 2 cîntă și la cor, stabiliți cîți elevi participă la programul artistic.

Răspuns : Dacă 2 din cei 6 elevi dansatori participă și la cor înseamnă că 4 sînt numai dansatori, iar 6 din 8 sînt numai coriști. Deci $6 + 2 + 4 = 12$ este numărul de participanți la programul artistic.

O altă rezolvare o obținem privind desenul :



3 — c. 859

Rezultă $6 + 2 + 4 = 12$ participanţi la programul artistic.

I.21. Să se stabilească mulţimile A şi B dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :

a) reuniunea celor două mulţimi este mulţimea:

$$\{a, b, c, d, e, f, g\};$$

b) intersecţia celor două mulţimi este mulţimea $\{b, d, f\}$;

c) diferenţa dintre mulţimea B şi mulţimea A este mulţimea $\{g\}$.

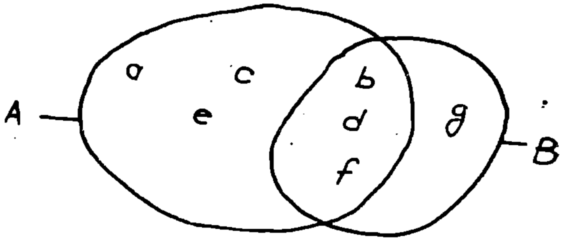
Se presupune că elementele a, b, c, d, e, f, g sînt diferite între ele.

Răspuns : Dacă diferenţa dintre mulţimea B şi mulţimea A este mulţimea $\{g\}$, rezultă că g aparţine mulţimii B şi nu aparţine mulţimii A. Elementele mulţimii-intersecţie, $\{b, d, f\}$, aparţin şi mulţimii A, şi mulţimii B. În mulţimea-reuniune apar şi elementele a, c, e care aparţin numai mulţimii A, căci dacă măcar unul ar aparţine lui B, atunci ele ar aparţine intersecţiei.

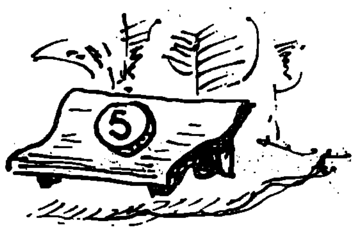
Deci :

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad B = \{b, d, f, g\}.$$

Altfel, stabilim elementele fiecărei mulţimi respectînd condiţiile din enunţ în reprezentarea grafică :



I.22. a) Enumeraţi elementele mulţimii literelor cuvîntului *bancă*;



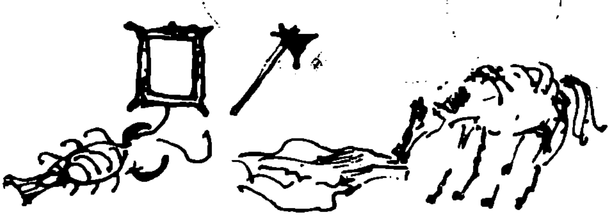
b) Formaţi mulţimea ultimelor două litere ;

c) Găsiţi diferenţa celor două mulţimi ;

d) Ce cuvînt puteţi forma cu literele mulţimii — diferenţă ?

Răspuns : a) Elementele sînt : *b, a, n, c, ă*. b) Mulţimea cerută este $\{c, ă\}$. c) Diferenţa mulţimilor cerute la punctele a) şi b) este mulţimea $\{b, a, n\}$. d) Putem forma cuvîntul *ban*.

I.23. Se dau cuvintele :



a) *ropot*; *topor*;

b) *rama*; *amar*;

c) *rac*; *car*;

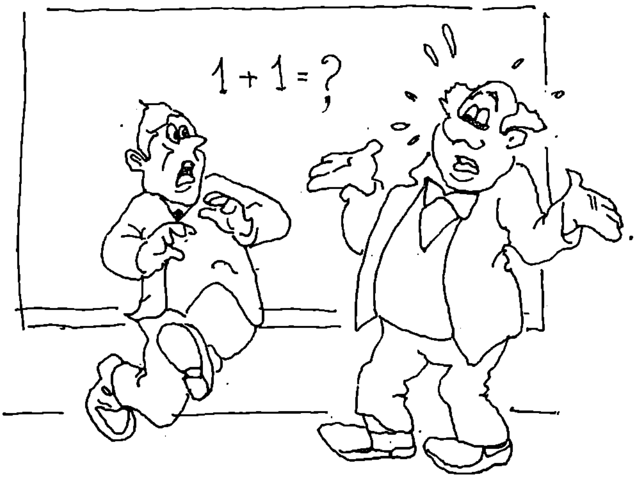
d) *cal*; *lac*.

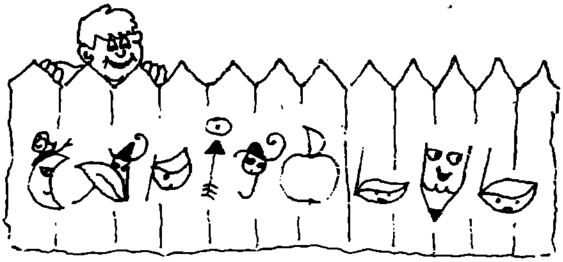
Scrieţi elementele mulţimilor formate din literele fiecărui cuvînt. Ce observaţi?

Răspuns: a) Elementele mulţimii formată din literele cuvîntului *ropot* sînt: *r*, *o*, *p*, *t*, iar ale mulţimii literelor cuvîntului *topor* sînt aceleaşi.

Observăm că cele două mulţimi sînt $\{r, o, p, t\}$ şi $\{t, o, p, r\}$, deci ele sînt egale.

La fel judecăm pentru celelalte cazuri.



NUMERE NATURALE

NUMĂRUL NATURAL, NOŢIUNE FUNDAMENTALĂ ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL PRIMAR, CA ŞI ÎN CELELALTE GRADE DE ÎNVĂŢĂMÎNT

1. Număr natural şi mulţime

Noţiunea de *număr natural* este fundamentală nu numai în cunoaşterea ştiinţifică sau în învăţămîntul de orice formă şi de orice grad, dar înainte de orice în viaţa de toate zilele, în raporturile dintre oameni ca membri ai societăţii umane.

Ea este fonciarmente legată de cea de *mulţime*, care este, de asemenea, fundamentată în aşa măsură încît stă la baza noţiunii de număr natural. Totuşi, numărul natural a fost introdus în matematică din timpuri străvechi; sub formă intuitivă este apanajul prestigios al omului primitiv care a avut printre ideile geniale ce trebuie atribuite speciei umane, cea de a folosi degetele de la mîini pentru *a identifica* numerele naturale de bază şi pentru a *număra*. Sîntem conduşi să admitem şi calitatea mai înaltă de a *aduna* şi *scădea* pe degete, poate chiar de a obţine prin scădere şi numărul zero pe care aritmetica antichităţii egiptene, elene şi romane nu-l conţinea ca simbol de calcul sau de scriere numerică.

Desigur, noţiunea de mulţime se găseşte şi intuitiv la baza celei de număr natural, ca şi cea de *corespondenţă biunivocă* sau *bijecţie*. Dacă încercăm să ne imaginăm cum putea omul primitiv identifica numerele naturale, chiar primele de la 1 pînă la 5, sîntem obligaţi să admitem că el reuşea să desprindă *cardinalul* unei mulţimi ca proprietatea esenţială şi *abstractă* a tuturor mulţimilor cu acelaşi cardinal. Dar aceasta implică stabilirea unei corespondenţe biunivoce între acestea sau cel puţin între multe dintre acestea care îi cădeau sub simţuri, fiind capabil de a face abstracţie de proprietăţile specifice ale elementelor acestor mulţimi. Această calitate a fost cîştigată cu preţul unui număr enorm de experienţe şi implică o calitate mai generală a conştiinţei umane, cea de *comunicare*, fiindcă fără aceasta nu s-ar fi format nicicînd *noţiunea* de număr natural.

Omul a trăit totdeauna în lumea *mulţimilor*, le-a folosit în cele mai variate moduri dar nu a ajuns să discearnă noţiunea însăşi de mulţime şi cu atît mai puţin s-o modeleze matematic decît spre sfîrşitul secolului al XIX-lea, prin GEORG CANTOR. Dar nici atunci ea nu a fost înţeleasă ca atare, n-a fost însuşită, n-a fost asimilată şi cu atît mai mult n-a fost folosită ca noţiune matematică, decît după 30—40 ani şi atunci cu multe reticenţe şi fenomene de respingere, cu critici bazate pe paradoxe care o făceau aparent contradictorie.

Cum se explică faptul că numărul natural, care este o calitate a mulţimilor, deci în aparenţă mai abstract decît acestea, care are un suport material indiscutabil şi evident, a fost însuşit, integrat şi folosit de om din cele mai vechi timpuri, pe cînd mulţimea pe care o caracterizează şi în concret, ca şi în abstract a trebuit să aştepte pe CANTOR *în amurgul secolului trecut pentru a fi formulată, de altfel cu un succes foarte tardiv, cît priveşte integrarea ei în matematică?*

II. Mulţime şi număr natural la grădiniţă

BERTRAND RUSSELL făcea observaţia profundă că *„ceea ce este evident este greu de dovedit şi adesea greşit"*. Mulţimea, ca model concret, este universală, evidentă şi durabilă cît lumea, dar ca noţiune abstractă implică, tocmai prin evidenţa, prin universalitatea ei, un efort de înţelegere care decurge din ea.

O figură geometrică, un corp rigid, o familie, o turmă, ca şi o armată, obiectele dintr-o cameră sau cărţile dintr-o bibliotecă sînt mulţimi, dar nimeni înainte de CANTOR nu s-a gîndit să le asemuiască şi să facă din ele o noţiune cu care se poate opera în matematică, oglindind operaţiile care se fac cu ea în viaţă — reuniune, intersecţie, împărţire în părţi, etc.

Spunem toate aceste observaţii şi reflecţii, care desigur sînt banale, fiindcă ţinem să înţelegem dificultăţile pe care le întîmpină învăţătoarele şi învăţătorii cînd fac pe copiii de 6—9 ani să asimileze noţiunea de mulţime, s-o pună la baza înţelegerii conceptului de număr natural şi să-i facă să înveţe şi operaţiile aritmetice elementare cu ajutorul mulţimilor şi a operaţiilor cu ele.

Copiii sînt pregătiţi încă de la grădiniţă pentru a-şi însuşi conceptul de număr natural, tot pe baza noţiunii de mulţime. Acolo, conform lucrării editate de Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului, printr-un colectiv de 7 autori, cadre didactice cu experienţă şi competenţă pedagogică recunoscută, se spune că „una din sarcinile importante ale activităţii matematice este pregătirea pentru formarea conceptului de număr, ce va fi aprofundat şi consolidat, apoi, în clasa I". Se adaugă, în continuare, că „este suficient ca la grădiniţă să se prezinte numărul (natural, adăugăm noi) sub aspectul cantităţii şi numai în ultimele luni ale grupei mari să se introducă *ordinea în şirul natural al numerelor* (*cardinalul şi apoi ordinalul numărului*)"[1].

Menţionăm, în treacăt, că noţiunea de cardinal este o proprietate a mulţimii şi că numărul natural poate fi cardinal sau ordinal, dar acest ultim caz implică noţiunea de ordine asociată elementelor mulţimii.

---

[1] *Instrumente şi modele de activitate în sprijinul pregătirii preşcolarilor pentru integrarea în clasa I*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983. Autori: Julicta Alexandru, Valentina Filipescu, Coordonatori: Florica Glod, Ioana Herseni, Sora Lungu-Nicolae, Marta-Elena Stoiciu, Eliza Tunşanu.

Se vede de aici că, încă de la vîrsta de 4—5 ani, copiii sînt inițiați în noțiunea de mulțime pe cale **intuitivă**, bineînțeles în vederea însușirii conceptului de număr natural. Știm că ei vor cunoaște și cifrele ca simboluri.

Apreciem în mod deosebit că, de fapt, formarea conceptului de număr natural se bazează pe *noțiunea de cantitate* și, ca atare, se introduce întîi numărul doi, apoi numărul trei, etc. Nu am putut observa cînd se introduce numărul unu, deși la numărul trei se vorbește de planșa nr. 35, unde se găsesc asociate cifrele 1, 2, 3.

Numărul *unu*, cardinal al mulțimii cu un singur element, ridică dificultăți de înțelegere fiindcă un singur obiect nu sugerează deloc o mulțime. Dar și mai greu de conceput este *zero*, ca un cardinal al mulțimii vide. Dovadă este faptul că s-au scurs secole de operații aritmetice în care nu apărea zero la strămoșii noștri.

Reținem deci că, intrați în clasa I, copiii care au absolvit grădinița sînt în măsură să știe ce sînt numerele naturale, cel puțin pînă la zece, inclusiv zero, și să le citească simbolurile.

III. Numărul natural în școala primară

În învățămîntul primar, anterior reformei de modernizare aplicată începînd cu anul școlar 1978—1979, dobîndirea cunoștințelor de aritmetică urma o linie tradițională, care se baza pe intuiție, sprijinită de materiale didactice, de exemplu : bețișoare de dimensiuni variabile și colorate diferit. Prin reforma amintită s-a trecut cu hotărîre la concretizarea însușirii cunoștințelor aritmetice pe baza noțiunii de *mulțime*, completată cu cea de *relație*. S-a considerat că fundamentul logic al conceptelor și operațiilor aritmetice rezidă în aceste două noțiuni și s-a urmărit, în primul rînd, să se asigure baza științifică a conceptului de număr natural și a operațiilor cu numere naturale. Dar a existat și un obiectiv mai înalt, cel de „adîncire a caracterului intuitiv, dar și de abstractizare în procesul predării"[1]. Acesta privește pe învățători și învățătoare și aici ne găsim într-o situație care angajează răspunderi pedagogice și impune o analiză complexă a rezultatelor obținute prin conștientizarea însușirii cunoștințelor aritmetice pe baza mulțimilor și relațiilor. Se știe că ambele noțiuni se găsesc la baza construcției axiomatice a matematicii moderne promovată cu precădere de grupul BOURBAKI. Introducerea acestei revoluții structurale în învățămîntul elementar a produs reacții puternice pe plan mondial, dar, pînă la urmă, cel puțin limbajul ansamblat corespunzător a fost adoptat, probabil, pretutindeni.

Nu sîntem în măsură să evaluăm amploarea progreselor realizate în înțelegerea și folosirea noțiunilor moderne sau modernizate prin efectele acestora asupra maselor uriașe de elevi care învață, așa cum cere societatea modernă în evoluția ei tehnico-științifică, pentru a se integra în viața socio-economică. Desigur că există progrese și poate chiar remarcabile, dar cei cîțiva ani care s-au scurs de la extinderea modernizării s-au

---

[1] *Matematică, clasa I. Îndrumătorul învățătorului.* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981, pag. 6. Autori : Gh. Herescu, V. Motrescu, V. Ștefănescu.

putea să fie insuficienţi pentru destabilizarea eficientă a unor structuri străvechi şi tradiţionale.

În şcoala primară, elevul nu a atins încă pragul dezvoltării psiho-intelectuale al însuşirii raţionamentului logico-deductiv. El este încă în etapa operaţional concretă, unde este nevoit să folosească din plin intuiţia, dar călăuzită de experienţa eforturilor de înălţare treptată spre abstracţie.

De aceea, însuşirea numărului natural şi a operaţiilor aritmetice cu acesta se degajează adesea de noţiunea de mulţime şi este normal să se petreacă această desprindere acolo unde *algoritmul* este însuşit şi stabilizat. Altfel s-ar pierde un timp incalculabil pentru a raporta conştient şi deliberat toate operaţiile la mulţimi. Dacă stăm puţin să reflectăm, o astfel de raportare ar însemna, de fapt, folosirea unui model semi-concret pentru operaţii care se fac cu simboluri, deci cu modele abstracte. De aceea, aşa cum pianistul, după ce a învăţat gamele, acordurile şi arpegiile construieşte singur structuri muzicale simple şi apoi mai complicate, elevul care a desprins pe cale ansamblistă rostul numărului natural şi a operaţiilor elementare cu acesta, poate şi trebuie să se avînte spre un formalism algoritmic care este de fapt impus chiar de linia modernizării în scopul „sporirii rolului formativ al matematicii, cum ar fi : proprietăţile operaţiilor şi aplicarea lor în practică, substituirea numerelor cu litere, ecuaţii simple rezolvate pe baza înţelegerii conţinutului operaţiilor etc".

Prin urmare, se lucrează cu simboluri şi se extrapolează operaţiile aritmetice în patrimoniul algebrei, ceea ce înseamnă o trecere de la suportul mulţimilor la algoritmele algebrico-matematice. Deci, progresul se realizează prin limbaje mai evoluate şi prin algoritmizare algebrică.

IV. Numărul natural la nivel elementar, în cadrul culegerii

Capitolul II al culegerii tratează numerele naturale în viziunea ansamblistă cerută de programele analitice ale cursului primar.

La început se foloseşte materialul didactic intuitiv, dar mai tîrziu acesta trece pe planul al doilea şi apoi dispare din cunoştinţele problemelor şi exerciţiilor pentru a face loc imaginilor legate de mulţimi şi ulterior raţionamentelor algoritmice pe modele din viaţă.

Capitolul II, ca şi celelalte, este structurat pe noţiuni şi operaţii, fără a se adresa separat elevilor şi cadrelor didactice pe clase. Se urmăreşte în mod deliberat unitatea şi continuitatea pregătirii elevilor pe măsură ce parcurg etapele succesive ale învăţămîntului primar, fără a compartimenta această pregătire.

De aceea, cititorul va găsi în primele exerciţii, **II.1** şi **II.2**, operaţii cu beţişoare, întîi cu 10, apoi cu 37. Al treilea exerciţiu, **II.3**, foloseşte operaţii pe calculatorul cu bile la care se revine şi în **II.7**. Se urmăreşte îmbinarea folositoare a limbajului comun de citire şi scriere a numerelor cu cel al scrierii poziţionale în baza 10, în exerciţii ca **II.4**, **II.6**, **II.8**, **II.9**, **II.10**. Interesante sînt exerciţiile **II.12** şi **II.13** în care se dau texte ce conţin date numerice şi se cere citirea şi transcrierea lor folosind cifrele indo-arabe. Această competiţie se prelungeşte şi prin convertirea în cifre indo-arabe a unor numere scrise cu cifre romane şi invers, ca în **II.16**,

II.17 și devine distractivă în **II.18**, unde apare regele SOLOMON **și inelul său depozitar al cifrelor 0, 1, 2, . . ., 9.**

Exercițiile următoare sînt consacrate jocului **grafo-lingvistic al scrierii** și realizării diferitelor numere naturale, caracterizate prin anumite **proprietăți**, de exemplu **II.19, II.29** pînă la **II.26**.

Din acest moment exercițiile devin probleme și cer rezolvări care implică o anumită experiență în acest joc, asigurată de rezolvarea exercițiilor anterioare. Vom cita cîteva ca : **II.27, II.28, II.30, II.37**^{M_1}, **II.38, II.39**^{M_1}, **II.44**^{M_1}, ultimul fiind relativ la mulțimi finite de numere naturale, ca și **II.51**^{M_1}, **II.52**^{M_1}, **II.54**^{M_1}.

Semnalăm cîteva probleme de modelare matematică al căror rol educativ ar trebui cultivat cu abilitate de învățători și învățătoare pentru a cîștiga pe micii elevi pentru integrarea matematicii în activitățile lor cotidiene în vederea păstrării acestei capacități și mai tîrziu. Așa sînt : **II.45, II.57, II.18, II.12, II.13** și **II.5.**

Revistele de matematici elementare, care apar în alte țări, au totdeauna grijă să insereze probleme de matematici aplicate dintre cele mai variate, mergînd pînă la cultivarea problemelor distractive și a jocurilor matematice. Numerele naturale, mulțimile și operațiile elementare cu acestea constituie surse foarte elocvente de valoare instructivă și subliniem atractivitatea acestui gen de probleme pe care noi, din păcate, nu-l promovăm cu suficientă convingere.

II.1. Grupați zece bețișoare. Ce formează? Grupați apoi 10 mănunchiuri de cîte 10 bețișoare. Ce ați obținut?

Răspuns : Am obținut o zece, respectiv o sută.

II.2. Luați treizeci și șapte de bețișoare și grupați-le cîte zece. Ce observați?

Răspuns : Se formează trei grupe de cîte zece bețișoare și rămîn șapte bețișoare.

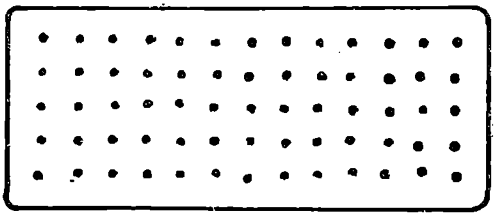
II.3. Cu ce puteți înlocui la calculatorul cu bile, numărul de :

a) 10 bile de pe prima sîrmă?
b) 10 bile de pe a doua sîrmă?
c) 10 bile de pe a treia sîrmă?
d) 10 bile de pe a patra sîrmă?
Ce reprezintă?

ăspuns : Putem înlocui cu : a) o bilă pe a doua sîrmă ; b) o bilă pe a treia sîrmă ; c) o bilă pe a patra sîrmă ; d) o bilă pe a cincea sîrmă. Acestea reprezintă : a) o zece ; b) o sută ; c) o mie ; d) o zece de mie.

II.4. Cu ce puteţi înlocui:
a) o zece; b) o sută? c) o mie? d) un milion?
***Răspuns*:** Putem înlocui cu: a) 10 unităţi; b) 100 unităţi, sau 10 zeci; c) o mie de unităţi, zece sute sau o sută de zeci; d) 10 sute de mii, 100 zeci de mii, 1000 de mii etc.

II.5. Stabiliţi, aplicînd modul de formare al numerelor în sistemul zecimal de numeraţie, cîte puncte sînt în desenul alăturat.



Folosiţi creioane diferit colorate.

II.6. Scrieţi numele primelor şase ordine în sistemul zecimal, (luate în mod crescător), indicînd şi clasa din care face parte fiecare ordin.
***Răspuns*:** Ordinele sînt: unităţi simple, clasa unităţilor; zeci, clasa unităţilor; sute, clasa unităţilor; mii, clasa miilor, etc.

II.7. Formaţi pe calculatorul cu bile sau la abac numerele care conţin:
a) 7 mii, 3 zeci şi o unitate;
b) 9 sute de mii, 3 sute şi 7 zeci;
c) un milion, două zeci de mii, 4 zeci şi 5 unităţi;
d) 3 zeci de mii, două zeci şi 9 unităţi.
Scrieţi pe caiet aceste numere.
***Răspuns*:** a) 7 031; b) 900 370; c) 1 020 045; d) 30 029.

II.8. Spuneţi şi scrieţi un număr format din:
a) mii, sute, zeci şi unităţi;
b) sute de mii, sute, zeci şi unităţi;
c) milioane, zeci de mii, zeci şi unităţi;
d) zeci de milioane, sute, zeci şi unităţi.
***Răspuns*:** Astfel de numere sînt: a) 1 237; 1 321, etc. b) 700 327; 500 429, etc.; c) 2 030 037 etc.; d) 10 000 329 etc.

II.9. Citiţi următoarele numere:
3 605; 87 059; 1 073 456; 678 435; 809 997; 1 009 735
apoi scrieţi-le în caiet după ce aţi notat ordinele şi clasele conform tabelului:

clasa milioanelor			clasa miilor			clasa unităţilor		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U

Răspuns: Tabelul completat arată astfel:

clasa milioanelor			clasa miilor			clasa unităţilor		
S	*Z*	*U*	*S*	*Z*	*U*	*S*	*Z*	*U*
					3	6	0	5
				8	7	0	5	9
		1	0	7	3	4	5	6
			6	7	8	4	3	5
			8	0	9	9	9	7
		1	0	0	9	7	3	5

II.10. Scrieţi cu cifre numerele formate din:

a) 17 unităţi din clasa miilor şi 117 unităţi din clasa unităţilor;

b) 726 unităţi din clasa milioanelor, 26 unităţi din clasa miilor şi 119 unităţi din clasa unităţilor;

c) 53 unităţi din clasa miilor şi 53 unităţi din clasa unităţilor;

d) 197 unităţi din clasa milioanelor, 29 unităţi din clasa miilor şi 345 unităţi din clasa unităţilor.

Răspuns: Aceste numere sînt: a) 17 117; b) 726 026 119; c) 53 053; d) 197 029 345.

II.11. Scrieţi cu cifre numerele care să fie egale cu:

a) 9 unităţi de ordinul al 7-lea, 3 unităţi de ordinul al 5-lea; două unităţi de ordinul al 3-lea, o unitate de ordinul 2 şi 3 unităţi de ordinul 1;

b) 7 unităţi de ordinul al 9-lea, 5 unităţi de ordinul al 8-lea, o unitate de ordinul 5, 3 unităţi de ordinul 4 şi 8 unităţi de ordinul 3;

c) 8 unităţi de ordinul al 6-lea, 4 unităţi de ordinul 3 şi 5 unităţi de ordinul 2;

d) 5 unităţi de ordinul al 7-lea, două unităţi de ordinul al 6-lea, 5 unităţi de ordinul al 5-lea, două unităţi de ordinul al 4-lea şi 9 unităţi de ordinul al 2-lea.

Răspuns: Numele sînt: a) 9 030 213; b) 750 013 800; c) 800 450; d) 5 252 090.

II.12. Citiţi textul:

„Cei mai înalţi munţi de pe glob sînt Himalaya, care se întind pe lungimea de 2 500 km şi lăţimea de 220 km. Vîrful cu cea mai mare înălţime este Everestul, de 8 848 m".

II.13. Transcrieţi textul următor folosind cifrele arabe pentru scrierea numerelor:

„Vechii locuitori ai Mesopotamiei, cu o mie de ani î.e.n., au alcătuit un calendar în care anul este împărţit în douăsprezece luni, luna în patru săptămîni şi săptămîna în şapte zile."

Răspuns: În transcriere arabă avem numerele: 1 000; 12; 4; 7.

II.14. Scrieţi cu cifre arabe numerele: douăzeci şi trei; doisprezece; zece mii; cinci sute; trei; patruzeci şi cinci de mii; o sută; şaisprezece; un milion; cinci sute mii; patruzeci şi şapte; două sute de mii; două sute.

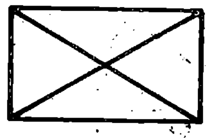
Răspuns: Numărul „douăzeci şi trei" se scrie în cifre arabe „23". La fel, obţinem numerele în scriere arabă:
12; 10 000; 500; 3; 45 000; 100; 16; 1 000 000; 500 000; 47; 200 000; 200.

II.15. Scrieţi cu litere numerele:
21; 58; 100; 436; 1 036; 50 550; 37 037 007; 12; 30 787 562.
Răspuns: „21" se scrie în litere „douăzeci şi unu", etc.

II.16. Scrieţi cu cifre arabe următoarele numere scrise cu cifre romane:
II; VI; IX; XVII; XXXV; XLIV; C; CXL; XC; CIV; MC.
Răspuns: Numărul II se scrie cu cifre arabe: 2. Analog, VI se scrie: 6. Obţinem, în continuare, numerele: 9; 17; 35; 44; 100; 140; 90; 104; 1 100.

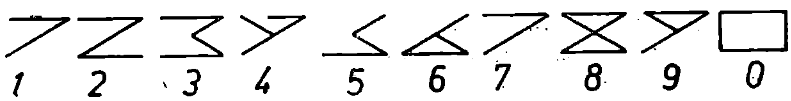
II.17. Scrieţi cu cifre romane următoarele numere scrise cu cifre arabe: 7; 11; 8; 24; 909; 519; 1 050; 1 944.
Răspuns: Numărul 7 se scrie cu cifre romane VII, etc.

II.18. Amuzaţi-vă!



Legenda spune că cifrele arabe au fost folosite întîia oară de regele SOLOMON, care avea un inel cu piatra preţioasă tăiată ca în desenul alăturat.

Urmărind adînciturile făcute de şlefuitor în diferite feluri, obţinem formele cifrelor arabe care, de-a lungul timpului, s-au rotunjit:



II.19. Scrieţi numerele naturale mai mici decît 1 000 care au cifrele elemente ale mulţimilor:
a) $A = \{0, 5, 7\}$;
b) $B = \{1, 2, 3\}$.
Răspuns: Obţinem numerele:
a) 0; 5; 7; 57; 50; 570, 507; 75; 70; 750; 705.
b) 1; 2; 3; 12; 21; 13; 31; 23; 32; 123; 132; 231; 213, 312; 321.

II.20. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre care se poate scrie cu cifrele 0, 5, 9 (luate o singură dată)? Dar cel mai mic?
Răspuns: Cel mai mare este 950, iar cel mai mic 509.

II.21. Care este cel mai mare număr natural de 4 cifre? Dar cel mai mic?
Răspuns: Cel mai mare este 9 999 şi cel mai mic este 1 000.

II.22. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre astfel încît una singură din cifrele sale să fie 7? Dar cel mai mic?
Răspuns: Numerele sînt 997 şi 107.

II.23. Scrieţi numere de trei cifre astfel ca două dintre cifrele lor să fie 5 şi 6.
Răspuns: Astfel de numere sînt 156; 516; 615, etc.

II.24. Care este numărul cel mai mic scris cu cifre care se repetă?

Răspuns: Numărul căutat este 11.

II.25. Care este numărul cel mai mare de 5 cifre, în care cifrele nu se repetă? Dar cel mai mic?

Răspuns: Numerele căutate sînt 98 765; 10 234.

II.26. De cîte ori apare cifra 3 în șirul numerelor de la 20 la 40? Dar 5, dar 7?

Răspuns: Pentru cifra 3 avem numerele: 23; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39, deci cifra 3 se repetă de 12 ori. În mod asemănător judecăm și pentru cifrele 5 și 7.

II.27. Să se afle cel mai mic număr natural de cinci cifre care îndeplinește următoarele condiții:

a) nu are cifre care să se repete;

b) este mai mare decît 20 000;

c) are suma numerelor reprezentate de cifrele sale egală cu 20.

(I. C. Ligor, G. M., 8/1984)

Răspuns: Din prima condiție și a doua rezultă sigur că două cifre ale numărului sînt 2 și 0. Deci din celelalte cifre: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 trebuie să adăugăm trei, care împreună cu numerele reprezentate de primele două să dea o sumă egală cu 20. Acestea sînt 1, 8, 9. Deci numărul este: 20 189.

II.28[p.o.]**.** Să se găsească șase numere naturale diferite de cîte două cifre, știind că toate afirmațiile care urmează sînt adevărate:

a) două dintre ele au cifra zecilor 2;

b) trei dintre ele au cifra zecilor 3;

c) unul dintre ele are cifra zecilor 4;

d) două dintre ele au cifra unităților 6;

e) trei dintre ele au cifra unităților 7;

f) unul are cifra unităților 8.

Răspuns: Să notăm numerele prin $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$, $\overline{gh}$, $\overline{ij}$, $\overline{kl}$. Putem presupune că $a = 2$, $c = 2$, $e = 3$, $g = 3$, $i = 3$, $k = 4$.

Cifra 6 poate fi plasată ca cifră a unităților în trei feluri, și anume:

1) 26, $\overline{2d}$, 36, $\overline{3h}$, $\overline{3j}$, $\overline{4l}$;

2) $\overline{2b}$, $\overline{2d}$, 36, $\overline{3h}$, $\overline{3j}$, 46;

3) 26, $\overline{2d}$, $\overline{3f}$, $\overline{3h}$, $\overline{3j}$, 46.

Am ținut seama, de pildă, că cifra 6 nu poate fi plasată, în cazul lui 1), și pe locul lui b și pe locul lui d, căci am fi obținut două numere egale, dar din enunțul problemei numerele sînt diferite.

În cazul 1), cifra 7 nu poate fi plasată deodată pe locurile lui h și j, căci am obține două numere egale.

Deci în grupul de numere $\overline{3h}$, $\overline{3j}$, cifra 7 poate fi plasată pe locul unităților cel mult o dată. Au rămas libere locurile d și l și cum avem la dispoziție trei cifre 7, rămîne că $d = 7$, $l = 7$ și, de exemplu, $h = 7$ și atunci $j = 8$.

Obținem, astfel, numerele 26, 27, 36, 37, 38, 47.

Pentru cazul 2), neapărat într-unul din grupurile $\overline{2b}$, $\overline{2d}$ și respectiv $\overline{3h}$, $\overline{3j}$ trebuie plasați doi de 7 pe locul unităților dar, în acest caz, obținem două numere egale. În acest caz nu avem, așadar, soluție.

La fel se întîmplă pentru cazul 3) unde în grupul $\overline{3f}$, $\overline{3h}$, $\overline{3j}$ trebuie să distribuim pe locul cifrelor neapărat doi de 7.

Rămîne singura soluție cea de la cazul 1).

II.29. Citiți cifra zecilor, a sutelor de mii, a miilor, a unităților simple din numerele : 1 370 ; 4 385 ; 800 450 ; 1 303 ; 9 978 005.

II.30. Scrieți numerele care urmează, ca o sumă de doi termeni, primul format numai din zeci și celălalt numai din unități :

17 ; 21 ; 96 ; 67 ; 57 ; 43 ; 69 ; 44.

Răspuns : Au loc scrierile :

$17 = 10 + 7$; $21 = 20 + 1$; $96 = 90 + 6$; $67 = 60 + 7$; $57 = 50 + 7$;
$43 = 40 + 3$; $69 = 60 + 9$; $44 = 40 + 4$.

II.31. Scrieți numerele naturale :

a) de la 0 pînă la 25 ; b) de la 487 pînă la 507 ; c) de la 96 pînă la 110 ; d) de la 996 pînă la 1 005 ; e) de la 99 995 pînă la 100 007 ; f) de la 9 991 pînă la 10 004.

Răspuns : a) 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; . . . ; 23 ; 24 ; 25 ; etc.

II.32. Scrieți numerele naturale :

a) de la 17 pînă la 0 ; b) de la 116 pînă la 97 ; c) de la 78 pînă la 27 ; d) de la 508 pînă la 487 ; e) de la 10 008 pînă la 9 987 ; f) de la 1 000 007 pînă la 999 987.

Răspuns: a) 17; 16; 15; . . . ; 3; 2; 1; 0, etc.

II.33. Scrieți numerele pare din intervalele :

a) de la 99 pînă la 45 ; b) de la 220 pînă la 247 ; c) de la 456 pînă la 560 ; d) de la 86 pînă la 45 ; e) de la 9 996 pînă la 10 005 ; f) de la 30 000 pînă la 30 030.

Răspuns: a) Pentru intervalul de la 99 pînă la 45 avem : 98 ; 96 ; 94 ; 92 ; 90 ; 88 ; 86 ; . . . ; 50 ; 48 ; 46 ; etc.

II.34. Scrieți numerele impare din intervalele :

a) de la 12 pînă la 38 ; b) de la 997 pînă la 967 ; c) de la 78 pînă la 99 ; d) de la 10 000 pînă la 9 987 ; e) de la 100 pînă la 67 ; f de la 80 000 pînă la 79 967.

Răspuns : a) Pentru intervalul de la 12 pînă la 38 avem : 13 ; 15 ; 17 ; . . . ; 33 ; 35 ; 37 ; etc.

II.35. Numărați și apoi scrieți numerele din 2 în 2, din 5 în 5, din 4 în 4, din 10 în 10, de la 10 pînă la 100.

Răspuns: Pentru numerele din 2 în 2 avem :

10, 12, 14, 16, . . . , 96, 98, 100.

II.36. Scrieți numerele mai mici și apoi pe cele mai mari cu o unitate decît : 50 ; 29 ; 500 ; 780 ; 80 000 ; 370 999.

Răspuns : Numărul mai mic cu o unitate decît 50 este $50 - 1 = 49$, iar cel mai mare cu o unitate decît el este $50 + 1 = 51$. Analog pentru celelalte numere.

II.37[M1]. Observați o regulă de formare și continuați scrierea șirurilor de numere :

a) 12, 14, 16, . . ., 32 ;

b) 5, 10, 15, . . ., 45 ;

c) 5, 10, 20, 25, . . ., 65 ;

d) 5, 15, 20, 30, 35, . . ., 75 ;

e) 0, 10, 5, 15, 10, . . ., 30.

Răspuns : a) Se observă că diferența dintre două numere succesive este de două unități, deci numărul care urmează îl putem considera mai mare cu doi decît cel anterior. Numerele care lipsesc pot fi : 18 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26, 28 ; 30.

b) Putem completa cu numerele : 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40. Fiecare număr poate fi considerat ca mai mare cu cinci unități decît cel care-l precede.

c) Numerele lipsă pot fi : 35 ; 40 ; 50 ; 55. Numerele care lipsesc pot fi considerate mai mari cu 10 unități, respectiv cu 5 unități decît cele care le preced.

d) Numerele care urmează pot fi considerate mai mari, alternativ, cu 5 sau cu 10 unități. Deci lipsesc numerele : 45 ; 50 ; 60 ; 65.

e) O regulă este de a găsi alternativ numărul mai mare cu 10 decît cel care-l precede, apoi mai mic cu 5 unități. Numerele sînt, în acest caz : 20 ; 15 ; 25 ; 20.

II.38. Continuați șirurile :

a) 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 4 ; 1 . . .

b) 1 ; 5 ; 2 ; 10 ; 3 ; 15 . . .

c) 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 12 ; 17 . . .

d) 8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 16 ; 17 . . .

cît doriți, căutînd o continuare logică.

Răspuns : a) Numărul 1 se observă că este alternat cu numere din șirul numerelor naturale. Pot urma, deci :

5 ; 1 ; 6 ; 1 ; 7 ; 1 ; etc.

b) Șirul acesta este o alternare între numărarea din cinci în cinci și numerele din șirul numerelor naturale; deci pot urma :

4 ; 20 ; 5 ; 25 ; 6 ; 30 ; etc.

c) O regulă de înșiruire a acestor numere este de a găsi numărul mai mare decît cel care-l precede cu 1, 2, 3, 4, 5, etc. unități. Urmează : 23 ; 30 ; 38 ; 47 ; etc.

d) Observăm că în șirul acesta alternează un număr mai mare cu o unitate, cu un număr mai mare cu 3 unități. Astfel, numerele care urmează pot fi : 20 ; 21 ; 24 ; 25 ; 28 ; 29 ; etc.

Observație. O altă continuare la șirul a) ar fi : 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 4 ; 1 ; 6 ; 1 ; 10 ; 1 ; . . . în care la 2 se adaugă, succesiv, 1, 2, 4, 8, 16 etc.

II.39^{M_4}. Completați cu numere naturale corespunzătoare, păstrînd în fiecare caz procedeul de enumerare stabilit pentru numerele scrise:

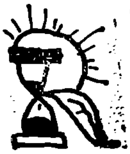
a) 8; 16; 24; ...; 96;

b) 10; 20; ...; 200;

c) 90; 87; ...; 3;

d) 100; 96; 92; ...; 4;

e) 120; 110; ...; 10.



ăspuns: a) Numărînd oral din 8 în 8 vom observa că putem stabili o regulă de înșiruire în sensul de a găsi un număr mai mare cu 8 unități decît cel aflat înaintea sa. Numerele ce urmează, în acest caz, sînt: 32; 40; 48; etc.

b) Numerele pot fi: 30; 40; 50; 60 etc.

c) Putem stabili o continuare găsind numărul cu 3 unități mai mic decît predecesorul, deci numerele pot fi:

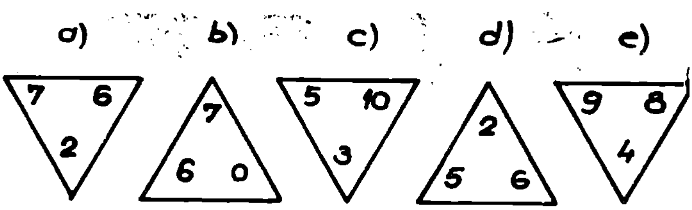
84; 81; 78; 75; 72; 69; etc.

d) Fiecare număr este mai mic cu patru unități decît cel care-l precede. Numerele care urmează pot fi: 88; 84; 80; 76, etc.

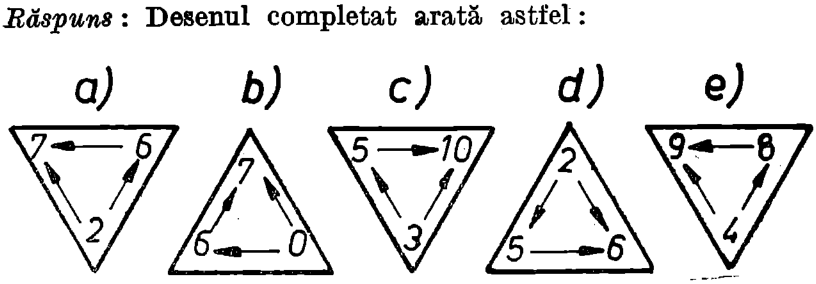
e) Putem considera enumerarea din 10 în 10 în ordine descrescătoare, deci numerele pot fi: 100; 90; 80; 70; 60; 50; 40; 30; 20; 10.

Observație. După cum am văzut în exercițiul precedent, putem considera și alte moduri de succesiune. Cititorul este sfătuit să găsească cîteva astfel de continuări logice.

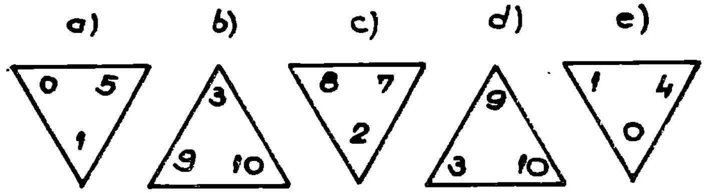
II.40^{M_1}. Copiați fiecare grup de numere și apoi trasați săgeți de la cele mai mici la cele mai mari.



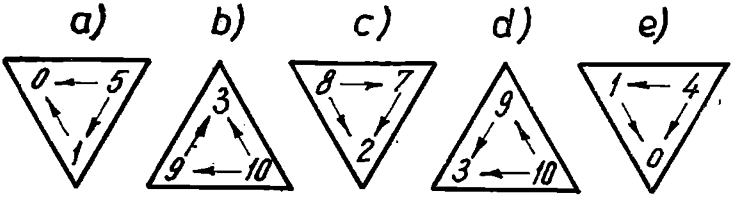
Răspuns: Desenul completat arată astfel:



II.41^{M_1}. Copiați fiecare grup de numere și apoi trasați săgeți de la numerele mai mari, spre numerele mai mici:



Răspuns: Desenul completat arată astfel:



II.42. Copiați perechile de numere:

5 și 25	32 și 42	35 și 45
90 și 90	22 și 24	84 și 84
3 și 2	56 și 86	1098 și 888
99 și 99	100 și 100	136 și 174

și scrieți care sînt mai mari, care sînt mai mici, care sînt egale.

Răspuns: Avem $5 < 25$; $90 = 90$; $3 > 2$; $99 = 99$, etc.

II.43. Verificați dacă semnele $<$, $>$, $=$ sînt puse corect și unde este cazul înlocuiți cu semnul potrivit:

$$225 < 224 \qquad 999 < 989$$

$$378 > 378 \qquad 1005 = 1015$$

Răspuns: În inegalitatea $225 < 224$ semnul nu este pus corect. Trebuie să scriem $225 > 224$. La fel, $378 = 378$, $999 > 989$, $1\,005 < < 1\,015$.

II.44^{M_1}. Despre mulțimile A și B sînt adevărate afirmațiile 1°), 2°) și 3°) de mai jos:

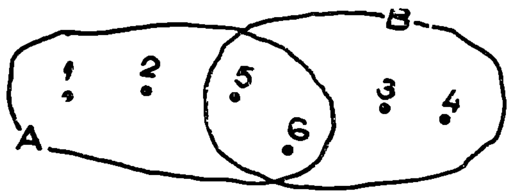
1°). Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B are ca elemente numerele 1 și 2;

2°). Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A are ca elemente numerele 3 și 4;

3°). Reuniunea dintre cele două mulțimi are ca elemente numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Găsiți elementele fiecărei mulțimi A și B (Indicație : Se poate folosi reprezentarea mulțimilor prin linii curbe închise și a elementelor lor prin puncte așezate în zona potrivită).

Răspuns : Din condițiile 1°), 2°), 3°) rezultă că cele două mulțimi A și B au unele elemente comune. Avem desenul :



Reprezentăm întîi mulțimile diferență $A - B$ și $B - A$. Reținînd elementele mulțimii—reuniune rezultă că 5, 6 sînt elemente comune celor două mulțimi. Deci :

$$A = \{1, 2, 5, 6\}; \ B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

II.45. Ce semnificație putem da numărului 1 000 000 000?

1) 1 000 000 000 de zaruri mici s-ar înșirui pe lungimea de 5 000 km, distanța București — Paris, dus—întors;

2) Acum 1 000 000 000 de secunde, persoanele care au azi 31 de ani nu se născuseră încă;

3) Dacă un casier ar achita în numerar suma de un miliard de lei plătind cîte 1 leu pe secundă timp de 8 ore pe zi și lucrînd cîte 365 de zile pe an, ar avea nevoie de 115 ani.

Dați alte exemple!

II.46. Scrieți toate numerele de la 0 la 100, care au numărul reprezentat de cifra zecilor egal cu dublul numărului reprezentat de cifra unităților.

Răspuns : Numerele căutate sînt : 21 ; 42 ; 63 ; 84.

II.47. Mă gîndesc la un număr par mai mare decît 50, mai mic decît 80, cu cifra zecilor aceeași cu cea a unităților. Care este numărul?

Răspuns : Numărul căutat este 66.

II.48. Căutați numere de patru cifre cuprinse între 7 000 și 8 000, terminate în două zerouri și suma tuturor cifrelor egală cu 15.

Răspuns : Există un singur astfel de număr : 7800.

II.49. Căutați numărul mai mare decît 20, mai mic decît 40, cu cifra unităților 2, iar numărul care este reprezentat de cifra zecilor mai mare decît numărul care este reprezentat de cifra unităților.

Răspuns : Există un singur astfel de număr : 32.

II.50. Căutați numere mai mari decît 200, mai mici decît 230, cu suma numerelor reprezentate de cifrele lor egală cu 7.

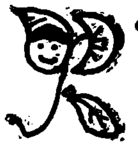
Răspuns : Numerele căutate sînt : 205 ; 214 ; 223.

4 — c. 850

II.51^{M_3}. În ce situaţie se află una faţă de cealaltă mulţimile A şi B dacă : a) A este mulţimea formată din numerele naturale cuprinse între 3 şi 8, iar B este mulţimea formată din numerele naturale cel mult egale cu 6?

b) A este mulţimea formată din numerele naturale mai mari decît 4 dar mai mici decît 7, iar B este mulţimea formată din numerele naturale mai mici decît 9?

De fiecare dată, dacă mulţimile au elemente comune, indicaţi-le.


ăspuns : a) Avem $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mulţimea A are unele elemente comune cu mulţimea B, anume $4 \in A$ şi $4 \in B$; $5 \in A$ şi $5 \in B$; $6 \in A$ şi $6 \in B$; $7 \in A$ şi $7 \in B$ deci A intersectată cu B este mulţimea $\{4, 5, 6\}$.

b) Avem $A = \{5, 6\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Mulţimea A este inclusă în mulţimea B pentru că $5 \in A$ şi $5 \in B$; $6 \in A$ şi $6 \in B$.

II.52^{M_3}. În ce situaţie se află una faţă de cealaltă mulţimile E şi F dacă :

a) E este mulţimea numerelor naturale cuprinse între 277 şi 280, iar F este mulţimea numerelor naturale cuprinse între 280 şi 284?

b) E este mulţimea numerelor naturale care nu sînt mai mici decît 408, dar nici mai mari decît 410, iar F este mulţimea numerelor naturale cel puţin egale cu 407 şi cel mult egale cu 410?


ăspuns : a) Avem $E = \{278, 279\}$ şi $F = \{281, 282, 283\}$. Mulţimile E şi F sînt disjuncte : $278 \in E$ şi $278 \notin F$; $279 \in E$ şi $279 \notin F$.

b) Avem $E = \{408; 409, 410\}$; $F = \{407, 408, 409, 410\}$. Cum $408 \in E$ şi $408 \in F$; $409 \in E$ şi $409 \in F$; $410 \in E$ şi $410 \in F$ rezultă că mulţimea E este inclusă în mulţimea F.

II.53. Să se determine cel mai mare număr de patru cifre $\overline{abcd}$ cu proprietatea că : c şi d sînt pare, a patra a este impară, b este cu 2 mai mică decît d.

Răspuns : Fie $N = \overline{abcd}$, numărul căutat. Avem $c = 8$, $d = 8$ şi $a = 9$, iar $b = 8 - 2 = 6$, deci $N = 9688$.

II.54. Să se determine cel mai mic număr de patru cifre $N = \overline{abcd}$ care îndeplineşte simultan condiţiile :

a) numărul format din cifrele b şi c micşorat cu numărul format din aceleaşi cifre scrise în ordine inversă este egal cu 9 ;

b) produsul cifrelor numărului N este egal cu 16.

(Andreea Malvina—Maftei; G.M. 6, 4—5/1984)


ăspuns : Fie $N = \overline{abcd}$, numărul căutat. Avem :

$$\begin{array}{r} \overline{bc} - \\ \overline{cb} \\ \hline 9 \end{array}$$

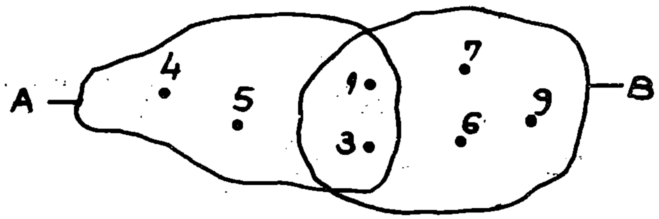
şi $a \times b \times c \times d = 16$, deci trebuie să căutăm numere reprezentate numai

de cifre al căror produs să fie 16. Acestea sînt 1, 2, 2, 4 pentru că $1\times2\times2\times\times4=16$ sau 1, 1, 2, 8 pentru că $1\times1\times2\times8=16$. Ordinea cifrelor se stabileşte îndeplinînd condiţia a) şi pe cea din enunţ, deci numărul este 1 218 pentru că $21-12=9$ şi pentru că acest număr este cel mai mic din cele posibil a fi formate îndeplinind condiţiile a) şi b). Numerele posibile erau: 1 218; 2 214; 4 212; 8 211, deci 1 218 este cel mai mic.

II.55[M]. Să se determine mulţimile A şi B care verifică simultan următoarele patru condiţii:

a) $A \cap B=\{1, 3\}$; b) $A-B=\{4, 5\}$; c) $B-A=\{6, 7, 9\}$; d) $A \cup B=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$,

Răspuns: Avem $A=\{1, 3, 4, 5\}$; $B=\{1, 3, 6, 7, 9\}$ pentru că, reprezentînd prin puncte elementele mulţimilor A şi B, avem figura:



II.56[M]. Folosind de fiecare dată toate cifrele 1, 3, 5, 8 şi 9, cîte o singură dată, scrieţi dintre numerele de 5 cifre:

a) cel mai mic număr posibil; b) cel mai mare număr posibil; de asemenea toate numerele N formate din 7 cifre care conţin pe primele cinci poziţii, fiecare, toate aceste cifre, cîte o singură dată, cu ultimele două cifre 98.

Răspuns: Avem: a) 13 589; b) 98 531; $N=\overline{abcde98}$ deci avem numerele 1 358 998; 3 158 998; etc.

II.57. Numerele telefoanelor din Bucureşti încep cu numărul 100 000 şi ultimul este 999 999. Se cere:

1) La cîte telefoane numărul poate începe cu 1984?

2) La cîte telefoane numărul se poate termina cu 1984?

3) La cîte telefoane numărul este de forma $\overline{x1984y}$?

4) Cîte numere de şase cifre încep cu 421 şi se termină cu 1984? Dar dacă încep cu 1984 şi se termină cu 421?

(C. Ionescu–Ţiu, G.M., 8/1984)

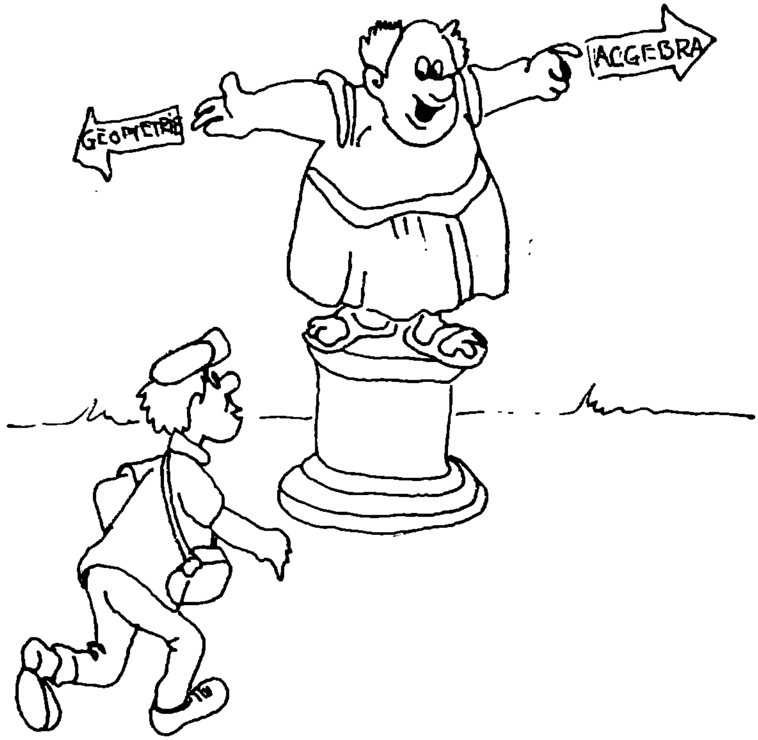
Răspuns: 1) Numerele care încep cu 1 984 se pot termina cu 00, 01, 02, 03, ..., 99, adică sînt $1+99=100$ numere de forma $\overline{1984xy}$.

2) Numerele care se termină cu 1984 pot începe cu 10, 11, 12, 13, ..., 99 adică $100-9=91$ numere de forma $\overline{xy1984}$.

3) Numerele de forma $\overline{x1984y}$ pot începe cu 1, 2, 3 . . ., 9 deci sînt 9 cazuri, iar în fiecare caz numerele se pot termina cu unul din numerele 0, 1, 2, 3, 4, . . ., 9 adică 10 variante. În total pot fi $9 \cdot 10 = 90$ numere de forma $\overline{x1984y}$.

4) Avem un singur caz cînd începe cu 421 și se termină cu 1984, anume numărul 421 984.

De asemenea, un singur număr de 6 cifre poate începe cu 1 984 și se termină cu 421, acesta fiind numărul 198 421.



OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

1. Începuturile aritmeticii

Începuturile aritmeticii, ale calculului elementar cu numere se pierd în negura vremurilor. Vestigii datînd din paleolitic ne arată că omul primitiv dispunea de cîteva elemente ale calculului aritmetic, de o serie de semne desemnînd numere și operații cu ele. Egiptenii, mai tîrziu, dispuneau de semne pentru numere mari, dar nu operau cu zero, lăsînd în locul lui spații albe. În ceea ce privește operațiile aritmetice, acestea se reduc la adunare, scăderea făcîndu-se prin compensație, înmulțirea prin dublări și adunări succesive, împărțirea se deducea din înmulțire, efectuîndu-se în sens invers, luîndu-se multiplii prin doi ai înmulțitorului și se aduna pînă se realiza deînmulțitul. Fracțiile aveau, cu excepția lui $\frac{2}{3}$, numărătorul egal cu 1. Mai tîrziu, aritmetica egipteană va opera cu noțiuni privitoare la împărțirea în părți proporționale, ridicarea la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate, progresiile aritmetică și geometrică.

Aritmetica babiloniană adîncește aceste cuceriri—frivole dar importante pentru direcțiile de dezvoltare ale aritmeticii de mai tîrziu —, realizînd scrierea pozițională, baza de numerație fiind sexagesimală. Drept mărturie a gradului de evoluție al babilonienilor stau o serie de tabele numerice în care găsim rezultatele înmulțirilor, pătrate și cuburi de numere, rădăcini pătrate sau cubice precum și aproximațiile lui $\sqrt{2}$ sau relații exponențiale sau logaritmice.

Matematica elenă ne-a lăsat, printre altele, drept moștenire, prin PITAGORA, numerele iraționale. Tot în această epocă sînt introduse *numerele figurative* ca modele geometrice ale numerelor naturale, apoi numerele *liniare*, *plane* sau *solide*, după cum sînt figurate rectiliniu, în rînduri, formînd figuri plane sau paralelipipedice, piramidale etc.

Dintre numele mari ale Antichității, nume nepieritoare care au edificat fundamentul matematicii existente astăzi, se cuvine să-i cităm pe EUCLID cu *Elementele* sale, pe DIOFANT, analist profund și original al ecuațiilor așa-zise diofantice, pe arabul AL-HOREZMI, autorul primului manual de aritmetică cunoscut de istoria științei ș.a.m.d.

Capitolul III, împărţit în cinci secţiuni, constituie fundamentul lucrării de faţă, destinată elevilor claselor I—IV şi învăţătorilor lor. În adevăr, prin mijlocirea unei game impresionante de exerciţii şi probleme, aici sînt introduse operaţiile elementare cu numere naturale, aşa cum le cunoaştem noi astăzi, pornind de la adunare şi ajungînd la ordinea efectuării operaţiilor. Exerciţiile **III.A.1.—III.A.4., III.B.1.—III.B.2., III.C.1.—III.C.3., III.D.1.—III.D.8.** sînt pregătitoare, rezolvarea lor necesitînd stăpînirea algoritmilor elementari de calcul cu numere naturale.

Exerciţiul **III.A.6.** constituie un salt calitativ în însuşirea tehnicilor de operare cu numere, conducînd la noţiunea de *ecuaţie*. Exerciţiile **III.A.9.** şi **III.A.10.** subliniază o idee profundă, cu implicaţii extrem de importante pentru mai tîrziu, aceea de *comutativitate* şi *asociativitate* a adunării. Exerciţiul **III.A.11** solicită rezolvitorului un nou tip de raţionament, raţionamentul combinatoriu, precum şi o serie de reflecţii deduse din observaţia imediată că, de pildă, în suma $1 + 2 + \ldots + 8 + 9$, suma dintre primul şi ultimul termen, dintre al doilea şi penultimul etc. este aceeaşi.

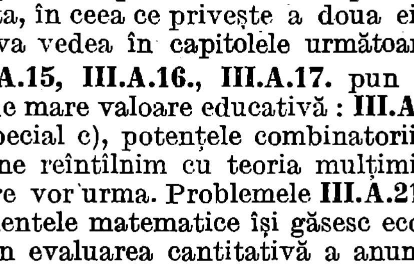
Problema **III.A.12.** subliniază proprietăţi legate de divizibilitate ale numerelor naturale care se pot împărţi în pare şi impare după cum restul împărţirii lor la 2 este 0 sau 1. Atît exerciţiul **III.A.11.** cît şi **III.A.12.** sînt susceptibile a fi *generalizate*, extinzînd sumele la primele n numere naturale, respectiv la primele n numere pare sau impare. Problema **III.A.12.** poate căpăta, în ceea ce priveşte a doua ei cerinţă, şi o soluţie geometrică, cum se va vedea în capitolele următoare.

Exerciţiile **III.A.15, III.A.16., III.A.17.** pun în faţă rezolvitorului o suită de jocuri de mare valoare educativă : **III.A.15.** solicită discernămînt, **III.A.16.**, în special c), potenţele combinatorii.

Prin **III.A.19.** ne reîntîlnim cu teoria mulţimilor, omniprezentă în variatele exerciţii care vor urma. Problemele **III.A.21—III.A.56** subliniază modul cum raţionamentele matematice îşi găsesc ecou în rezolvarea unor necesităţi practice, în evaluarea cantitativă a anumitor situaţii. Exerciţiul **III.A.58.** introduce literele în calculele aritmetice, pas important în procesul de abstractizare a gîndirii matematice.

Exerciţiile **III.B.3., III.B.4.** conduc la o altă noţiune fecundă : *ordinea*. **III.B.5., III.B.6., III.B.7., III.B.11.** ne readuc, prin alte exemple, în faţă ecuaţiile. **III.B.16** subliniază cu pregnanţă ideea de *individualitate* a unor obiecte matematice, în raport cu cerinţe impuse.

În rezumat, capitolul se prezintă ca un tot unitar, indispensabil în ansamblul lucrării.



III.A. Adunarea numerelor naturale

III.A.1. Aflaţi răspunsul şi verificaţi:

2 + 3	1 + 2	2 + 13	30 + 7	50 + 23	16 + 12
6 + 1	4 + 3	56 + 3	50 + 20	60 + 14	62 + 23
3 + 5	5 + 3	2 + 17	70 + 20	83 + 10	42 + 5
0 + 6	8 + 1	26 + 2	3 + 70	30 + 56	36 + 42

Răspuns: Avem 2 + 3 = 5. Probă: 3 + 2 = 5 deci rezultatul corect este: 5. În continuare: 6 + 1 = 7, 3 + 5 = 8, 0 + 6 = 6, 1 + 2 = 3, 4 + 3 = 7, 5 + 3 = 8, 8 + 1 = 9, 2 + 13 = 15, 56 + 3 = 59, 2 + +17 = 19, 26 + 2 = 28, 30 + 7 = 37, 50 + 20 = 70, 70 + + 20 = 90, 3 + 70 = 73, 50 + 23 = 73, 60 + 14 = 74, 83 + 10 = 93, 30 + 56 = 86, 16 + 12 = 28, 62 + 23 = 85, 42 + 5 = 47, 36 + 42 = 78

III.A.2. Adunaţi numerele:

201 şi 507	345 şi 1 002	27 935 şi 5 987	3 785 şi 299
544 şi 302	327 şi 10 005	3 836 şi 9 379	375 şi 397
309 şi 483	1 987 şi 3 085	97 937 şi 2 379	456 şi 179

Răspuns: Avem: 201 + 507 = 708; 544 + 302 = 846; 309 + +483 = 792; 345 + 1 002 = 1 347; 327 + 10 005 = 10 332; 1 987 + 3 085 = 5 072; 27 935 + 5 987 = 33 922; 3 836 + + 9 379 = 13 215; 97 937 + 2 379 = 100 316; 3 785 + 299 = = 4 084; 375 + 397 = 772; 456 + 179 = 635.

III.A.3. Găsiţi numerele mai mari decît 13; 14; 28; 946 cu respectiv 397; 987; 1 878.

Răspuns: Avem:

13 + 397 = 410;	14 + 397 = 411;
13 + 987 = 1 000;	14 + 987 = 1 001;
13 + 1 878 = 1 891;	14 + 1 878 = 1 892;
28 + 397 = 425;	946 + 397 = 1 343;
28 + 987 = 1 015;	946 + 987 = 1 933;
28 + 1 878 = 1 906;	946 + 1 878 = 2 824.

III.A.4. Calculaţi suma numerelor: 2 345 şi 3 786; 4 589 şi 432; 378 şi 1 003.

Răspuns: Avem: 2 345 + 3 786 = 6 131; 4 589 + 432 = 5 021; 378 + 1 003 = 1 381.

III.A.5. Observaţi regula de înşiruire a sumelor şi continuaţi:

0 + 10	0 + 9	0 + 8	0 + 7	0 + 6	0 + 5
1 + 9	1 + 8	1 + 7	1 + 6	1 + 5	1 + 4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Răspuns: Pe prima coloană suma fiecărei perechi de numere este egală cu 10, pe a doua este egală cu 9 etc. Deci prima coloană poate fi continuată cu sumele $2 + 8$; $3 + 7$ etc. Analog judecăm pentru celelalte coloane.

III.A.6. La numerele 3; 5; 12; 14; 11 și 2 adunați pe cele necesare pentru a obține numărul 20, apoi la aceleași numere adunați-le pe cele cu care puteți obține numerele 16 și 19.

Răspuns: Avem: $3 + 17 = 20$ deci la numărul 3 trebuie adăugat numărul 17.
Cum $5 + 15 = 20$, rezultă că la numărul 5 trebuie adunat 15. La numerele următoare trebuie adunate, respectiv, numerele 8, 6, 9, 18. Pentru a obține 16 trebuie adunate respectiv 13, 11, 4, 2, 5, 14, iar pentru a obține 19 trebuie adunate respectiv 16, 14, 7, 5, 8, 17.

III.A.7. Adunați:

13 084 cu 705 398;	367 058 și 90 076 cu 174 709;
9 807 cu 68 076;	407 709 și 85 904 cu 96 038;
706 685 cu 68 007;	80 906 și 68 709 cu 217 900.

Răspuns: Avem: $13\,084 + 705\,398 = 718\,482$;

$9\,807 + 68\,076 = 77\,883$; $706\,685 + 68\,007 = 774\,692$;

$367\,058 + 174\,709 = 541\,767$; $90\,076 + 174\,709 = 264\,785$;

$407\,709 + 96\,038 = 503\,747$; $85\,904 + 96\,038 = 181\,942$;

$80\,906 + 217\,900 = 298\,806$; $68\,709 + 217\,900 = 286\,609$.

III.A.8. Calculați, apoi faceți proba:

$7\,408\,675 + 9\,706 + 4\,078\,906\,487 + 809\,540$;

$487\,696 + 36\,085\,748 + 9\,068 + 246\,858\,049$;

$378\,674\,958 + 69\,076 + 45\,087\,069 + 4\,786\,608$.

Răspuns: Avem:

$7\,408\,675 + 9\,706 + 4\,078\,906\,487 + 809\,540 = 4\,087\,134\,408$;

$487\,696 + 36\,085\,748 + 9\,068 + 246\,858\,049 = 283\,440\,561$;

$378\,674\,958 + 69\,076 + 45\,087\,069 + 4\,786\,608 = 428\,617\,711$.

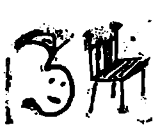
III.A.9. Calculați:

$$5\,899 + 2\,387 + 50\,765$$

$$867\,965 + 69\,876 + 95\,987\,069 + 487\,607$$

Schimbați ordinea așezării termenilor și calculați din nou suma. Ce observați?

Răspuns: Prima sumă este egală cu 59 042, iar a doua cu 97 412 517. Schimbînd ordinea termenilor, sumele rămîn la fel.



III.A.10. Calculați suma numerelor din fiecare coloană și spuneți ce ați observat. De ce?

4+	6+	9+	6+	4+
5	5	6	4	6
6	4	4	8	9
7	7	7	9	5
8	8	8	7	8
9	9	5	5	7
—	—	—	—	—

Răspuns: Suma numerelor este aceeași: 39. Am verificat, astfel, proprietatea de *comutativitate* a adunării.

III.A.11. Găsiți cel mai rapid procedeu de calcul al sumelor:

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$;

b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$;

c) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 46 + 47 + 48 + 49$;

d) $1 + 2 + 3 + \ldots + 97 + 98 + 99$;

e) $1 + 2 + 3 + \ldots + 997 + 998 + 999$.

Răspuns: a) Se observă că suma dintre primul termen și ultimul, al doilea termen și penultimul este 10. Obținem suma 45.

b) Suma este egală cu 190;

c) Suma este egală cu 1225;

d) Obținem suma 4 950;

e) Obținem suma 499 500.

III.A.12. Să se calculeze suma primelor 5 numere pare, apoi a primelor 5 impare.

Răspuns: Avem $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ și $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

III.A.13. Calculați sumele următoare și spuneți ce ați observat:

a) $325 + (425 + 188)$ și $(325 + 425) + 188$;

b) $428 + (356 + 158)$ și $(428 + 356) + 158$;

c) $4\,526 + (1\,058 + 1\,895)$ și $(4\,526 + 1\,058) + 1\,895$;

d) $6\,083 + (4\,596 + 33\,469)$ și $(6\,083 + 4\,596) + 33\,469$.

Răspuns: Sumele sînt, în fiecare caz, egale căci adunarea numerelor naturale este *asociativă*. Avem rezultatele: a) 938; b) 942; c) 7 479; d) 44 148.

III.A.14. Verificați dacă sînt adevărate scrierile:

a) $274 + 683 = 565 + 392$; b) $497 + 210 = 260 + 447$;

c) $583 + 262 = 491 + 354$; d) $383 + 566 = 665 + 294$.

Răspuns: Sînt adevărate a), b), c) și falsă d).

III.A.15. Alegeţi rezultatul corect :

12 + 6	16	18	20
3 + 106	109	136	139
379 + 125	504	405	450
895 + 785	1888	1780	1680

Răspuns : Rezultatele corecte sînt: 18, 109, 504, 1 680.

III.A.16. Completaţi pătrăţelele rămase libere în aşa fel încît, efectuînd adunarea numerelor de pe fiecare rînd şi coloană, să obţineţi suma 10.

a)

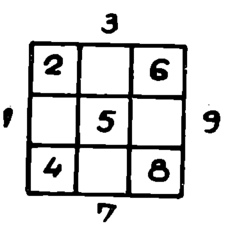
1	3	
3		3
	3	

b)

3		5
	3	4
4	5	

c)

2	7	
	2	5



III.A.17. În jocul care urmează se dau 9 pătrăţele şi se scriu numerele de la 1 la 9 pe trei rînduri în ordinea din figura alăturată.

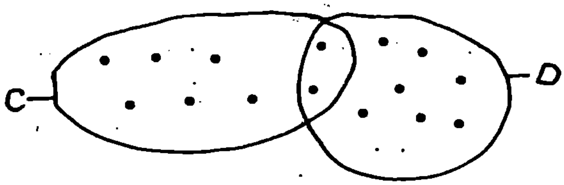
Se cere ca numerele care stau în afară să fie trecute în cuprinsul pătrăţelelor, însă tot în dreptul locului lor, dar în aşa fel ca pe fiecare rînd orizontal, vertical şi diagonal suma numerelor să fie egală cu 15.

III.A.18. Priviţi coloanele, apoi, fără să calculaţi, spuneţi cum sînt sumele celor două grupuri de numere :

1 2 3 4 5 6 7 8 9	1
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2 1
1 2 3 4 5 6 7 8	3 2 1
1 2 3 4 5 6 7	4 3 2 1
1 2 3 4 5 6	5 4 3 2 1
1 2 3 4 5	6 5 4 3 2 1
1 2 3 4	7 6 5 4 3 2 1
1 2 3	8 7 6 5 4 3 2 1
1 2	9 8 7 6 5 4 3 2 1
1	9 8 7 6 5 4 3 2 1

Răspuns : Sumele sînt egale.

III.A.19. Dorind să efectueze adunarea $8 + 9$, un copil își alege mulțimile model C și D ca în figura alăturată:



Numărînd elementele reuniunii lui C cu D el scrie rezultatul:

$$8 + 9 = 15.$$

Ce a greșit? Desenați corect figura pentru a găsi prin numărare suma cerută.

Răspuns: Mulțimile model nu sînt corect desenate. Pentru a avea rezolvarea corectă trebuie reprezentate ca două mulțimi disjuncte: $8+9=17$.

III.A.20. Înlocuiți semnele $*$ și Δ cu cifre potrivite pentru a obține rezultatele dorite:

a) $38 +$	b) $28 +$	c) $47 +$	d) $\Delta 7 +$	e) $3\Delta +$
$*1$	$*2$	$*6$	21	$*7$
59	80	83	$5*$	79

Răspuns: a) $*$ ocupă locul zecilor: $30 + ? = 50$; $30+20=50$; $*$ este 2.

Verificare: $38 + 21 = 59$; b) $* = 5$; c) $* = 3$; d) $* = 8$, $\Delta = 3$; e) $\Delta = 2$, $* = 4$.

III.A.21. Pentru o excursie organizată de O.N.T. pe Valea Prahovei s-au înscris 27 fete și 53 băieți.

Cîți copii s-au înscris în total?

Răspuns: S-au înscris pentru excursie 80 copii.

III.A.22. Din clasa a II-a E pleacă în tabără 12 școlărițe. Cu o zi înainte de plecare se hotărăsc să se alăture celorlalte încă 5 școlărițe.

Cîte școlărițe merg în tabără?

Răspuns: Pleacă în total 17 școlărițe.

III.A.23. Transportarea cantității de cereale recoltată de pe ogoarele C.A.P. a fost asigurată de 23 camioane. Datorită recoltei bogate trebuie folosit un număr de camioane cu 7 mai mare decît cel anterior.

Care este acel număr de camioane?

Răspuns: S-au folosit $23 + 7 = 30$ (camioane).

III.A.24. În grădina școlii s-au sădit 70 fire de panseluțe și cu 23 mai multe fire de petunii decît numărul firelor de panseluțe.

Cîte fire de plante s-au sădit în grădina școlii?

Răspuns: În total s-au sădit $70 + (70 + 23) = 163$ (fire de plante).

III.A.25. Pentru albumul ei, Violeta și-a pregătit 72 vederi de peste hotare și cu 10 mai multe vederi din țara sa decît numărul vederilor de peste hotare.

Cîte vederi are albumul Violetei?

Răspuns: Albumul are 72 + (72 + 10) = 154 (vederi).

III.A.26. În timpul vacanței de primăvară, Nicoleta a rezolvat 20 de probleme, iar sora ei Gabriela cu 35 de probleme mai multe decît ea.

Cîte probleme au rezolvat împreună cele două surori?

Răspuns: Cele două surori au rezolvat împreună 75 de probleme.

III.A.27. Mihai citește o carte în 3 zile: în prima zi, 97 pagini, a doua zi 60 pagini, iar a treia zi citește ultimele 75.

Cîte pagini are cartea?

Răspuns: Cartea are 97 + 60 + 75 = 232 (pagini).

III.A.28. În parcul orașului s-au plantat 20 arțari, 73 plopi și un număr de castani egal cu numărul arțarilor și al plopilor împreună.

Cîți copaci s-au plantat?

Răspuns: S-au plantat 20 + 73 + (20 + 73) = 186 (copaci.)

III.A.29. În biblioteca lui Albert sînt 25 volume de versuri și cu 7 mai multe volume de proză decît de versuri.

Cîte cărți are Albert în bibliotecă?

Răspuns: Albert are în biblioteca sa 25 + (25 + 7) = 57 (cărți).

III.A.30. Pentru a plăti un penar, Ioana a dat la casă o bancnotă de 10 lei, una de 25 lei și o monedă de 1 leu.

Care este costul penarului?

Răspuns: Costul penarului este 10 lei + 25 lei + 1 lei = 36 lei.

III.A.31. Pentru o bentiță, Cristina calculează că îi sînt necesari 40 cm de panglică, iar pentru o fundă o bucată cu 70 cm mai mare decît bucata pentru bentiță.

Cîți centimetri de panglică trebuie să cumpere Cristina?

Răspuns: Cristina trebuie să cumpere 40 cm+(40 cm+70cm)=150 cm (panglică).

III.A.32. Într-o cutie Veronica își păstrează cele 20 creioane negre, roșii și albastre.

Cîte creioane de fiecare culoare pot fi în cutie?

Răspuns: Se completează un tabel în care se reprezintă numărul de creioane de fiecare culoare:

creioane negre	creioane roșii	creioane albastre
1	2	17
1	3	16
⋮	⋮	⋮

III.A.33. Într-o damigeană de 15 litri se toarnă ulei din trei vase. Ce capacitate puteau avea vasele?

Răspuns : Pot avea 1 litru, 2 litri, 12 litri, sau 1 litru, 3 litri, 11litri, etc.

III.A.34. Din 10 baloane galbene, albe, verzi, Codruţ sparge din neatenţie 5. Ce culori puteau avea baloanele sparte şi ce culori au baloanele rămase?

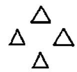
Răspuns : Puteau fi sparte 5 galbene, sau 5 albe, sau 5 verzi; 4 galbene şi unul alb; 3 galbene, unul alb şi unul verde; etc.

Numărul baloanelor rămase se stabileşte calculînd diferenţa dintre numărul total de baloane şi numărul celor care au fost sparte.

Exemplu: dacă din 10 baloane avînd culorile galbenă, albă şi verde s-au spart 5 galbene, au rămas 5 baloane de culorile albă şi verde.

III.A.35. Un cîrd de raţe trece rîul spre iarba verde de pe celălalt mal: una în frunte, trei în spatele ei, una încheie şirul, trei în faţa ei, două la mijloc.

Cîte raţe are cîrdul?



Răspuns : Cîrdul are 4 raţe.

III.A.36. Uliţa pe care locuiesc bunicii are 200 m lungime. Două uliţe vecine au lungimea cu 320 m mai mare fiecare decît uliţa pe care locuiesc bunicii.

Ce lungime are şanţul de scurgere a apei ce trebuie săpat de o parte şi de alta a acestor uliţe?

Rezolvaţi problema folosind numai operaţii de adunare.

Răspuns : Şanţul are 2480 m.

III.A.37. Un biciclist parcurge un drum în două ore. În prima oră merge 16 km, iar a doua oră cu 2 km mai mult decît în prima oră.

Care este lungimea drumului parcurs în cele două ore?

Răspuns : Lungimea drumului este 16 km+(16 km+2 km)=34 km.

III.A.38. Într-un autobuz folosit pentru transportul în comun s-au urcat 20 de oameni. La staţia următoare au coborît 5 şi au urcat 10.

Cîţi oameni au călătorit cu autobuzul?

Răspuns : Au călătorit 20 + 10 = 30 oameni; nu are importanţă cîţi au coborît.

III.A.39. La o staţie de maşini agricole se aflau 5 tractoare. Au venit de la arat 15, din care au rămas pentru reparaţii 5, iar 10 au plecat să termine arătura. Cîte tractoare are staţia de maşini agricole?

Răspuns : Staţia are 20 tractoare.

III.A.40. Dintr-o cisternă plină cu motorină s-au folosit 10 hl pentru alimentarea camionului dimineaţa şi cu 5 hl mai mult la prînz decît dimineaţa, după care cisterna s-a golit.

Care este capacitatea cisternei?

Răspuns : Capacitatea cisternei este 25 hl.

III.A.41. În vacanţa de vară, Cătălina a stat la bunici 3 săptămîni, apoi luna august la mare, la o mătuşă, şi 2 săptămîni la munte, într-o expediţie pionierească.

Cîte zile a stat departe de casă Cătălina?

Calculaţi numărul de zile cerut utilizînd numai operaţii de adunare.

Răspuns : Cătălina a lipsit de acasă 66 zile.

III.A.42. Veronica a economisit timp de trei luni bani la C.E.C. pentru o bicicletă.

În prima lună a depus 300 lei, în a doua cu 20 lei mai mult decît în prima lună, iar în a treia lună cu 100 lei mai mult decît în luna a II-a.

Cîţi lei a costat bicicleta?

Răspuns : Bicicleta a costat 1 040 lei.

III.A.43. La un magazin de confecţii s-au adus 200 rochiţe, cu 30 mai multe costume pentru băieţi decît rochiţe şi cu 70 mai multe cămăşi pentru bărbaţi decît costume pentru băieţi.

Cîte cămăşi pentru bărbaţi s-au adus?

Răspuns : S-au adus 300 cămăşi bărbăteşti.

III.A.44. Dintr-o expediţie pionierească elevii au adus 134 exemplare de plante, cu 23 mai mult insecte decît plante şi roci 30 de exemplare.

Cîte obiecte va avea vitrina cu trofee a expediţionarilor?

Răspuns: În vitrină vor exista 321 obiecte.

III.A.45. La un „Aprozar" s-au adus 235 kg de mere, cu 70 kg mai mult prune decît mere, gutui cu 30 kg mai mult decît mere, iar struguri cu 100 kg mai mult decît prune.

Ce cantitate de fructe s-a adus la „Aprozar"?

Răspuns : La „Aprozar" s-au adus 1 210 kg fructe.

III.A.46. Trei echipe de muncitori au asfaltat o stradă. Prima echipă a asfaltat 200 m^2, a doua cu 70 m^2 mai mult decît prima, iar a treia cu 5 m^2 mai mult decît a doua.

Ce arie are strada?

Răspuns : Aria străzii este de 745 m^2.

III.A.47. Un grup de elevi ai clasei a III-a a ajutat la aranjarea bibliotecii şcolii lor. Ei au aşezat într-un dulap 1 500 volume, în al doilea cu 300 volume mai mult decît în primul, iar în al treilea dulap cît în primele două dulapuri la un loc. Cîte volume are fondul bibliotecii?

Răspuns : În bibliotecă sînt 6 600 volume.

III.A.48. La o librărie s-au adus 480 de sticluţe cu cerneală, cu 20 mai multe stilouri, iar pixuri cu 800 mai mult decît sticluţele cu cerneală.

Cîţi copii ar putea lua obiectele dacă fiecare ar cumpăra cîte unul?

Răspuns : Obiectele ar putea fi cumpărate de 2 260 copii.

III.A.49. Într-o sală de proiecţie au luat loc două familii cu cîte 6 membri şi 3 familii cu cîte 2 membri.

Calculaţi numărul persoanelor din sala de proiecţie efectuînd numai operaţii de adunare.

Răspuns : În sală se aflau 18 persoane.

III.A.50. Pentru reparaţiile făcute localului unei şcoli s-au adus 2 saci cu cîte 50 kg humă, 3 saci cu cîte 25 kg ipsos şi 20 kg ciment.

Calculaţi, folosind numai operaţia de adunare, cîte kilograme a încărcat furgonetul care le-a transportat.

Răspuns : Furgonetul a încărcat 195 kg.

III.A.51. O fabrică de creioane a produs într-o zi 4 000 creioane colorate și obișnuite cu 7 000 mai multe decît creioane colorate.

Care este numărul total de creioane produs în acea zi?

Răspuns: Fabrica a produs 15 000 creioane.

III.A.52. Fabrica de încălțăminte „Antilopa" a produs în primul trimestru al anului 50 000 perechi de încălțăminte pentru femei, cu 30 000 mai multe perechi încălțăminte pentru bărbați decît numărul perechilor de încălțăminte pentru femei, iar pentru copii un număr egal cu cel al perechilor de încălțăminte pentru femei și bărbați împreună.

Cîte perechi de încălțăminte a produs fabrica „Antilopa" în primul trimestru al anului?

Răspuns: S-au produs 260 000 perechi de încălțăminte.

III.A.53. Orașul-stațiune Bușteni a primit în sezonul de iarnă 40 000 de vizitatori, Sinaia cu 13 700 mai mulți, iar Predealul cu 5 000 vizitatori mai mult decît Sinaia.

Cîți vizitatori au avut în sezonul de iarnă cele trei orașe?

Răspuns: În sezonul de iarnă, cele trei orașe au primit 152 400 vizitatori.

III.A.54. Trei uzine au realizat, prin folosirea judicioasă a materialului, economiile următoare: prima uzină în valoare de 2 007 056 lei, a doua uzină cu 7 385 lei mai mult decît prima, iar a treia cu 3 785 lei mai mult decît prima.

Ce economii au realizat în total cele trei uzine?

Răspuns: Cele trei fabrici au realizat economii în valoare de 6 032 338 lei.

III.A.55. Din producția zilnică a unei ferme avicole, 23 456 ouă s-au trimis la vînzare și cu 2 049 mai multe ouă decît cele trimise la vînzare au fost selecționate pentru incubatoare.

Care a fost producția zilnică a fermei?

Răspuns: Producția zilnică este de 48 961 ouă.

III.A.56. Patru silozuri pot cuprinde recolta anuală de grîu a unui C.A.P. Primul depozitează 1 000 000 kg de grîu, al doilea cu 30 700 kg mai mult decît primul, al treilea cu 70 000 kg mai mult decît al doilea, iar al patrulea cu 20 000 kg mai mult decît al treilea.

Care a fost producția de grîu a C.A.P.-ului?

Răspuns: Producția de grîu a fost de 4 252 100 kg.

III.A.57. Adunați toate numerele scrise numai cu:

a) cîte 3 cifre care se repetă;

b) cîte 5 cifre care se repetă.

Răspuns: Avem: a) $111 + 222 + \ldots + 999 = 4\,995$;

b). $11\,111 + 22\,222 + \ldots + 99\,999 = 499\,995$.

III.A.58. În locul literelor din căsuțe puneți numere astfel încît suma $a + d$ să fie egală cu suma $b + c$, adică 3.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline d & c \end{array}$$

Cîte soluții sînt?

Răspuns: Avem soluțiile: 0, 3; 3, 0; 1, 2; 2, 1. (patru soluții)

III.A.59. Completați spațiile libere:

$$
\begin{array}{ccccc}
2\square\square & + & \square\square & = & 2\square\square \\
+ & & + & & + \\
2\square\square & + & \square\square & = & 2\square\square \\
\hline
\square\square 2 & + & \square 2 & = & \square\square\square
\end{array}
$$

astfel ca operațiile aritmetice să se verifice.

Răspuns: Un exemplu de rezolvare a acestei scheme este:

$$
\begin{array}{ccccc}
222 & + & 22 & = & 244 \\
+ & & + & & + \\
220 & + & 20 & = & 240 \\
\hline
442 & + & 42 & = & 484
\end{array}
$$

Căutați și alte [illegible].

III.A.60. Folosind numai semnul adunării, scrieți numărul 30 cu ajutorul a șase cifre 2 și numărul 1 000 cu ajutorul a opt cifre 8.

Răspuns: Avem $22 + 2 + 2 + 2 + 2 = 30$ și $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1\,000$.

III.A.61. Cîte semne „+" trebuie puse între cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, în așa fel încît suma rezultată să fie 100? (Nu se admite schimbarea ordinii cifrelor).

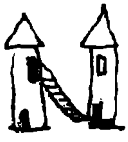
Răspuns: Avem $1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$. Deci trebuie puse patru semne „+".

III.A.62. Aflați cinci grupe de numere de cîte 3 termeni fiecare, a căror sumă să fie egală cu 682.

Răspuns: Avem, de exemplu, $600 + 80 + 2 = 682$; $600 + 81 + 1 = 682$, etc.

III.A.63. Ce număr trebuie să aibă pagina la care deschidem o carte pentru ca suma numerelor scrise pe fiecare pagină răsfoită pînă atunci să fie 190?

Răspuns: Paginile se numerotează 1; 2; 3; 4; ... deci trebuie să adunăm $1+2+3+4+5+6\ldots+19 = 190$. Deci pagina este cea cu numărul 19.



III. B. Scăderea numerelor naturale

III.B.1. Aflaţi răspunsul şi verificaţi:

9 — 6	8 — 5	90 — 20	326 — 238	1 037 — 326
3 — 3	6 — 5	30 — 30	456 — 236	99 075 — 987
6 — 4	8 — 8	85 — 26	437 — 245	4 000 — 3 079
5 — 4	3 — 2	37 — 13	136 — 136	113 665 — 39 887

Răspuns: Avem: 9 — 6 = 3; probă: 3 + 6 = 9 sau 9 — 3 = 6. În continuare:

3 — 3 = 0	8 — 5 = 3	90 — 20 = 70
6 — 4 = 2	6 — 5 = 1	30 — 30 = 0
5 — 4 = 1	8 — 8 = 0	85 — 26 = 59
	3 — 2 = 1	37 — 13 = 24

326 — 238 = 88	1 037 — 326 = 711
456 — 236 = 220	99 075 — 987 = 98 088
437 — 245 = 192	4 000 — 3 079 = 921
136 — 136 = 0	113 665 — 39 887 = 73 778

III.B.2. Calculaţi:

8 — 2 — 3	76 — 12 — 42	896 — 423 — 321
10 — 3 — 5	58 — 26 — 32	1 000 — 236 — 145
6 — 4 — 2	46 — 12 — 12	991 — 223 — 412
10 — 6 — 2	89 — 32 — 45	423 — 126 — 98
8 — 4 — 3	100 — 36 — 17	10 036 — 998 — 789

Răspuns: Avem:

8 — 2 — 3 = 6 — 3 = 3;	76 — 12 — 42 = 22;
10 — 3 — 5 = 7 — 5 = 2;	58 — 26 — 32 = 0;
6 — 4 — 2 = 0;	46 — 12 — 12 = 22;
10 — 6 — 2 = 2;	89 — 32 — 45 = 12;
8 — 4 — 3 = 1;	100 — 36 — 17 = 47;

896 — 423 — 321 = 152;	423 — 126 — 98 = 199;
1 000 — 236 — 145 = 619;	10 036 — 998 — 789 = 8 249;

991 — 223 — 412 = 356.

III.B.3. Care numere din perechile de mai jos sînt mai mari şi cu cît?

a) 3 şi 1	b) 80 şi 25	c) 836 şi 213	d) 136 456 şi 99 436
8 şi 5	30 şi 62	532 şi 433	7 385 326 şi 999 362
6 şi 0	100 şi 26	236 şi 112	4 562 şi 3 870

Răspuns: a) 3 este mai mare decît 1 cu două unităţi, căci 3 — — 1 = 2. Analog, 8 > 5 (cu 3 unităţi), 6 > 0 (cu 6 unităţi). b) Avem, de asemenea, 80 > 25 (cu 55), 62 > 30 (cu 32), 100 > 26 (cu 74); c). 836 > 213 (cu 623), 532 > 433 (cu 99),

5 — c. 850

$236 > 112$ (cu 124); d) $136\,456 > 99\,436$ (cu 37 020); $7\,385\,326 > 999\,362$ (cu 6 385 964); $4\,562 > 3\,870$ (cu 692).

III.B.4. Care numere din perechile de mai jos sînt mai mici și cu cît?

a) 3 și 2	b) 90 și 36	c) 243 și 113	d) 10 378 și 998
4 și 3	45 și 38	832 și 118	13 689 și 9 896
5 și 1	26 și 17	967 și 416	3 685 și 136

Răspuns: Avem: $3 - 2 = 1$, deci $2 < 3$ cu o unitate; $3 < 4$ (cu 1); $1 < 5$ (cu 4); b) $36 < 90$ (cu 54); $38 < 45$ (cu 7); $17 < 26$ (cu 9); c) $113 < 243$ (cu 130); $118 < 832$ (cu 714); $416 < 967$ (cu 551); d) $998 < 10\,378$ (cu 9 380); $9\,896 < 13\,689$ (cu 3 793); $136 < 3\,685$ (cu 3 549).

III.B.5. Găsiți numerele care lipsesc:

$3 + ? = 5$	$? + 5 = 7$	$? + 20 = 74$	$? + 1\,976 = 4\,587$
$6 + ? = 9$	$? + 7 = 10$	$94 + ? = 99$	$90\,076 + ? = 100\,000$
$5 + ? = 8$	$? + 3 = 9$	$36 + ? = 109$	$? + 999 = 8\,017$

Răspuns: $5 - 3 = 2$ deci $3 + \boxed{2} = 5$. În continuare: $6 + \boxed{3} = 9$; $5 + \boxed{3} = 8$; $\boxed{2} + 5 = 7$; $\boxed{3} + 7 = 10$; $\boxed{6} + 3 = 9$; $\boxed{54} + 20 = 74$; $94 + \boxed{5} = 99$; $36 + \boxed{73} = 109$; $\boxed{2\,611} + 1\,976 = 4\,587$; $90\,076 + \boxed{9\,924} = 100\,000$; $\boxed{7\,018} + 999 = 8\,017$.

III.B.6. Aflați în următoarele exerciții termenul necunoscut:

a) $2 + 3 + ? = 9$	b) $4 + ? + 2 = 8$	c) $? + 3 + 2 = 9$
$4 + 1 + ? = 7$	$4 + ? + 3 = 9$	$? + 1 + 5 = 8$
$3 + 4 + ? = 10$	$2 + ? + 5 = 10$	$? + 4 + 5 = 10$
$5 + 1 + ? = 9$	$4 + ? + 3 = 9$	$? + 1 + 5 = 8$
$1 + 3 + ? = 8$	$1 + ? + 4 = 8$	$? + 5 + 4 = 9$

Răspuns: a) Avem, succesiv:
$2 + 3 + ? = 9$; $(2 + 3) + ? = 9$; $5 + ? = 9$; $9 - 5 = 4$ deci $2 + 3 + 4 = 9$. Numărul căutat este, deci, 4. Celelalte numere sînt: 2, 3, 3 și 4; b) Numerele căutate sînt 2, 2, 3, 2, 3; c) La fel, obținem numerele 4, 2, 1, 2, 0.

III.B.7. Aflați termenul necunoscut a:

1) $28 + a = 57$	5) $436 + a = 796$	9) $10\,336 + a = 100\,536$
2) $a + 30 = 86$	6) $a + 136 = 987$	10) $a + 987 = 99\,977$
3) $a + 15 = 78$	7) $456 + a = 1\,000$	11) $9\,367 + a = 98\,876$
4) $16 + a = 58$	8) $900 + a = 1\,030$	12) $a + 1\,367 = 90\,073$

Răspuns: 1) Din $28 + a = 57$ rezultă $a = 57 - 28$ deci $a = 29$. Pentru celelalte avem: 2) $a = 56$; 3) $a = 63$; 4) $a = 42$; 5) $a = 360$; 6) $a = 851$; 7) $a = 544$; 8) $a = 130$; 9) $a = 90\,200$; 10) $a = 98\,990$; 11) $a = 89\,509$; 12) $a = 88\,706$.

III.B.8. Scrieţi egalităţi cu numerele:
a) 3; 4; 7; b) 18; 20; 2; c) 200; 150; 25; 25; d) 780; 80; 700.

Răspuns: a). Putem scrie $3 = 7 - 4$, sau $4 = 7 - 3$, sau $3 + 4 = 7$; b) $18 + 2 = 20$, etc.; c) $200 = 150 + 25 + 25$ etc.; d) $780 - 80 = 700$, etc.

III.B.9[M1]. Scrieţi două numere egale, a căror sumă să fie egală cu suma numerelor: 3 şi 5; 17 şi 51; 3 şi 1; 2 şi 4; 2 şi 6; 7 şi 3; 10 şi 8; 40 şi 20; 24 şi 42; 31 şi 39; 45 şi 5; 62 şi 18.

Răspuns: Avem schemele:

$$\frac{3\,|\,5}{4\,|\,4};\quad \frac{17\,|\,51}{34\,|\,34};\quad \frac{3\,|\,1}{2\,|\,2};\quad \frac{2\,|\,4}{3\,|\,3};\quad \frac{2\,|\,6}{4\,|\,4};\quad \frac{7\,|\,3}{5\,|\,5}$$

$$\frac{10\,|\,8}{9\,|\,9};\quad \frac{40\,|\,20}{30\,|\,30};\quad \frac{24\,|\,42}{33\,|\,33};\quad \frac{31\,|\,39}{35\,|\,35};\quad \frac{45\,|\,5}{25\,|\,25};\quad \frac{62\,|\,18}{40\,|\,40}$$

Se efectuează, deci, suma numerelor date apoi se găseşte numărul care dublat este egal cu suma calculată anterior.

III.B.10. Aflaţi termenul necunoscut din egalităţile următoare:

a)	b)	c)
$43 + ? = 49$	$? - 23 = 75$	$? - 436 = 137$
$24 + ? = 57$	$? + 4 = 59$	$937 - ? = 378$
$52 + ? = 78$	$? + 57 = 100$	$? - 1\,003 = 9\,734$
$63 + ? = 89$	$? + 73 = 98$	$600 - ? = 435$
$26 + ? = 90$	$? + 42 = 69$	$836 - ? = 86$

Răspuns: Egalităţile se scriu:

a)	b)	c)
$43 + \boxed{6} = 49$;	$\boxed{98} - 23 = 75$;	$\boxed{573} - 436 = 137$;
$24 + \boxed{33} = 57$;	$\boxed{55} + 4 = 59$;	$937 - \boxed{559} = 378$;
$52 + \boxed{26} = 78$;	$\boxed{43} + 57 = 100$;	$\boxed{10\,737} - 1\,003 = 9\,734$;
$63 + \boxed{26} = 89$;	$\boxed{25} + 73 = 98$;	$600 - \boxed{165} = 435$;
$26 + \boxed{64} = 90$;	$\boxed{27} + 42 = 69$;	$836 - \boxed{750} = 86$.

III.B.11. Aflaţi valoarea lui b:

a)	b)
$26 - 16 + b = 100$	$500 - b + 37 = 48$
$74 + b - 18 = 100$	$b - 45 + 36 = 72$
$85 - 36 + b = 86$	$97 - b + 19 = 73$
$74 + 25 - b = 67$	$48 + b - 52 = 48$
$46 + b - 18 = 100$	$46 + 37 - b = 57$

R*ăspuns* : a) Avem, succesiv :

$(26-16)+b=100$, $10+b=100$, $b=100-10=90$,

Verificare: $26-16+90=100$:

La fel, $74+b-18=100$, $(74-18)+b=100$, $56+b=$ $=100$, $b=100-56=44$. *Verificare:* $74+44-18=100$.

Celelalte numere sînt 37, 32 şi 72.

b) Numerele sînt : 489 ; 81 ; 43 ; 52 ; 26.

III.B.12. Se dau numerele a, b, c, a reprezentînd primul termen al unei adunări, b cel de-al doilea termen, iar c suma lor.

a) Dacă a este 7 245, b este 2 797, care este c?

b) Dacă a este 3 796, c este 8 379, care este b?

c) Dacă b este 10 326, c este 20 345, care este a?

Răspuns : Avem, peste tot, $a+b=c$.

a) Înlocuim şi obţinem $7\,425+2\,797=c$. Calculăm suma şi obţinem $c=10\,042$. b) Avem $b=4\,583$; c) Avem $a=10\,019$.

III.B.13. Din numerele : 90 ; 70 ; 137 ; 87 ; 100 scădeţi pe acelea pentru care se obţin, pe rînd, diferenţele :

5 ; 70 ; 37 ; 23.

R*ăspuns* : Avem : $90-85=5$; $90-20=70$; $90-53=$ $=37$; $90-67=23$; $70-65=5$; $70-0=70$; $70-$ $33=37$; $70-47=23$; $137-132=5$; $137-67=70$; $137-100=37$; $137-114=23$; $87-82=5$; $87-17-70$; $87-50=37$; $87-64=23$; $100-95=5$; $100-30=70$; $100-63=37$; $100-77=23$.

III.B.14. Se dau numerele d, e, f, d reprezentînd descăzutul, e scăzătorul, iar f diferenţa.

a) Dacă d este 7 936, e este 435, care este f?

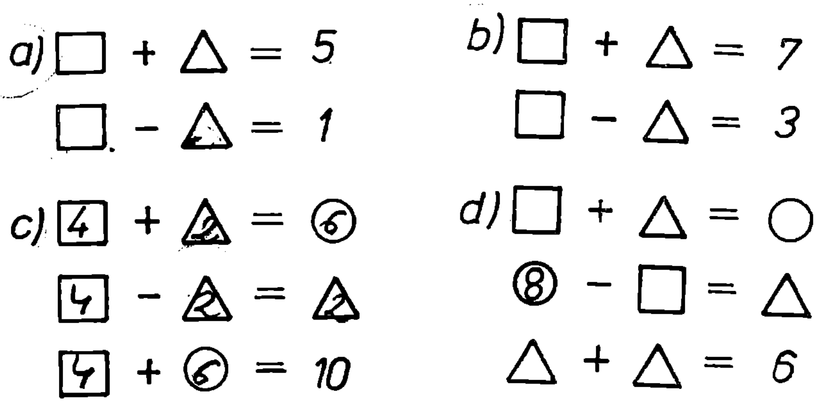
b) Dacă d este 18 362, f este 2 999, care este e?

c) Dacă e este 34 007, f este 3 569, care este d?

Răspuns : Avem, peste tot, $d-e=f$.

a) Avem $f=7\,936-435=7\,501$. b). Avem $18\,362-e=2\,999$, de unde $e=18\,362-2\,999=15\,363$. c). Avem $d-34\,007=3\,569$, de unde $d=34\,007+3\,569=37\,576$.

III.B.15[Mi]**.** Fiecare figură reprezintă într-un singur exerciţiu un anumit număr. Găsiţi numerele corespunzătoare :



Răspuns :

a) Numerele care au suma 5, iar diferența 1 sînt 3 și 2;

b) Numerele care au suma 7 și diferența 3 sînt 5 și 2;

c) Numărul lipsă pentru figura □ este 4. Din egalitatea a treia rezultă că cercul reprezintă pe 6, iar triunghiul pe 2.

d) Cercul reprezintă numărul 8. Din prima și a doua egalitate rezultă că cele două operații sînt inverse ceea ce înseamnă că pătratul reprezintă pe 5 și triunghiul pe 3.

III.B.16. Găsiți numerele de două cifre astfel încît suma și diferența numerelor reprezentate de cifrele cu care sînt scrise să fie aceeași.

(Domnica Preoteasa, G. M., 8/1984)

Răspuns : Fie $\overline{ab}$ un număr de două cifre. Avem $a + b = a - b$, sau $2b = 0$ deci $b = 0$. Rezultă $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Numerele căutate sînt 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.

III.B.17. Calculați suma numerelor 35 200 și 27 800. Scădeți din primul număr și apoi adunați la al doilea 1 300. Calculați suma numerelor obținute și comparați cu suma obținută inițial.

Răspuns : Avem : $35\,200 + 27\,800 = 63\,000$ și $35\,200 - 1\,300 = 33\,900$, respectiv $27\,800 + 1\,300 = 29\,100$. Avem $33\,900 + 29\,100 = 63\,000$. Numerele obținute sînt egale.

III.B.18. Calculați suma numerelor 87 375 și 145 758. Adăugați primului număr 8 436, apoi scădeți din al doilea tot 8 436. Calculați suma numerelor obținute și comparați cu suma obținută anterior.

Răspuns : Suma numerelor este aceeași : 233 133.

III.B.19. a) Aflați suma numerelor 23 456 și 13 456. Micșorați primul termen cu 2 378, apoi calculați suma. Comparați-o cu suma obținută prima dată.

b) Micșorați cu 2 378 al doilea termen al sumei numerelor 23 456 și 13 456.

Observați după ce efectuați toate calculele cerute de punctele a) și b) ale problemei ce se întîmplă cu suma numerelor în fiecare caz.

Răspuns : a). Avem $23\,456 + 13\,456 = 36\,912$. Cînd micșorăm primul număr cu 2 378, suma lor se micșorează cu 2 378. Analog pentru b).

III.B.20. a) Calculați diferența numerelor 10 378 și 3 036. Măriți primul termen cu 2 036, apoi calculați diferența dintre numărul obținut și al doilea termen. Comparați diferența obținută cu prima.

b) Măriți al doilea termen al diferenței dintre numerele 10 378 și 3 036 cu 2 036 și efectuați aceleași calcule ca la punctul a). Ce observați?

Răspuns : a) Avem $10\,378 - 3\,036 = 7\,342$ și $10\,378 + 2\,036 = 12\,414$. În final, $12\,414 - 3\,036 = 9\,378$. Ultima diferență este cu 2 036 mai mare decît prima. Analog pentru b).

III.B.21. Aflaţi răspunsurile:

a) (804 506 — 30 378) + 10 589;

b) 804 506 — (30 378 + 10 589).

Răspuns: a) 784 717; b) 763 539.

III.B.22. La cel mai mare număr de patru cifre, adăugaţi cel mai mare număr de cinci cifre. Scădeţi apoi din rezultatul obţinut cel mai mic număr de cinci cifre dintre care două cifre sînt 9 şi 8. Cît se obţine?

Răspuns: Se obţine 99 909.

III.B.23. Cu cît este mai mare suma numerelor 14 567 şi 3 689 decît diferenţa lor?

Răspuns: Cu 7 378 este mai mare suma decît diferenţa.

III.B.24. Se dau numerele 258; 32 652; 3 178 şi 10 037. Din diferenţa primelor două, scădeţi suma ultimelor numere.

Răspuns: Avem numărul (32 652 — 258) — (3 178 + 10 037) = = 19 179.

III.B.25. Aflaţi suma numerelor de la 1 la 100 care au cifra 2 o singură dată, numai pe locul unităţilor, apoi suma numerelor de la 1 la 100 cu cifra 1 o singură dată, numai pe locul unităţilor. Comparaţi sumele.

Răspuns: Avem:

$$2 + 12 + 32 + 42 + 52 + 62 + 72 + 82 + 92 = 448,$$

$$1 + 21 + 31 + 41 + 51 + 61 + 71 + 81 + 91 = 449.$$

Diferenţa numerelor este 449 — 448 = 1.

III.B.26. Mulţimea participanţilor la o drumeţie este formată din 172 de pionieri. Pentru desfăşurarea unui joc ei se separă în două submulţimi disjuncte. Una din submulţimi este formată din 28 de pionieri. Cîţi pionieri sînt în cealaltă submulţime?

Răspuns: Cealaltă submulţime este formată din 144 pionieri.

III.B.27. George are 52 de timbre. El dă colegului de bancă 17 timbre.

Cîte timbre i-au rămas lui George?

Răspuns: Lui George i-au rămas 52—17 = 35 (timbre).

III.B.28. La un „Aprozar" se aduc 50 lăzi cu fructe din care se vînd în ziua aceea numai 26.

Cîte lăzi cu fructe au rămas în „Aprozar"?

Răspuns: În „Aprozar" au rămas 24 lăzi cu fructe.

III.B.29. La cules de plante medicinale merg 75 elevi: 39 din clasa a III-a şi restul din clasa a IV-a.

Cîţi elevi din clasa a IV-a merg la cules de plante medicinale?

Răspuns: Din clasa a IV-a merg la cules 36 elevi.

III.B.30. Ana cumpără de la librărie un volum cu versuri de MIHAI EMINESCU cu prețul de 15 lei.
Ce rest primește ea dacă dă la casă o bancnotă de 50 lei?
Răspuns: Ana primește ca rest 35 lei.
III.B.31. O gospodină așează în cămară pentru iarnă pere în două lăzi. Într-una pune 47 de pere, iar în cealaltă 50 de pere.
În care ladă sînt mai multe pere și cu cîte?
Răspuns: În a doua ladă sînt cu 3 pere mai mult.
III.B.32. Corul claselor primare este alcătuit din 40 fetițe și 36 băieți.
Care este diferența dintre numărul fetițelor și al băieților?
Răspuns: Diferența este de 4 copii.
III.B.33. Trenul accelerat care parcurge distanța București-Buzău pleacă din București la ora 9 și 50 minute și ajunge la Buzău la ora 11 și 15 minute.
Cît timp durează o călătorie București — Buzău?
Răspuns: Călătoria durează o oră și 25 minute.
III.B.34. Dintr-un bidon cu capacitatea de 200 dl plin cu lapte s-au folosit 3 l, apoi 70 dl, și 50 dl.
Cîți litri de lapte au rămas în bidon?
Răspuns: În bidon au rămas 5 l.
III.B.35. În trei luni, Cornelia a economisit suma de 275 lei necesară pentru o excursie. Cîți lei a economisit în luna a treia dacă în prima lună a economisit 97 lei, în a doua 89 lei, iar în a treia lună restul?
Răspuns: În a treia lună, Cornelia a economisit 89 lei.
III.B.36. Într-o livadă s-au plantat 237 cireși și 302 vișini.
Care este diferența dintre numărul cireșilor și al vișinilor?
Răspuns: Diferența este de $302-237=65$ (pomi).
III.B.37. O uzină și-a planificat să prelucreze 139 985 tone de fontă, dar a reușit să mărească această cantitate ajungînd la 187 688 t.
Cu cîte tone a depășit uzina cantitatea de fontă planificată a fi prelucrată?
Răspuns: S-a depășit cu 47 703 t.
III.B.38. Pionierii clasei a III-a au strîns 375 de sticle și cu 49 mai puține borcane decît sticle.
Cîte borcane au strîns elevii?
Răspuns: Elevii au strîns 326 borcane.
III.B.39. De pe lotul școlar s-au recoltat 980 kg roșii, iar cartofi cu 190 kg mai puțin decît roșii.
Cîte kilograme de cartofi s-au recoltat?
Răspuns: S-au recoltat 790 kg cartofi.
III.B.40. Suprafața agricolă a țării noastre este în prezent de 15 000 000 ha. În cincinalul 1 986—1 990 se prevede ca această suprafață, prin introducerea în cultură a unor terenuri neagricole, să se mărească la 15 500 000 ha.
Cu cît va crește suprafața agricolă cultivată?
Răspuns: Suprafața agricolă cultivată va crește cu 500 000 ha.
III.B.41. Suprafața irigată în 1 985 va fi de 1 800 000 ha.
Care va fi suprafața irigată în 1 990 dacă aceasta este cu 4 000 000 ha mai mare decît cea din anul 1 985?
Răspuns: Suprafața irigată în 1 990 va fi de 5 800 000 ha.

III.B.42. În anul 1 990, conform planificărilor, se prevede ca producţia de legume să fie de 30 000 kg la hectar, cea de cartofi cu 2 000 kg mai mică decît cea de legume, iar cea de sfeclă de zahăr cu 11 000 kg mai mare decît cea de legume.

Care vor fi în 1 990 producţiile la hectar de cartofi şi sfeclă de zahăr?

Răspuns: Producţiile de cartofi şi sfeclă de zahăr vor fi 28 000 kg şi respectiv 41 000 kg la hectar.

III.B.43. Din cei 2 700 de elevi ai unei şcoli generale, 1 600 frecventează cursurile ciclului primar, iar restul cursurile ciclului gimnazial.

Cîţi elevi frecventează cursurile ciclului gimnazial?

Răspuns: Ciclul primar este frecventat de 1 100 elevi.

III.B.44. 1 600 elevi frecventează cursurile ciclului primar al unei şcoli generale, iar 1 100 pe cele ale ciclului gimnazial.

Care este diferenţa dintre numărul de elevi care frecventează cele două cicluri?

Răspuns: Diferenţa este de 500 elevi.

III.B.45. Într-o şcoală generală, 1 600 elevi frecventează cursurile ciclului primar şi cu 500 mai puţini elevi frecventează cursurile ciclului gimnazial.

Cîţi elevi frecventează cursurile ciclului gimnazial?

Cîţi elevi are şcoala la cele două trepte de învăţămînt?

Răspuns: Cursurile ciclului gimnazial sînt urmate de 1 100 elevi. În total există 2 700 elevi.

III.B.46. 1 100 elevi frecventează cursurile ciclului gimnazial al unei şcoli generale şi cu 500 mai mulţi pe cele ale ciclului primar.

Cîţi elevi frecventează cursurile ciclului primar?

Cîţi elevi frecventează cursurile şcolii generale?

Răspuns: Răspunsurile sînt: 1 600 elevi; 2 700 elevi.

III.B.47. În biblioteca sa, Valentin are 785 volume. 433 aparţin scriitorilor români, iar restul scriitorilor străini.

Cîte cărţi aparţin autorilor străini?

Răspuns: Există 352 cărţi scrise de scriitori străini.

III.B.48. Urmăriţi enunţul problemelor III.B.43, III. B.44, III.B.45, III.B 46 şi construiţi probleme asemănătoare folosind datele problemei III B. 47.

III.B.49. O fermă avicolă a obţinut în primul trimestru al anului 17 800 pui de raţă, cu 20 032 mai mulţi pui de găină decît pui de raţă şi cu 900 mai puţini decît pui de raţă, pui de gîscă.

Cîţi pui a obţinut ferma avicolă în primul trimestru al anului?

Răspuns: În primul trimestru ferma avicolă a obţinut 72 532 pui.

III.B.50. Patru ateliere au confecţionat pentru o casă de copii uniforme şcolare.

Primul atelier a confecţionat 485 uniforme, al doilea cu 37 mai mult decît primul, al treilea cu 300 mai puţin decît primele două la un loc, iar al patrulea cu 299 mai puţine decît al treilea.

Cîte uniforme şcolare s-au confecţionat pentru casa de copii?

Răspuns: S-au confecţionat, în total, 2 122 uniforme şcolare.

III.B.51. Irina citeşte o carte de poveşti în 4 zile. În prima zi citeşte 123 pagini, a doua zi cu 17 pagini mai mult decît în prima zi, a treia zi cu 20 pagini mai puţin decît în a doua zi, iar a patra zi cu 85 pagini mai puţin decît în ziua a doua şi a treia la un loc.

Cîte pagini are cartea?

Răspuns: Cartea are 558 pagini.

III.B.52. În cele patru hale ale unei fabrici sînt 200 de strunguri. În prima hală sînt 49 de strunguri, în a doua cu 7 strunguri mai puţin decît în prima hală, în a treia cu 37 strunguri mai puţin decît în primele două hale la un loc, iar în a patra hală restul.

Cîte strunguri are fiecare hală?

Răspuns: În cele patru hale sînt, respectiv, 49 strunguri, 42 strunguri, 54 strunguri, 55 strunguri.

III.B.53. La un magazin de încălţăminte s-au adus 375 perechi de sandale pentru copii, cu 89 mai puţine perechi de sandale pentru femei decît perechile de sandale pentru copii şi cu 258 mai multe decît perechile de sandale pentru femei, pantofi bărbăteşti.

Care este diferenţa dintre numărul perechilor de pantofi pentru bărbaţi şi numărul perechilor de sandale pentru copii?

Răspuns: Diferenţa este 169 de perechi de încălţăminte.

III.B.54. Un magazin de mobilă primeşte trimestrial 89 garnituri de mobilă pentru dormitor, cu 18 mai multe garnituri de mobilă pentru sufragerie şi cu 58 mai multe garnituri de mobilă pentru bucătărie faţă de numărul garniturilor de mobilă pentru dormitor.

Care este diferenţa dintre numărul garniturilor de mobilă pentru bucătărie şi cele pentru sufragerie?

Răspuns: Diferenţa este de 40 de garnituri.

III.B.55. În agricultură, efectivele animaliere vor ajunge, la sfîrşitul cincinalului 1985—1990, la 11 milioane bovine, cu 4 milioane mai multe porcine decît bovine, cu 13 milioane mai multe ovine decît porcine şi cu 69 milioane mai multe păsări outoare decît bovine.

Care este diferenţa dintre numărul păsărilor outoare şi numărul ovinelor?

Răspuns: Diferenţa este de 52 milioane.

III.B.56. O fabrică de confecţii a realizat în primul trimestru al anului o economie de 318 860 lei, în al doilea trimestru cu 2 075 lei mai mult decît în primul trimestru, în al treilea trimestru cu 1 875 mai puţin decît în al doilea trimestru, iar în al patrulea cu 5 028 lei mai mult decît în trimestrul al III-lea.

Ce economii a realizat de-a lungul anului fabrica de confecţii?

Răspuns: Economiile realizate se cifrează la 1 282 943 lei.

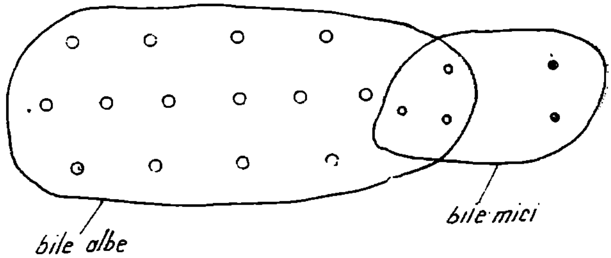
III.B.57^{M_1}. Într-o cutie sînt bile mari albe, mici albe şi mici negre. Ştiind că în total sînt 17 bile albe (mari şi mici) şi 2 bile negre, aflaţi:

a) Cîte bile mari albe sînt în cutie dacă numărul bilelor mici albe este 3?

b) Cîte bile mici sînt în cutie?

c) Cîte bile (mari şi mici) sînt în total în cutie?

Răspuns : Reprezentăm mulţimea bilelor albe şi a celor negre prin următoarea figură :



Avem :
a) $17 - 3 = 14$ bile mari albe.
b) $3 + 2 = 5$ bile mici.
c) $17 + 2 = 19$ sau $14 + 3 + 2 = 19$ bile mari şi mici.

III.B.58. Calculele de mai jos :

243 + 21 = 255	83 — 17 = 21
4 763 + 2 436 = 6 803	276 — 182 = 114
5 318 + 2 504 = 7 802	56 384 — 42 701 = 14 783

sînt incorecte pentru că în numerele respective unele cifre nu au fost puse la locul cuvenit. Corectaţi-le !

Răspuns : Egalităţi corecte pot fi $243 + 12 = 255$; $4\,367 + 2\,436 = 6\,803$, etc.

III.B.59^{M_3}**.** La un concurs de desene pentru copii s-au stabilit două teme, un copil putînd să participe cu un singur desen la fiecare temă.

S-au primit 427 desene la prima temă şi 504 desene la tema a doua. Ştiind că 139 copii au prezentat desene la ambele teme, aflaţi cîţi copii au prezentat desene : a) numai la prima temă ; b) numai la a doua ; c) cel puţin la una din teme.

Răspuns : Avem :
$427 - 139 = 288$ (numărul copiilor care au prezentat desene numai la prima temă);
$504 - 139 = 365$ (numărul copiilor care au prezentat desene numai la a doua temă);
$288 + 365 = 653$ (cel puţin la una din teme).

III.B.60^{M_3}**.** Dintr-o mare întreprindere au participat la o demonstraţie a oamenilor muncii 4 650 de persoane, iar la altă demonstraţie 5 560 de persoane. Ştiind că 3 220 de persoane din acea întreprindere au participat la ambele demonstraţii, aflaţi :

a) Cîte persoane au participat la prima demonstraţie, dar nu şi la a doua;

b) Cîte persoane au participat la a doua demonstraţie, dar nu şi la prima;

c) Cîte persoane au participat la o singură demonstraţie.

ăspuns : 4 650 — 3 220 = 1 430 (numărul persoanelor care au participat numai la prima demonstrație);
5 560 — 3 220 = 2 340 (numărul persoanelor care au participat numai la a doua demonstrație);
1 430 + 2 340 = 3 770 (numărul persoanelor care au participat la demonstrații, dar nu la amîndouă).

III.B.61. Suma a două numere este 33. Al doilea număr este mai mare ca primul număr cu 9 unități și este format din aceleași cifre, dar scrise în ordine inversă.

Care sînt numerele?

ăspuns : Avem adunarea :

$$\begin{array}{r} \overline{ab} + \\ 9 \\ \hline \overline{ba} \end{array}$$

Se observă că $a \neq 0$, $b \neq 0$. Fie $b = 1$; atunci $1 + 9 = 10$, dar $a \neq 0$, deci $b \neq 1$. Fie $b = 2$; avem $a = 1$. Deci $\overline{ab} = 12$. Deci numerele sînt 12 și 21.

Verificare : $12 + 9 = 21$.

III.B.62. Știind că $a + b = 98$ și a este 39, să se afle b.

Răspuns : Înlocuim pe a în egalitatea $a + b = 98$. Obținem $39 + b = 98$, deci $b = 98 - 39 = 59$.

III.B.63. Știind că $a + b = 37\,956$ și b este 1 389 să se afle a.

Răspuns : Numărul căutat este $a = 36\,567$.

III.B.64. Găsiți toate numerele naturale care puse în locul lui n fac adevărate scrierile :

a) $45 + n < 50$; b) $n + 13 < 17$; c) $436 + n < 440$.

Răspuns : a) Se adaugă, pe rînd, 0; 1; 2; 3; 4, suma rămînînd mai mică decît 50. Deci n, în scrierea $45 + n < 50$, poate lua valorile : 0; 1; 2; 3; 4.

Avem, în continuare : b) $n \in \{0; 1; 2; 3\}$; c) $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.

III.B.65. Aflați suma numerelor a, b și c știind că $a = 236$, $b = 119$, iar c este un număr de două cifre care are cifra zecilor 5. Este nevoie să efectuăm de fiecare dată calcul scris?

ăspuns : Avem :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 236 + 119 + 50 = 405; \\ a + b + c &= 236 + 119 + 51 = 406; \\ a + b + c &= 236 + 119 + 52 = 407; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a + b + c &= 236 + 119 + 59 = 414. \end{aligned}$$

Deci avem numerele 406, 407, ..., 414.

III.B.66^{M_2}. La o asociație s-a stabilit ca președintele ei să fie o persoană care are vîrsta de peste 50 ani, dar nu mai mare de 70 ani.

Monica, Costel, Ana, Dan, Elena și Vlad au acum vîrstele de 19; 22; 28; 36; 42; 54 de ani. Care din ei va putea fi președinte al acestei asociații peste 28 ani?

***R**ăspuns* : Peste 28 de ani, persoanele respective vor avea vîrstele :

$19 + 28 = 47$ ani (Monica);
$22 + 28 = 50$ ani (Costel);
$28 + 28 = 56$ ani (Ana);
$36 + 28 = 64$ ani (Dan);
$42 + 28 = 70$ ani (Elena);
$54 + 28 = 82$ ani (Vlad).

Deci, peste 28 de ani pot fi aleşi ca preşedinte : Ana, Dan, Elena.

III.B.67[M]. Spuneţi elementele mulţimii persoanelor din problema precedentă care nu vor ocupa funcţia de preşedinte la data menţionată pentru că :
a) vor fi prea tinere;
b) vor fi prea în vîrstă.

***R**ăspuns* : a) Vor fi prea tineri : Monica, Costel.
b) Va fi prea în vîrstă Vlad.

54

III.C. Înmulţirea numerelor naturale

III.C.1. Calculaţi produsele. Verificaţi-le, schimbînd locul factorilor:

a) 7×7	b) 200×3	c) 127×10	d) $64 \times 10\,000$
4×6	5×300	100×36	$23\,103 \times 2$
5×7	222×2	$43\,865 \times 10$	$3 \times 12\,302$
6×9	436×2	$3\,798 \times 43$	$23 \times 2\,000$
8×4	3×111	$3 \times 1\,000$	$12\,300 \times 3$

ăspuns: a) $7 \times 7 = 49$; $4 \times 6 = 24$; $5 \times 7 = 35$; $6 \times 9 = 54$; $8 \times 4 = 32$; b) $200 \times 3 = 600$; $5 \times 300 = 1\,500$; $222 \times 2 = 444$; $436 \times 2 = 872$; $3 \times 111 = 333$; c) $127 \times 10 = 1\,270$; $100 \times 36 = 3\,600$; $43\,865 \times 10 = 438\,650$; $3\,798 \times 43 = 163\,314$; $3 \times 1\,000 = 3\,000$; d) $64 \times 10\,000 = 640\,000$; $23\,103 \times 2 = 46\,206$; $3 \times 12\,302 = 36\,906$; $23 \times 2\,000 = 46\,000$; $12\,300 \times 3 = 36\,900$.

III.C.2. Înmulţiţi: 6 cu 9; 8 cu 12; 36 cu 2; 46 cu 3; 9 cu 13; 28 cu 36.

ăspuns: Avem: $6 \times 9 = 54$; $8 \times 12 = 96$; $36 \times 2 = 72$; $46 \times 3 = 138$; $9 \times 13 = 117$; $28 \times 36 = 1\,008$.

III.C.3. Găsiţi numerele de 8 ori mai mari decît: 236; 178; 952; 13 272.

Răspuns: Avem: $8 \times 236 = 1\,888$; $8 \times 178 = 1\,424$; $8 \times 952 = 7\,616$; $8 \times 13\,272 = 106\,176$.

III.C.4. Aflaţi produsul numerelor 6 şi 9; 43 şi 24; 56 şi 13. Urmăriţi exerciţiile III.C.2, 3 şi 4 şi stabiliţi o concluzie.

Răspuns: Avem: $6 \times 9 = 54$; $43 \times 24 = 1\,032$; $56 \times 13 = 728$.

III.C.5. Comparaţi rezultatele:

$$(6 \times 23) \times 121 \text{ şi } (6 \times 121) \times 23$$

$$(23 \times 45) \times 100 \text{ şi } 23 \times (45 \times 100)$$

Răspuns: $(6 \times 23) \times 121 = (6 \times 121) \times 23 = 16\,698$; $(23 \times 45) \times 100 = 23 \times (45 \times 100) = 103\,500$.

III.C.6. Schimbaţi ordinea factorilor pentru a efectua calculul oral:

$4 \times 70 \times 15$	$75 \times 320 \times 4$
$8 \times 36 \times 25$	$4 \times 876 \times 25$
$365 \times 4 \times 25$	$80 \times 470 \times 125$

ăspuns: Grupăm numerele astfel ca să obţinem, prin înmulţire, numere cu cifra unităţilor 0: $4 \times 70 \times 15 = (4 \times 15) \times 70 = 60 \times 70 = 4\,200$; $8 \times 36 \times 25 = (8 \times 25) \times 36 = 200 \times 36 = 7\,200$; $365 \times 4 \times 25 = 365 \times (4 \times 25) = 365 \times 100 = 36\,500$; $75 \times 320 \times 4 = (75 \times 4) \times 320 = 300 \times 320 = 96\,000$; $4 \times 876 \times 25 = (4 \times 25) \times 876 = 100 \times 876 = 87\,600$; $80 \times 470 \times 125 = (80 \times 125) \times 470 = 10\,000 \times 470 = 4\,700\,000$.

III.C.7. Determinați răspunsurile:

a) $(5+2)\times 4$	b) $7\times(2+4)$	c) $70\times(30+10)$
$(8+2)\times 7$	$9\times(3+5)$	$90\times(300+40)$
$(4+3)\times 5$	$9\times(2+7)$	$50\times(50+40)$

ăspuns: Avem:
a) $(5+2)\times 4=7\times 4=28$ sau $5\times 4+2\times 4=20+8=28$; $(8+2)\times 7=10\times 7=70$; $(4+3)\times 5=7\times 5=35$; b) $7\times(2+4)=7\times 6=42$; $9\times(3+5)=9\times 8=72$; $9\times(2+7)=9\times 9=81$; c) $70\times(30+10)=70\times 40=$ $=2\,800$; $90\times(300+40)=90\times 340=30\,600$; $50\times$ $\times(50+40)=50\times 90=4\,500$.

III.C.8. Prin înmulțiri succesive ușurați calcularea produselor următoare:

550×16	845×14	723×12
765×12	976×18	965×14
985×16	$1\,987\times 8$	331×18

Răspuns: Avem:
$550\times 16=550\times 4\times 4=2\,200\times 4=8\,800$ sau $550\times 16=$ $=550\times 2\times 8=1\,100\times 8=8\,800$; etc.

III.C.9. Folosind adunarea de termeni egali aflați răspunsurile:

$1\,962\times 2$	$46\,345\times 3$
$36\,345\times 5$	269×4

ăspuns: Avem:
$1\,962\times 2=1\,962+1\,962=3\,924$; $36\,345\times 5=36\,345+$ $+36\,345+36\,345+36\,345+36\,345=181\,725$; $46\,345\times$ $\times 3=46\,345+46\,345+46\,345=139\,035$; $269\times 4=$ $=269+269+269+269=1\,076$.

III.C.10. Aflați suma, dacă se repetă de 4 ori ca termen al adunării fiecare din numerele: 13; 5; 8; 19. Scrieți sub formă de produs operațiile și comparați rezultatele.

Răspuns: Avem:
$13+13+13+13=52$ sau $4\times 13=52$; etc.

III.C.11. Calculați produsele:

$27\times 5\times 7\times 0\times 8\times 7\times 11$;
$105\times 3\times 0\times 113\times 45\times 17$;
$98\,103\times 0\times 85\times 5$.

Ce observați?

Răspuns: Avem $27\times 5\times 7\times 0\times 8\times 7\times 11=0$, căci unul din factori este 0. În mod asemănător, toate celelalte produse sînt egale cu 0.

III.C.12. a) a şi b sînt factorii unui produs. Calculaţi produsul $a \times b$ cînd a este egal cu 436 şi b este 945.

b) Găsiţi numărul de 3 ori mai mare decît a, înmulţiţi-l cu b, apoi comparaţi produsul obţinut cu cel anterior.

c) Găsiţi numărul de 3 ori mai mare decît b, înmulţiţi-l cu a, apoi comparaţi produsul obţinut cu cel anterior.

Răspuns : a) Avem $a \times b = 436 \times 945 = 412\,020$. b) Avem $3 \times a = 1\,308$. Apoi, $1\,308 \times b = 1\,308 \times 945 = 1\,236\,060$. Se observă că numărul 1 236 060 este de 3 ori mai mare decît numărul 412 020. c) La fel, obţinem rezultatul 1 236 060.

III.C.13. a) a şi b sînt factorii unui produs. Calculaţi acest produs cînd a este egal cu 1 795 şi b este 9 780.

b) Găsiţi numărul de 5 ori mai mic decît a şi numărul de 5 ori mai mare decît b. Calculaţi produsul acestor numere, apoi comparaţi-l cu cel obţinut anterior.

c) Găsiţi numărul de 5 ori mai mare decît a şi numărul de 5 ori mai mic decît b. Calculaţi produsul acestor numere, apoi comparaţi-l cu cel obţinut anterior.

Răspuns : Problema este asemănătoare cu cea precedentă. Calculele sînt lăsate pe seama cititorului.

III.C.14. Puneţi semnul potrivit ($<$, $>$, $=$) între produsele ce urmează

$$8\,795 \times 36 \text{ şi } (8\,795 : 5) \times 36$$

$$3\,583 \times 18 \text{ şi } 3\,583 \times (18 \times 5)$$

$$4\,300 \times 122 \text{ şi } (4\,300 : 2) \times (122 \times 2)$$

Este nevoie de calcul?

Răspuns : Avem : $8\,795 \times 36 = 316\,620$ şi $(8\,795 : 5) \times 36 = 1\,759 \times 36 = 63\,324$, deci $8\,795 \times 36 > (8\,795 : 5) \times 36$. Nu este nevoie de calcul, deoarece $8\,795 > 8\,795 : 5$.

La fel, $3\,583 \times 18 < 3\,583 \times (18 \times 5)$, căci $18 < 18 \times 5$.

De asemenea, $4\,300 \times 122 = (4\,300 : 2) \times (122 \times 2)$ căci, deşi am micşorat de două ori primul factor al înmulţirii, am mărit de două ori al doilea factor.

III.C.15. Comparaţi rezultatele :

$5 + 3 \times 4$ şi $(5 + 3) \times 4$; $5 \times 379 + 317$ şi $5 \times (379 + 317)$;

$(9 + 11) \times 2$ şi $9 + 11 \times 2$; $4 \times 5 + 3 \times 8$ şi $(4 \times 5 + 3) \times 8$.

Răspuns : Avem :

$$5 + 3 \times 4 = 5 + 12 = 17; \quad (5 + 3) \times 4 = 8 \times 4 = 32.$$

Aşadar, prioritate au calculele din paranteză. În plus :

$$5 + 3 \times 4 < (5 + 3) \times 4.$$

De asemenea, $(9 + 11) \times 2 = 20 \times 2 = 40$ şi $9 + 11 \times 2 = 9 + 22 = 31$. În plus, $(9 + 11) \times 2 > 9 + 11 \times 2$.

În continuare, observăm că:

$$5 \times 379 + 317 = 1\,895 + 317 = 2\,212,$$
$$5 \times (379 + 317) = 5 \times 696 = 3\,480$$

deci $5 \times (379 + 317) > 5 \times 379 + 317$.

În sfîrşit:

$$4 \times 5 + 3 \times 8 = 20 + 24 = 44,$$
$$(4 \times 5 + 3) \times 8 = (20 + 3) \times 8 = 23 \times 8 = 184.$$

III.C.16. Dublaţi numerele 13; 785; 27; 985 şi 386. Sub ce formă puteţi scrie aceste operaţii?

Răspuns: Avem $13 + 13 = 26$ sau $2 \times 13 = 26$. În continuare, $785 \times 2 = 1\,570$; $27 \times 2 = 54$; $985 \times 2 = 1\,970$; $386 \times 2 = 772$.

III.C.17. Unul din factorii unui produs este numărul 4 326, celălalt este triplul primului. Care este produsul?

Răspuns: Produsul este $4\,326 \times (3 \times 4\,326) = 56\,142\,828$.

III.C.18. În produsul $a \times b$, a este 1 367, iar b triplul lui a. Calculaţi $a \times b$.

Răspuns: Avem $a \times b = 1\,367 \times (3 \times 1\,367) = 5\,606\,067$.

III.C.19. Cele zece degete de la mîini pot servi ca maşină de calcul a produselor în care unul din factori este 9.

Aşezăm palmele pe masă şi căutăm produsul înmulţirii 3×9. Numărăm de la stînga la dreapta 3 degete. Ne oprim la al treilea deget şi observăm ce număr de degete avem la stînga lui şi ce număr la dreapta.

Produsul este numărul format din cifrele 2 şi 7, deci 27.

Verificaţi acest lucru căutînd produsele care urmează:

2×9	5×9	9×4
9×7	9×6	8×9

III.C.20. a) Care numere adunate sau înmulţite dau acelaşi rezultat?

b) Suma şi produsul a două numere mai mici decît 100 se scriu cu aceleaşi cifre, dar în ordine inversă. Găsiţi astfel de numere.

Răspuns: a) Numerele sînt 0 şi 0; 2 şi 2.

b) De exemplu, $47 + 2 = 49$, $47 \times 2 = 94$.

III.C.21. Calculaţi produsele: 36×11; 81×11.

Priviţi apoi cu atenţie cifrele numărului produs şi cifrele factorului diferit de 11. Ce observaţi?

Calculaţi produsele rapid, aplicînd regula stabilită anterior, schema fiind: 23×11; 11×43; 45×11; 11×34.

Răspuns: Calculul produsului unui număr oarecare cu 11 se efectuează rapid în felul următor: se scriu unul sub altele numărul care se înmulţeşte cu 11 şi numărul de 10 ori mai mare ca acesta. Se efectuează apoi suma acestor numere. De exemplu: $219 \times 11 = 2\,409$.

$$\begin{array}{r} 19+ \\ 2\,190 \\ \hline 2\,409 \end{array}$$

Avem rezultatele: 396; 891; 253; 473; 495; 374.

III.C.22. Găsiţi regula de calcul rapid şi pentru produsele în care unul din factori este 111 ; 1 111 ; etc.

Calculaţi în modul găsit :

a) 11×23	b) 285×11	c) $111 \times 98\,735$
71×11	$11 \times 7\,896$	$11 \times 1\,238$
11×52	$87\,834 \times 11$	$1\,111 \times 13\,458$

Răspuns : Avem a) $11 \times 23 = 253$; $71 \times 11 = 781$; $11 \times 52 = 572$; b) $285 \times 11 = 3\,135$; $11 \times 7\,896 = 86\,856$; $87\,834 \times 11 = 966\,174$; c) $111 \times 98\,735 = 10\,959\,585$; $11 \times 1\,238 = 13\,618$; $1\,111 \times 13\,458 = 14\,951\,838$.

III.C.23. Produsul dintre un număr şi 101 ; 1 001 ; 10 001, etc., se efectuează rapid ca în schemele ce urmează :

$$\begin{array}{r} 1\,388 \times 101 = 140\,188 \\ \hline 1\,388 \\ 138\,800 \\ \hline 140\,188 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 309\,875 \times 1\,001 = 310\,184\,875 \\ \hline 309\,875 + \\ 309\,875\,000 \\ \hline 310\,184\,875 \end{array}$$

Calculaţi următoarele produse :

101×343	$345 \times 1\,001$
$3\,896 \times 101$	101×238
$1\,001 \times 18\,286$	$83\,657 \times 101$

Răspuns : Avem : $101 \times 343 = 34\,643$; $3\,896 \times 101 = 393\,496$; $1\,001 \times 18\,286 = 18\,304\,286$; $345 \times 1\,001 = 345\,345$; $101 \times 238 = 24\,038$; $83\,657 \times 101 = 8\,449\,357$.

III.C.24. Calculăm mai uşor produsul dintre un număr şi 5, dacă numărul îl înmulţim cu 10, apoi împărţim rezultatul la 2 (căci $5 = 10 : 2$).

De exemplu : $4\,385 \times 5 = 4\,385 \times 10 : 2 = 43\,850 : 2 = 21\,925$.

Rezolvaţi :

$9\,886 \times 5$	5×185	$5 \times 10\,589$
$5 \times 3\,289$	987×5	$77\,666 \times 5$

Răspuns : Avem : $9\,886 \times 5 = 49\,430$; $5 \times 3\,289 = 16\,445$; $5 \times 185 = 925$; $987 \times 5 = 4\,935$; $5 \times 10\,589 = 52\,945$; $77\,666 \times 5 = 388\,330$.

III.C.25. Calculăm mai uşor produsul dintre un număr şi 25, dacă numărul îl înmulţim cu 100, apoi rezultatul îl împărţim la 4 (căci $25 = 100 : 4$)

De exemplu : $1\,985 \times 25 = 1\,985 \times 100 : 4 = 198\,500 : 4 = 49\,625$

Rezolvaţi :

987×25	$25 \times 3\,548$
$9\,178 \times 25$	385×25
$9\,176 \times 25$	$25 \times 9\,876$

Răspuns : Avem : 987 $\times$ 25 = 24 675 ; 9 178 $\times$ 25 = 229 450 ; 9 176 $\times$ 25 = 229 400 ; 25 $\times$ 3 548 = 88 700 ; 385 $\times$ 25 = 9 625 ; 25 $\times$ $\times$ 9 876 = 246 900.

III.C.26. Produsul dintre un număr şi 9 ; 99 ; 999, etc. se efectuează rapid găsind numărul de 10 ; 100 ; 1 000 ori mai mare şi scăzînd apoi din rezultat numărul dat. De exemplu, 1 368 $\times$ 99 = 1 368 $\times$ 100 − 1 368 = = 135 432.

Calculaţi :

6 895 $\times$ 999	132 $\times$ 999	99 $\times$ 324
99 $\times$ 783	99 $\times$ 3 758	3 758 $\times$ 9
9 999 $\times$ 385	386 $\times$ 9	999 $\times$ 1 345

ăspuns : Avem : 6 895 $\times$ 999 = 6 888 105 ; 99 $\times$ 783 = 77 517 ; 9 999 $\times$ 385 = 3 849 615 ; 132 $\times$ 999 = 131 868 ; 99 $\times$ 3 758 = = 372 042 ; 386 $\times$ 9 = 3 474 ; 99 $\times$ 324 = 32 076 ; 3 758 $\times$ $\times$ 9 = 33 822 ; 999 $\times$ 1 345 = 1 343 655.

III.C.27. Produsul dintre un număr şi 19 ; 29 ; 39 ; 49, etc. se efectuează rapid căutînd numărul de 20 ; 30 ; 40 etc. ori mai mare şi scăzînd din produs numărul dat.

De exemplu : 7 867 $\times$ 9 = 7 867 $\times$ 10 − 7 867 = 70 803.

Calculaţi :

67 388 $\times$ 39	9 876 $\times$ 59
49 $\times$ 175	69 $\times$ 785
1 871 $\times$ 29	89 $\times$ 7 656

Răspuns : Avem 67 388 $\times$ 39 = 2 628 132 ; 49 $\times$ 175 = 8 575 ; 1 871 $\times$ 29 = 54 259 ; 9 876 $\times$ 59 = 582 684 ; 69 $\times$ 785 = 54 165 ; 89 $\times$ 7 656 = 681 384.

III.C.28. Produsul unui număr cu 21 ; 31 ; 41 ; etc, se efectuează căutînd numărul de 20 ; 30 ; 40 etc.ori mai mare şi adăugînd apoi numărul dat.

De exemplu : 378 $\times$ 21 = 378 $\times$ 20 + 378 = 7 938.

Calculaţi :

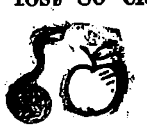
31 $\times$ 839	1 838 $\times$ 81	4 368 $\times$ 51
3 876 $\times$ 41	9 685 $\times$ 31	61 $\times$ 3 899
71 $\times$ 1 387	71 $\times$ 958	1 886 $\times$ 21

ăspuns : Avem : 31 $\times$ 839 = 26 009 ; 3 876 $\times$ 41 = 158 516 ; 71 $\times$ 1 387 = 98 477 ; 1 838 $\times$ 81 = 148 878 ; 9 685 $\times$ 31 = = 300 235 ; 71 $\times$ 958 = 68 018 ; 4 368 $\times$ 51 = 222 768 ; 61 $\times$ $\times$ 3 899 = 237 839 ; 1 886 $\times$ 21 = 39 606.

III.C.29. Două autocare de 40 locuri au transportat nişte elevi la staţiunea Cheia.

Cîţi elevi au fost la Cheia dacă locurile din autocare au fost toate ocupate?

Răspuns : În autocare au fost 80 elevi.



III.C.30. O gospodină a cumpărat 2 l de ulei cu 17 lei litrul şi 3 kg de zahăr cu 14 lei kilogramul.

Cîţi lei costă cumpărăturile?

Răspuns: Cumpărăturile costă 76 lei.

III.C.31. Un abonament trimestrial la revista „Şoimii patriei" costă 6 lei.

Cît costă un abonament anual?

Răspuns: Abonamentul anual costă 24 lei.

III.C.32. Un caiet dictando cu 100 de file are preţul de 4 lei, iar unul de matematică, 3 lei.

Raluca îşi cumpără 5 caiete dictando şi 6 cu liniatură de matematică.

Cîţi lei au costat toate caietele?

Răspuns: Caietele au costat 38 lei.

III.C.33. Un sac are greutatea de 50 kg. Ce cantitate de grîu a obţinut un cooperator pentru zilele de muncă, dacă grîul a fost aşezat în 8 saci?

Răspuns: Cooperatorul a obţinut 400 kg.

III.C.34. La ora de educaţie fizică, elevii unei clase au fost aşezaţi cîte 8, formînd 5 rînduri paralele.

Care este efectivul clasei?

Răspuns: Clasa are un efectiv de 40 elevi.

III.C.35. Pe plafonul sălii de spectacol din Casa de cultură au fost aşezate 4 lămpi cu cîte 8 becuri fiecare.

Cîte becuri sînt în total?

Răspuns: În total sînt 32 becuri.

III.C.36. La şcoală s-au primit 2 cutii cu cîte 10 mingi de tenis şi 2 cutii cu cîte 12 mingi de ping-pong. La ora de educaţie fizică fiecare fetiţă primeşte cîte o minge de tenis şi fiecare băiat cîte o minge de ping-pong.

Cîţi elevi participă la ora de educaţie fizică?

Răspuns: La oră participă 44 elevi.

III.C.37. În 6 cutii mari sînt cîte 8 cutii mici cu biscuiţi. Ştiind că fiecare cutie mică are cîte 4 pachete, calculaţi cîte pachete şi cîte cutii mici sînt.

Răspuns: Există 48 cutii mici şi 216 pachete cu biscuiţi.

III.C.38. La ora de matematică, Maria a fost prima care a rezolvat problema dată de învăţător.

Ea a explicat problema la trei colegi care la rîndul lor au explicat-o la cîte trei colegi şi fiecare din aceştia la cîte trei alţi colegi.

La sfîrşitul orei toţi elevii clasei ştiau rezolvarea problemei.

Cîţi elevi erau în clasă?

Răspuns: În clasă erau 40 elevi.

III.C.39. Pentru dansul „Primăvara", fetiţele au împodobit crenguţe cu floricele de măr. Cîte floricele au fost necesare pentru a împodobi 23 de crenguţe cu cîte 3 rămurele pe care trebuiau prinse cîte 4 floricele?

Răspuns: Au fost necesare 276 floricele.

III.C.40. Pentru alcătuirea insectarului, elevii clasei a IV-a B au organizat o excursie. Cei 12 băieţi participanţi la excursie au strîns cîte 9 insecte, iar cele 18 fetiţe cîte 5 insecte.

Băieţii au strîns mai multe insecte? Cu cît?

Răspuns : Băieţii au strîns cu 18 insecte mai mult.

III.C.41. Mama a cumpărat pentru Ileana 2 bluze cu preţul de 31 lei şi 4 perechi de ciorapi cu preţul de 11 lei.

Cît au costat cumpărăturile?

Răspuns : Cumpărăturile au costat 106 lei.

III.C.42. Prin gara „Progresul" trec zilnic 2 garnituri formate din cîte 10 vagoane cu pietriş şi de 2 ori mai multe garnituri cu cîte 12 vagoane cu nisip decît garniturile de tren cu vagoane pline cu pietriş.

Cîte vagoane cu materiale de construcţii sînt în total?

Răspuns : În total sînt 68 vagoane.

III.C.43. Un automobilist parcurge un drum de 6 ore cu viteza de 60 km/h, iar altul un drum de 7 ore cu viteza de 70 km/h.

Este mai scurt sau mai lung drumul parcurs de primul automobilist? Cu cît?

Răspuns : Drumul parcurs de primul automobilist este mai scurt cu 130 km.

III.C.44. Într-un şlep s-au încărcat 438 t de porumb, de 3 ori mai mult grîu decît porumb şi de 2 ori mai mult orez decît porumb.

Care este cantitatea de cereale încărcată pe şlep?

Răspuns : Pe şlep au fost încărcate 2 628 t cereale.

III.C.45. Într-o tabără au sosit 134 elevi din judeţul Vrancea, de 2 ori mai mulţi elevi din judeţul Iaşi decît din judeţul Vrancea şi de 4 ori mai mulţi decît cei din judeţul Vrancea, elevi din Bucureşti.

Care este diferenţa dintre numărul elevilor din Bucureşti şi cel al elevilor din judeţul Iaşi?

Răspuns : Diferenţa este de 268 elevi.

III.C.46. Pentru ea şi Mihai, fratele ei, Gabriela cumpără cîte un pachet de biscuiţi de 5 lei şi o îngheţată de 2 lei.

Cîţi lei a cheltuit ea? (Calculaţi în două moduri suma cheltuită).

ăspuns : Pachetele de biscuiţi şi îngheţată au fost consumate de 2 persoane, Gabriela şi fratele ei, deci calculăm :

2×5 lei $= 10$ lei (costul pachetelor de biscuiţi);

2×2 lei $= 4$ lei (costul îngheţatelor);

În total s-au plătit 10 lei $+$ 4 lei $=$ 14 lei.

Altfel, avem :

5 lei $+$ 2 lei $=$ 7 lei (costul unui pachet de biscuiţi şi a unei îngheţate) cumpărate pentru unul din copii ; 2×7 lei $=$ 14 lei (costul a două pachete de biscuiţi şi a două îngheţate).

III.C.47. Pentru o bluză şi o fustă din acelaşi material trebuie 70 cm şi respectiv 110 cm de mătase.

Ce lungime are materialul folosit pentru două bluze şi două fuste?

Răspuns : Sînt necesari 360 cm de material.

III.C.48. Care este cantitatea de lapte ce se află în 6 bidoane cu lapte, dacă 3 bidoane sînt de cîte 7 litri și celelalte de cîte 10 litri?

Răspuns : În cele 6 bidoane sînt 51 l lapte.

III.C.49. Doi bicicliști pornesc unul spre celălalt din orașele A și B. Care este distanța dintre orașe dacă primul are viteza de 10 km pe oră, al doilea de 9 km pe oră și după 5 ore de la plecare se întîlnesc?

Răspuns : Distanța dintre cele două orașe este de 95 km.

III.C.50. Lungimea unui dreptunghi este de 138 cm, iar lățimea de 78 cm. Care este perimetrul dreptunghiului?

Răspuns : Perimetrul dreptunghiului este 432 cm.

III.C.51. Știind că un săpun are prețul de 8 lei, iar un tub cu pastă de dinți 6 lei, calculați suma ce trebuie plătită pe 4 săpunuri și 4 tuburi cu pastă de dinți.

Răspuns : S-au plătit 56 lei.

III.C.52. Lungimea unei grădini în formă de dreptunghi este de 15 dam, iar lățimea ei de 10 dam.

Cîți decametri are gardul ce înconjoară grădina?

Răspuns : Gardul are lungimea 50 dam.

III.C.53. La magazinul alimentar au fost aduse 36 lăzi cu lămîi avînd greutatea de 20 kg fiecare, care s-au vîndut cu 12 lei kilogramul.

Ce sumă s-a încasat pe întreaga cantitate de lămîi?

Răspuns : Cantitatea de lămîi din cele 36 de lăzi este de $36 \times 20\text{ kg} = 720\text{ kg}$.

Costul întregii cantități de lămîi este de $720 \times 12\text{ lei} = 8\,640\text{ lei}$.

III.C.54. Un bloc a fost proiectat cu 4 scări cu cîte 40 apartamente de cîte 3 camere fiecare.

Cîte camere are blocul proiectat?

Răspuns : Blocul are 480 camere.

III.C.55. Într-un magazin textil s-au adus 18 baloturi de stofă din lînă cu lungimea de 20 m fiecare.

Care este suma încasată pe stofa adusă, dacă 1 m de stofă are prețul de 536 lei?

Răspuns : Suma încasată este 192 960 lei.

III.C.56. O uzină are 8 hale în care se lucrează la strunguri.

Cîți strungari are uzina, dacă fiecare hală are 45 de strunguri și la fiecare strung lucrează în trei schimburi cîte un strungar?

Răspuns : În uzină sînt 1 080 strungari.

III.C.57. Clădirea unei școli are 24 săli de clasă cu cîte 40 locuri fiecare.

Cîți elevi are școala dacă de dimineață intră în clase elevii ciclului primar, după amiază elevii ciclului gimnazial, toate locurile din bănci fiind ocupate?

Răspuns : Școala are 1 920 elevi.

III.C.58. Care este diferența dintre produsul numerelor 45 și 200 și cel al numerelor 45 și 100?

Răspuns : Diferența este 4 500.

III.C.59. Se dau numerele 3 456 și 189. Aflați produsul dintre suma și diferența acestor numere.

Răspuns : Produsul căutat este 11 908 215.

III.C.60. Scrieți numerele 1 343 ; 18 ; 97 ; 132 ; 456 respectînd ordinele și indicînd cîte unități de un anumit ordin sînt, sub forma unui produs în care unul din factori să fie 10 ; 100 ; 1000.

Răspuns : Avem : $1\,343 = 1 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 3$; $18 = 1 \times 10 + 8$; $97 = 9 \times 10 + 7$, etc.

III.C.61^{M_3}. Găsiți toate numerele naturale n care fac adevărată scrierea :

a) $n \times 200 = 800$;
b) $n \times 200 < 800$;
c) $n \times 200 \leqslant 800$.

ăspuns : a) $n = 4$ pentru că $4 \times 200 = 800$.
b) Căutăm numerele care așezate în locul lui n împreună cu 200 dau un produs mai mic decît 800. Înlocuim utilizînd pe rînd numerele șirului numerelor naturale 0, 1, 2,... Avem :

dacă $n = 0$, atunci $0 \times 200 < 800$;
dacă $n = 1$, atunci $1 \times 200 < 800$;
dacă $n = 2$, atunci $2 \times 200 < 800$;
dacă $n = 3$, atunci $3 \times 200 < 800$;
dacă $n = 4$, atunci $4 \times 200 = 800$;
Valorile căutate ale lui n sînt 0, 1, 2, 3.

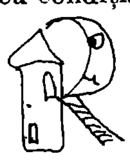
c) Se observă că trebuie adăugat și 4 șirului de valori de mai sus pentru ca $n \times 200 \leqslant 800$, deci n ia valorile 0, 1, 2, 3, 4.

III.C.62^{M_3}. Se știe că n și p sînt numere naturale.

a) Găsiți mulțimea perechilor (n, p) pentru care :
$$n \times p = 8 ;$$
b) Găsiți mulțimea perechilor (n, p) pentru care :
$$n \times (p + 3) = 8.$$

ăspuns : a) Avem $n = 1$, $p = 8$, pentru că $1 \times 8 = 8$ sau $n = 8$, $p = 1$, pentru că $8 \times 1 = 8$ sau $n = 2$, $p = 4$, pentru că $2 \times 4 = 8$ sau $n = 4$, $p = 2$ pentru că $4 \times 2 = 8$, deci mulțimea perechilor (n, p) pentru care $n \times p = 8$ este $\{(1, 8) ; (8 ; 1) ; (2 ; 4) ; (4 ; 2)\}$. b) Pentru a se verifica scrierea $n(p + 3) = 8$, valorile sînt : $n = 1$ și $p = 5$ sau $n = 2$ și $p = 1$.

III.C.63^{M_3}. Se știe că n și p sînt numere naturale cuprinse între 2 și 10. Găsiți mulțimea perechilor (n, p) pentru care :
$$(n - 3) \times (p - 4) = 0,$$
cu condiția ca fiecare factor să fie mai mare sau egal cu 0.



ăspuns : Pentru ca produsul să fie egal cu 0 trebuie ca unul din factori să fie 0 deci una din diferențele $n - 3$ și $p - 4$ trebuie să fie egală cu 0, cealaltă putînd avea orice valori. Deci : a) cînd $n - 3 = 0$ rezultă $n = 3$; b) cînd $p - 4 = 0$ rezultă $p = 4$.

Deci mulțimea perechilor (n, p) pentru care $(n - 3) \times (p - 4) = 0$ este $\{(3, 4) ; (3, 5) ; (3, 6) ; (3, 7) ; (3, 8) ; (3, 9)\}$ cînd $n - 3 = 0$ și $\{(3, 4) ; (4, 4) ; (5, 4) ; (6, 4) ; (7, 4) ; (8, 4) ; (9, 4)\}$, cînd $p - 4 = 0$.

86

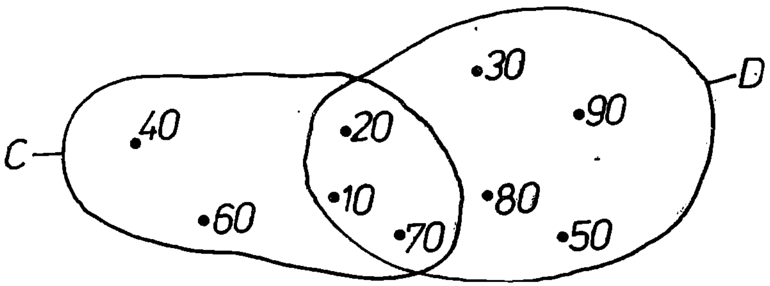
III.C.64^{M_3}. Aflați elementele mulțimilor A și B știind că reuniunea lor este {20 ; 70 ; 30 ; 90 ; 50 ; 80} și mulțimea A conține acele elemente ale reuniunii care puse în locul lui n fac adevărată scrierea $6 \times n \leqslant 300$, iar mulțimea B conține acele elemente care puse în locul lui n fac adevărată scrierea $6 \times n \geqslant 300$.

Răspuns: Înlocuim pe n pe rînd în scrierea $6 \times n \leqslant 300$ și calculăm produsul. Valori ale lui n vor fi acele numere care înmulțite cu 6 dau un produs mai mic sau egal cu 300. Cele care dau un produs mai mare sau egal cu 300 aparțin mulțimii B. Avem:

$6 \times 20 < 300$, deci $n = 20 \in A$;
$6 \times 70 > 300$, deci $n = 70 \in B$;
$6 \times 30 < 300$, deci $n = 30 \in A$;
$6 \times 90 > 300$, deci $n = 90 \in B$;
$6 \times 50 = 300$, deci $n = 50 \in A \cap B$;
$6 \times 80 > 300$, deci $n = 80 \in B$.

Așadar, $A = \{20, 30, 50\}$, iar $B = \{70, 90, 50, 80\}$.

III.C.65^{M_3}. C și D fiind mulțimile de numere ale căror diagrame sînt date în figura următoare, calculați produsul elementelor care aparțin:



a) mulțimii diferență dintre C și D, cu 7 ; b) mulțimii diferență dintre D și C, cu 9 ; c) mulțimii intersecție a lui C cu D, cu 8 ; d) mulțimii reuniune a lui C cu D, cu 5.

Răspuns: Trebuie să stabilim elementele fiecărei mulțimi (cerute la punctele a), b), c), d)) apoi să efectuăm produsele dintre fiecare din aceste elemente și numerele indicate ca fiind al doilea factor.

a) Diferența dintre C și D este mulțimea {40 ; 60} deci vom calcula produsele 40×7 și 60×7. Acestea sînt 280 și 420.

b) Diferența dintre D și C este mulțimea {30, 50, 80, 90}, deci calculăm: 30×9 ; 50×9 ; 80×9 ; 90×9 și obținem produsele: 270 ; 450 ; 720 ; 810.

c) Intersecția dintre C și D este mulțimea {10, 20, 70} deci calculăm: 10×8 ; 20×8 ; 70×8. Obținem: 80 ; 160 ; 560.

d) Reuniunea mulțimii C cu mulțimea D este {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90} deci produsele vor fi: 10×5, 20×5 ; 30×5 ; 40×5 ; 50×5 ; 60×5 ; 70×5 ; 80×5 ; 90×5. Calculăm și obținem: 50 ; 100 ; 150 ; 200 ; 250 ; 300 ; 350 ; 400 ; 450.

III. D. Împărțirea numerelor naturale

III.D.1. Aflați răspunsurile:

a)	b)	c)	d)
32 : 8	200 : 2	236 : 2	10 912 : 32
45 : 9	300 : 3	230 : 5	12 975 : 15
63 : 7	820 : 2	975 : 3	93 060 : 132
28 : 4	844 : 4	375 : 5	7 524 : 22
36 : 6	963 : 3	836 : 2	9 940 : 28

Răspuns: Avem:

a)	b)
32 : 8 = 4;	200 : 2 = 100;
45 : 9 = 5;	300 : 3 = 100;
63 : 7 = 9;	820 : 2 = 410;
28 : 4 = 7;	844 : 4 = 211;
36 : 6 = 6;	963 : 3 = 321;

c)	d)
236 : 2 = 118;	10 912 : 32 = 341;
230 : 5 = 46;	12 975 : 15 = 865;
975 : 3 = 325;	93 060 : 132 = 705;
375 : 5 = 75;	7 524 : 22 = 342;
836 : 2 = 418;	9 940 : 28 = 355.

III.D.2. Răspundeți la întrebările următoare:

a) Cîte sute sînt într-un milion? Dar în zece mii?
b) Cîte mii sînt într-un milion? Dar într-o sută de mii?
c) Cîte zeci sînt într-o mie? Dar într-un milion?
d) Cîte sute sînt în 36 000?
e) Cîte mii sînt în numărul 8 760 000?

Răspuns: a) Într-un milion sînt 10 000 de sute. În zece mii sînt 100 de sute.
b) Într-un milion sînt 1 000 de mii. Într-o sută de mii sînt 100 de mii.
c) Într-o mie sînt 100 de zeci. Într-un milion sînt 100 000 de zeci.
d) În numărul 36 000 sînt 360 de sute.
e) În numărul 8 760 000 sînt 8 760 de mii.

III.D.3. De cîte ori se cuprinde 8 în numerele:

8; 880; 2 944; 11 488?

Răspuns: 8 se cuprinde în numerele date, respectiv: o dată, de 110 ori, de 368 ori, de 1 436 ori.

III.D.4. Găsiți numerele de 6 ori mai mici decît: 36; 54; 12; 24; 300.

Răspuns: Cum 36 : 6 = 6 rezultă că 6 este de 6 ori mai mic decît 36. În continuare, numărul de 6 ori mai mic decît 54 este 9. Numerele de 6 ori mai mici decît numerele 12; 24; 300 sînt 2, 4, 50.

III.D.5. Calculați cîturile dintre numerele 1 608 și 12, respectiv 3 105 și 9.

Răspuns: Cîturile sînt 134 și 345.

III.D.6. Împărțiți pe: 44 ; 12 ; 24 ; 80 la 4 și la 2.

Răspuns : Avem 44 : 4 = 11 ; 44 : 2 = 22 ; 12 : 4 = 3 ; 12 : 2 = 6 ; 24 : 4 = 6 ; 24 : 2 = 12 ; 80 : 4 = 20 ; 80 : 2 = 40.

III.D.7. Aflați jumătatea numerelor: 244 ; 300 ; 122 ; 48 și sfertul numerelor: 48 ; 37 000 ; 404 și 328.

Răspuns : Jumătatea primului grup de numere sînt numerele: 122 ; 150 ; 61 ; 24, iar sfertul celorlalte numere: 12 ; 9 250 ; 101 ; 82.

III.D.8. Deîmpărțitul este 14 824 și împărțitorul este 34. Care este cîtul?

Răspuns : Cîtul este 436.

III.D.9. Calculați :

a) 88 : 4 : 2	b) 125 127 : 9	c) 227 900 : 86
422 : 2 : 1	8 209 : 4	104 192 : 256
699 : 1 : 3	871 325 : 5	230 769 : 10 989

Răspuns : Avem :

a) 88 : 4 : 2 = 11 ; 422 : 2 : 1 = 211 ; 699 : 1 : 3 = 233 ;

b) 125 127 : 9 = 13 903 ; 8 209 : 4 = 2 052 rest 1 ; 871 325 : 5 = 174 265 ;

c) 227 900 : 86 = 2 650 ; 104 192 : 256 = 407 ; 230 769 : 10 989 = 21

III.D.10. Calculați rezultatele și spuneți ce-ați constatat:

a) 12 : 6 : 2, (12 : 6) : 2 și 12 : (6 : 2),
b) 30 : 10 : 1, (30 : 10) : 1 și 30 : (10 : 1),
c) 100 : 20 : 10, (100 : 20) : 10 și 100 : (20 : 10).

Răspuns : Avem :

a) 12 : 6 : 2 = 1 ; (12 : 6) : 2 = 2 : 2 = 1 ; 12 : (6 : 2) = = 12 : 3 = 4. În primele două cazuri rezultatele sînt egale;

b) 30 : 10 : 1 = 3 ; (30 : 10) : 1 = 3 : 1 = 3 ; 30 : (10 : 1) = = 30 : 10 = 3. În toate cele trei cazuri rezultatul este același;

c) 100 : 20 : 10 = 5 : 10 = 0 rest 5 ; (100 : 20) : 10 = 5 : 10 = 0 rest 5 ; 100 : (20 : 10) = 100 : 2 = 50. În primele două cazuri rezultatele sînt egale.

Observație. Exercițiul arată că este importantă ordinea efectuării operațiilor, prin punerea parantezelor.

III.D.11. Deîmpărțitul este 3 784, cîtul este 4. Care este împărțitorul?

Răspuns : Împărțitorul este 946.

III.D.12. Împărțitorul este 46 și cîtul este 785. Care este deîmpărțitul?

Răspuns : Deîmpărțitul este 36 110.

III.D.13. Stabiliți prin împărțire la doi care numere sînt pare din următoarele :

2 342 ; 3 289 ; 24 533 ; 3 240 ; 12 456 ; 12 345 ; 125 088 și 23 457.

Răspuns : Deoarece 2 342 : 2 = 1 171 rest 0, rezultă că numărul 2 342 este par.
Deoarece 3 289: 2 =1 644 rest 1 rezultă că numărul este impar. În continuare, sînt numere pare: 3 240; 12 456; 125 088; sînt impare numerele: 24 533; 12 345; 23 457.

III.D.14. Stabiliţi prin împărţire la 5 care numere se împart exact la 5 din următoarele : 13 568 ; 15 005 ; 341 500 ; 10 838 şi 13 689.

Răspuns : Avem 13 568 : 5 = 2 713 rest 3 ; împărţirea este cu rest, deci numărul nu se împarte exact la 5 ; se împart la 5 numerele 15 005 şi 341 500.

III.D.15. Se dă scrierea: $a : 2 = 3$ rest 5. Să se afle a. Calculaţi pe a şi în cazurile următoare :

$a : 72 = 36$ rest 2 ;
$a : 376 = 325$ rest 7 ;
$a : 126 = 118$ rest 2.

Răspuns : Avem $a = 3 \times 2 + 5$, pentru că $d = c \times \hat{\imath} + r$; deci $a = 11$. În continuare, $a = 36 \times 72 + 2 = 2594$; $a = 376 \times 325 + 7 = 122\,207$; $a = 126 \times 118 + 2 = 14\,870$.

III.D.16. Scrieţi primele 6 numere de două cifre din şirul numerelor naturale care împărţite la 5 dau restul egal cu 1.

Răspuns : Numerele căutate sînt : 11 ; 16 ; 21 ; 26 ; 31 ; 36.

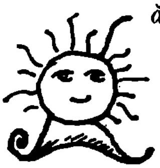
III.D.17. Efectuaţi prin scădere repetată, dacă este posibil :

a) 24 : 6 ; 30 : 6 ; 37 : 8 ; 14 : 2 ; 42 : 14;
b) 24 : 4 ; 30 : 8 ; 14 : 7 ; 844 : 211 ; 25 : 0.

Răspuns : a) Avem $24 - 6 - 6 - 6 - 6 = 0$, deci $24 : 6 = 4$. În continuare, $30 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 = 0$, deci $30 : 6 = 5$; 37 : 8 nu se poate efectua prin scăderi repetate; $14 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 = 0$, deci $14 : 2 = 7$. De asemenea, $42 - 14 - 14 - 14 = 0$, deci $42 : 14 = 3$.
b) Avem $24 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0$, deci $24 : 4 = 6$; 30 : 8 nu se poate efectua prin scăderi repetate. În continuare, $14 - 7 - 7 = 0$, deci $14 : 7 = 2$. De asemenea, $844 - 211 - 211 - 211 - 211 = 0$, deci $844 : 211 = 4$. Împărţirea 25 : 0 nu se poate efectua în nici un fel

III.D.18. Efectuaţi în ordinea în care sînt scrise :

a)	b)	c)
$9 \times 2 : 3$;	$20 : 10 \times 8$;	$243 : 3 \times 7$;
$6 \times 4 : 8$;	$60 : 6 \times 7$;	$2 \times 300 : 100$;
$10 \times 3 : 6$;	$90 : 3 \times 4$;	$175 : 5 \times 9$;
$6 \times 6 : 9$;	$120 : 6 \times 3$;	$32 \times 100 : 5$.



ăspuns : Avem :

a)	b)	c)
$9 \times 2 : 3 = 6$;	$20 : 10 \times 8 = 16$;	$243 : 3 \times 7 = 567$;
$6 \times 4 : 8 = 3$;	$60 : 6 \times 7 = 70$;	$2 \times 300 : 100 = 6$;
$10 \times 3 : 6 = 5$;	$90 : 3 \times 4 = 120$;	$175 : 5 \times 9 = 315$;
$6 \times 6 : 9 = 4$;	$120 : 6 \times 3 = 60$;	$32 \times 100 : 5 = 640$.

III.D.19. Verificați dacă sînt corecte egalitățile :

$(7 \times 9) - 36 = 4 \times (72 : 8)$; $\quad 89 = 47 + (6 \times 1)$

$32 + (56 : 7) = (6 \times 9) - 24$; $\quad (9 \times 9) - 50 = 32$.

Răspuns : Egalitățile nu sînt corecte.

III.D.20. Formați mulțimea numerelor naturale care înmulțite cu unul din numerele 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 dau produsul 560.

Răspuns : Mulțimea este {560, 280, 140, 112, 80, 70}.

III.D.21. La produsul numerelor 37 875 și 25 adăugați cîtul lor. Cît se obține?

Răspuns : Se obține 948 390.

III.D.22. Stabiliți cu cît este mai mare produsul numerelor 7 000 și 8 decît cîtul dintre aceleași numere.

Răspuns : Cu 55 125 este mai mare produsul decît cîtul.

III.D.23. Se dau numerele 1 000 și 500. Aflați cîtul dintre suma și diferența lor.

Răspuns : Cîtul este 3.

III.D.24. Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu 6 și adunînd la produs 2 obținem numărul 2 210. Scrieți operația de împărțire a cărui cît este numărul căutat.

Răspuns : Numărul căutat este 368.

III.D.25. Aflați valoarea lui a știind că :

a) $8 \times a = 245\,000$;	b) $a \times 10 = 379\,800$;
$3 \times a = 1\,344$;	$a \times 1\,000 = 3\,787\,000$;
$4 \times a = 37\,900$;	$a \times 25 = 327\,800$.

ăspuns : Avem :

a) $a = 245\,000 : 8 = 30\,625$;	b) $a = 379\,800 : 10 = 37\,980$;
$a = 1\,344 : 3 = 448$;	$a = 3\,787\,000 : 1\,000 = 3\,787$;
$a = 37\,900 : 4 = 9\,475$;	$a = 327\,800 : 25 = 13\,112$.

III.D.26. Aflați valoarea lui b știind că :

a) $8 \times b + 17 = 73$	b) $6 \times 9 + b = 93$
$b \times 6 - 12 = 18$	$9 \times b - 24 = 48$

Răspuns : Avem :

a) $b = (73 - 17) : 8 = 7$; b) $b = 93 - 6 \times 9 = 39$;

$b = (18 + 12) : 6 = 5$; $b = (48 + 24) : 9 = 8$.

III.D.27. Putem determina mai uşor numerele de 5 ori mai mici decît numerele date găsind mai întîi numerele de două ori mai mari ca cele date, apoi de 10 ori mai mici decît cele obţinute. De exemplu :

$$1\,250 : 5 = 1\,250 \times 2 : 10 = 2\,500 : 10 = 250.$$

Calculaţi în acest mod :

$$97\,680 : 5; \quad 4\,600 : 5; \quad 8\,130 : 5;$$
$$3\,840 : 5; \quad 16\,440 : 5; \quad 1\,880 : 5.$$

ăspuns : Avem :

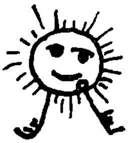
$$97\,680 : 5 = 97\,680 \times 2 : 10 = 195\,360 : 10 = 19\,536;$$
$$3\,840 : 5 = 3\,840 \times 2 : 10 = 7\,680 : 10 = 768;$$
$$4\,600 : 5 = 4\,600 \times 2 : 10 = 9\,200 : 10 = 920;$$
$$16\,440 : 5 = 16\,440 \times 2 : 10 = 32\,880 : 10 = 3\,288;$$
$$8\,130 : 5 = 8\,130 \times 2 : 10 = 16\,260 : 10 = 1\,626;$$
$$1\,880 : 5 = 1\,880 \times 2 : 10 = 3\,760 : 10 = 376.$$

III.D.28. Putem determina mai uşor numărul de 25 ori mai mic decît altul, înmulţindu-l cu 4 şi împărţind apoi rezultatul la 100. De exemplu :

$$3\,600 : 25 = 3\,600 \times 4 : 100 = 14\,400 : 100 = 144.$$

Calculaţi în acest mod :

$$89\,700 : 25; \quad 34\,300 : 25; \quad 84\,300 : 25;$$
$$385\,900 : 25; \quad 4\,300 : 25; \quad 8\,700 : 25.$$



ăspuns : Avem :

$$89\,700 : 25 = 89\,700 \times 4 : 100 = 358\,800 : 100 = 3\,588;$$
$$385\,900 : 25 = 385\,900 \times 4 : 100 = 1\,543\,600 : 100 = 15\,436;$$
$$34\,300 : 25 = 34\,300 \times 4 : 100 = 137\,200 : 100 = 1\,372;$$
$$4\,300 : 25 = 4\,300 \times 4 : 100 = 17\,200 : 100 = 172;$$
$$84\,300 : 25 = 84\,300 \times 4 : 100 = 337\,200 : 100 = 3\,372;$$
$$8\,700 : 25 = 8\,700 \times 4 : 100 = 34\,800 : 100 = 348.$$

III.D.29. Putem determina mai uşor numărul de 125 de ori mai mic decît altul înmulţind acel număr cu 8 şi împărţind rezultatul la 1 000. De exemplu :

$$3\,000 : 125 = 3\,000 \times 8 : 1\,000 = 24\,000 : 1\,000 = 24.$$

Calculaţi în acest mod :

$$9\,861\,000 : 125; \quad 89\,000 : 125; \quad 3\,000 : 125;$$
$$963\,000 : 125; \quad 36\,000 : 125; \quad 344\,000 : 125.$$

Răspuns : Avem:

$$\begin{aligned}
9\,861\,000 : 125 &= 9\,861\,000\times 8 : 1\,000 = 78\,888\,000 : 1\,000 = 78\,888;\\
963\,000 : 125 &= 963\,000\times 8 : 1\,000 = 7\,704\,000 : 1\,000 = 7\,704;\\
89\,000 : 125 &= 89\,000\times 8 : 1\,000 = 712\,000 : 1\,000 = 712;\\
36\,000 : 125 &= 36\,000\times 8 : 1\,000 = 288\,000 : 1\,000 = 288;\\
3\,000 : 125 &= 3\,000\times 8 : 1\,000 = 24\,000 : 1\,000 = 24;\\
344\,000 : 125 &= 344\,000\times 8 : 1\,000 = 2\,752\,000 : 1\,000 = 2\,752.
\end{aligned}$$

III.D.30. Carmen are în puşculiţă 180 de lei în monezi de cîte 3 lei. Cîte monezi are?

Răspuns : În puşculiţă sînt 60 monezi.

III.D.31. Laurenţiu se hotărăşte să citească cîte 15 pagini zilnic dintr-o carte de 165 de pagini.

În cîte zile o poate termina?

Răspuns : Laurenţiu termină de citit cartea în 11 zile.

III.D.32. O cantitate de 38 436 kg de făină a fost pusă în pungi de cîte 2 kg.

Cîte pungi au fost necesare pentru întreaga cantitate?

Răspuns : Au fost necesare 19 218 pungi, căci 3 8436 kg : 3 kg = 19218.

III.D.33. La o mercerie s-au încasat 633 lei pe elastic de 3 lei metrul.

Cîţi metri s-au vîndut?

Răspuns : S-au vîndut 211 metri.

III.D.34. O cantitate de 430 l de lapte se toarnă în bidoane de cîte 10 litri.

Cîte bidoane s-au putut umple?

Răspuns : S-au umplut 43 bidoane.

III.D.35. Un teren cultivat cu grîu are aria de 297 ha. Altul, cultivat cu porumb, este de 3 ori mai mic.

Ce arie are terenul acesta?

Răspuns : Al doilea teren are 297 ha : 3 = 99 ha.

III.D.36. Dintr-o livadă s-au cules 45 898 kg de mere şi o cantitate de pere egală cu jumătate din cantitatea de mere.

Ce cantitate de pere s-a recoltat?

Răspuns : S-au recoltat 45 898 kg : 2 = 22 949 kg de pere.

III.D.37. Din cei 36 de elevi ai unei clase, un sfert sînt în echipa de handbal a şcolii.

Cîţi elevi sînt în echipa de handbal a şcolii?

Răspuns : În echipa de handbal sînt 36 : 4 = 9 (elevi).

III.D.38. Un vapor parcurge 365 km în 5 ore.

Cîţi kilometri parcurge vaporul într-o oră?

Răspuns : Într-o oră vaporul parcurge 365 km : 5 = 73 km.

III.D.39. Perimetrul unui pătrat este de 236 m.
Care este lungimea laturii pătratului?
Răspuns : Lungimea laturii pătratului este 236 m : 4 = 59 m.

III.D.40. De pe fiecare metru pătrat al unui teren cu suprafaţa de 340 metri pătraţi s-au recoltat 10 kg de roşii.
Cîte kilograme de roşii s-au recoltat de pe întreaga suprafaţă?
Răspuns : S-au recoltat 340 × 10 kg = 3 400 kg.

III.D.41. De pe o suprafaţă de 340 metri pătraţi s-au recoltat 3 400 kg de roşii.
Ce cantitate de roşii s-a recoltat de pe un metru pătrat?
Răspuns : De pe un metru pătrat s-au recoltat 3 400 kg : 340 = 10 kg roşii.

III.D.42. Cîţi metri pătraţi are o grădină ştiind că de pe suprafaţa ei s-au recoltat 3 400 kg de roşii, iar de pe un metru pătrat 10 kg?
Răspuns : Grădina are 340 m. p. pentru că 3 400 kg : 10 kg=340.

III.D.43. De pe fiecare hectar al unui ogor de 65 ha s-au recoltat cîte 5 000 kg de grîu.
Cîte kilograme de grîu s-au recoltat de pe întreaga suprafaţă?
Folosiţi răspunsul la întrebarea problemei pentru a formula alte probleme asemănătoare cu III.D. 40—III.D. 42 în care datele să fie prezentate pe rînd ca necunoscute.
Răspuns : S-au recoltat, în total, 65 × 5 000 kg = 325 000 kg.

III.D.44. La ora de educaţie fizică, cei 28 de băieţi şi 8 fete au fost aşezaţi în grupuri de cîte 4 elevi.
Cîte grupuri sînt în total, dacă în fiecare grup intră sau numai fete sau numai băieţi?
Răspuns : În total sînt 9 grupuri de copii.

III.D.45. 330 plicuri mici şi 400 plicuri mari sînt aşezate în mape de cîte 10 plicuri, fiecare mapă conţinînd sau plicuri mari, sau plicuri mici.
Cîte mape s-au format?
Răspuns : S-au format 73 mape.

III.D.46. 234 perechi de ciorapi de damă şi 171 perechi de şosete trei sferturi sînt grupate în seturi de cîte 3 perechi, fiecare set conţinînd numai ciorapi de damă sau şosete trei sferturi.
Cîte seturi sînt?
Răspuns : S-au format 135 seturi.

III.D.47. La un combinat avicol sînt 3 670 pui de găină şi de 5 ori mai puţini pui de curcă decît pui de găină.
Cîţi pui de găină şi curcă sînt în total?
Răspuns : În total sînt 3 670 + 3 670 : 5 = 4 404 (pui).

III.D.48. La un chioşc de legume-fructe s-au adus 354 kg de cartofi, o cantitate de roşii de 3 ori mai mică decît cea de cartofi şi o cantitate de ardei de 2 ori mai mică decît cea de roşii.
Ce cantitate totală de legume s-a primit?
Răspuns : S-au primit 354 + 354 : 3 + (354 : 3) : 2 = 531 (kg legume).

III.D.49. În livada unei Cooperative Agricole de Producţie s-au plantat 60 de cireşi şi de două ori mai puţini vişini.

Cîţi pomi s-au plantat?

Răspuns: S-au plantat $60 + 60 : 2 = 90$ (pomi).

III.D.50. Într-o librărie s-au adus 234 volume de versuri, de 2 ori mai puţine cărţi de ştiinţă decît volume de versuri şi de 3 ori mai puţine cărţi de colorat decît volume de versuri.

Cu cît este mai mare numărul cărţior de ştiinţă decît al celor de colorat?

Răspuns: Numărul cărţilor de ştiinţă este cu 39 mai mare.

III.D.51[M2]. Reuniţi mulţimea numerelor cu soţ cuprinse între 0 şi 6, cu mulţimea numerelor cu soţ cuprinse între 5 şi 10.

a) La care din elementele reuniunii obţinute se împarte exact numărul 40?

b) La care din elementele reuniunii obţinute se împarte exact 42?

Răspuns: a) Avem $M_1 = \{0, 2, 4, 6\}$; $M_2 = \{6, 8, 10\}$, iar reuniunea lui M_1 cu M_2 este mulţimea $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Pentru rezolvarea punctelor a) şi b) se efectuează calculele care urmează: $40 : 2 = 20$; $40 : 4 = 10$; $40 : 6 = 6$ rest 4; $40 : 8 = 5$; $40 : 10 = 4$.

Deci numerele prin care se împarte exact 40 sînt: 2; 4; 8; 10.

b) În continuare:

$42 : 2 = 21$; $42 : 4 = 10$ rest 2; $42 : 6 = 7$; $42 : 8 = 5$ rest 2; $42 : 10 = 4$ rest 2.

Numerele prin care se împarte exact 42 sînt 2 şi 6.

III.D.52[M4]. Vom nota cu A mulţimea tuturor numerelor naturale prin care se împarte (fără rest) 12 şi cu B mulţimea numerelor naturale prin care se împarte (fără rest) 18. Scrieţi:

a) toate elementele mulţimii A;

b) toate elementele mulţimii B;

c) toate elementele care aparţin mulţimii — reuniune a mulţimii A cu mulţimea B;

d) toate elementele care aparţin mulţimii — intersecţie a mulţimii A cu mulţimea B;

e) toate elementele care aparţin mulţimii A, dar nu aparţin mulţimii B;

f) toate elementele care aparţin mulţimii B, dar nu aparţin mulţimii A.

Răspuns: Avem: a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$; d) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$; e) $A - B = \{4, 12\}$; f) $B - A = \{9, 18\}$.

III.D.53[M4]. Fie A mulţimea tuturor numerelor naturale n avînd cifra unităţilor 0, pentru care avem $600 \leqslant n \leqslant 700$. Separaţi mulţimea A în submulțimi, astfel încît fiecare submulțime să conțină toate numerele din A care împărțite la 4 dau același rest.

Răspuns: Avem: $A = \{600, 610, 620, 630, 640, 650, 660, 670, 680, 690, 700\}$ pentru că fiecare din aceste numere au cifra unităților 0 și sînt mai mari sau egale cu 600 și mai mici sau egale cu 700. Pentru a separa submulțimile cerute, calculăm cîturile dintre fiecare element și numărul 4, resturile și separăm submulțimile conform condițiilor. Avem:

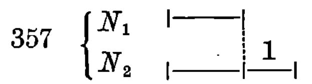
$600 : 4 = 150$; $660 : 4 = 165$; $610 : 4 = 152$ rest 2; $670 : 4 = 167$ rest 2; $620 : 4 = 155$; $680 : 4 = 170$; $630 : 4 = 157$ rest 2; $690 : 4 = 172$ rest 2; $640 : 4 = 160$; $700 : 4 = 175$; $650 : 4 = 162$ rest 2.

Deci avem submulțimile:

$$M_1 = \{600, 620, 640, 660, 680, 700\},\ M_2 = \{610, 630, 650, 670, 690\}.$$

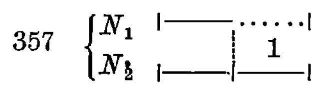
III.D.54. O carte este deschisă la întîmplare. Stabiliți numerele celor două pagini pe care le privim dacă suma acestor numere este 357.

Răspuns: Numerele scrise pe fiecare pagină sînt consecutive. Reprezentînd grafic avem figura:



Deci $(357 - 1) : 2 = N_1$, deci $N_1 = 178$ și $N_2 = N_1 + 1 = 178 + 1 = 179$, unde N_1 și N_2 sînt numerele paginilor.

Mai putem judeca astfel (v. figura):



deci $(357 + 1) : 2 = N_2$, deci $N_2 = 179$ și $N_1 = N_2 - 1 = 179 - 1 = 178$.

III.D.55^{M3}. Din suma numerelor cu soț cel mult egale cu 20, scădeți suma numerelor fără soț cel mult egale cu 20.

a) La care din numerele mai mici decît 10 (diferite de 0 și 1) se împarte exact diferența obținută?

b) Înmulțind diferența obținută cu 4, obținem un număr care se împarte exact la 5?

Răspuns: Fie M_1 și M_2 mulțimea numerelor cu soț, respectiv fără soț din enunț, $M_1 = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots; 18; 20\}$, $M_2 = \{1; 3; \ldots; 17; 19\}$.

Suma numerelor cu soț cel mult egale cu 20 este:

$$0 + 2 + 4 + \ldots + 18 + 20 = 110.$$

Suma numerelor fără soț cel mult egale cu 20 este:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 17 + 19 = 100.$$

Diferența acestor numere este $110 - 100 = 10$.

a) Diferența obținută se împarte exact la 2 și 5.

b) Înmulțind diferența 10 cu 4 obținem 40 pentru că $10 \times 4 = 40$. Acest număr se împarte exact la 5.

III.D.56^{M2}. Aflaţi mulţimea numerelor naturale care puse în locul lui x fac adevărate scrierile:

a) $35 : 7 > x$; b) $35 : 7 \geqslant x$; c) $(42 : 6) + x \leqslant 10$.

Răspuns: a) Calculînd cîtul $35 : 7 = 5$ rezultă că numerele ce pot înlocui pe x pot fi 0, 1, 2, 3, 4.

b) La valorile 0, 1, 2, 3, 4 se adaugă şi 5 pentru ca scrierea să fie adevărată.

c) Calculînd cîtul $42 : 6$, expresia ajunge la forma $7 + x \leqslant 10$ şi rezultă $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

III.D.57^{M3}. Din mulţimea numerelor naturale mai mici decît 10 separaţi submulţimea ce conţine:

a) numerele prin care se împarte exact 42;

b) numerele prin care se împarte exact 4.

Răspuns: a) Trebuie să împărţim pe 42 la fiecare din numerele naturale mai mici decît 10: împărţirea $42 : 0$ este imposibilă; $42 : 1 = 42$; $42 : 2 = 21$; $42 : 3 = 14$; $42 : 4 = 10$ rest 2; $42 : 5 = 8$ rest 2; $42 : 6 = 7$; $42 : 7 = 6$; $42 : 8 = 5$ rest 2; $42 : 9 = 4$, rest 6, deci mulţimea numerelor prin care se împarte exact 42 este $\{1, 2, 3, 6, 7\}$, iar mulţimea numerelor prin care nu se împarte exact 42 este $\{4, 5, 8, 9\}$.

b) Numerele prin care se împarte exact 4 sînt: 1, 2, 4.

III.E. Ordinea efectuării operaţiilor

III.E.1. Calculaţi:

a) $20 + 36 + 12 + 15$; b) $700 : 25 : 5$;
$369 + 10 - 20 - 36$; $1\,238 : 2 : 2$;
$1\,326 - 236 - 234 - 113$; $87\,000 : 100 : 3$.

Răspuns: Avem:

a) $20 + 36 + 12 + 15 = 83$; b) $700 : 25 : 5 = 28 : 5 = 5$ rest 3;
$369 + 10 - 20 - 36 = 323$; $1\,238 : 2 : 2 = 619 : 2 = 309$ rest 1,
$1\,326 - 236 - 234 - 113 = 743$. $87\,000 : 100 : 3 = 870 : 3 = 290$.

III.E.2. Efectuaţi întîi operaţiile de ordinul II (înmulţirile şi împărţirile) apoi pe cele de ordinul I (adunările şi scăderile):

a) $3\,475 + 278 : 2 + 113$; b) $10\,000 - 34\,300 : 10 : 5$;
c) $836 \times 2 + 318 : 3 - 123 : 3$; d) $276 + 7\,385 \times 2 \times 7$.

ăspuns: Avem:

a) $3\,475 + 278 : 2 + 113 = 3\,475 + 139 + 113 = 3\,727$;

b) $10\,000 - 34\,300 : 10 : 5 = 10\,000 - 3\,430 : 5 = 10\,000 - 686 = 9\,314$;

c) $836 \times 2 + 318 : 3 - 123 : 3 = 1\,672 + 106 - 41 = 1\,737$;

d) $276 + 7\,385 \times 2 \times 7 = 276 + 14\,770 \times 7 = 276 + 103\,390 = 103\,666$.

III.E.3. Calculaţi:

a) $100\,464 : (101 - 32) + 627\,900 : 8\,050$;

b) $(3\,044 + 2\,056) : 17 + 3\,075 : 15 - 6\,992 : 38 : 23$;

c) $(1\,800 - 1\,250) : 10 + 220 : 11 \times (1\,200 : 40 - 600 : 15 + 25)$.

7—c. 850

Răspuns : Avem :

a) $100\,464 : (101-32) + 627\,900 : 8\,050 = 100\,464 : 69+78 = 1\,456 + 78 = 1\,534$;

b) $(3\,044+2\,056) : 17+3\,075 : 15-6\,992 : 38 : 23 = 5\,100 : 17 + 205 - 184 : 23 = 300 + 205 - 8 = 497$;

c) $(1\,800 - 1\,250) : 10 + 220 : 11 \times (1\,200 : 40 - 600 : 15 + 25) = 550 : 10 + 220 : 11 \times (30 - 40 + 25) = 55 + 20 \times 15 = 55 + 300 = 355$.

III.E.4. Aplicînd regulile folosite în rezolvarea exercițiilor anterioare calculați :

a) $(14 + 102) \times 11$; b) $66 : 11 + 40 : 5$;
$(86 + 14) \times 9$; $(96 : 3 : 4) \times 11$;
$25 \times (175 + 15)$; $(80 - 64) : 2 + 24 + 12 \times 5$.

Răspuns : Avem :

a) $(14+102)\times 11 = 116 \times 11 = 1\,276$;
$(86+14)\times 9 = 900$;
$25 \times (175 + 15) = 4\,750$;

b) $66 : 11+40 : 5 = 6+8 = 14$; $(96 : 3 : 4)\times 11 = (32 : 4)\times 11 = 8 \times 11 = 88$; $(80 - 64) : 2 + 24 + 12 \times 5 = 16 : 2 + 24 + 60 = 8 + 24 + 60 = 92$.

III.E.5. Calculați :

$109\,452\,671 - (15\,006 + 1\,252 + 239\,415)$;
$98 \times 12 + 105 \times 16 - 102 \times 25$;
$100\,000 : 25 + 0 : 1\,499 + 1 : 1$;
$(760 : 19 + 25) \times 13 - 120 : 3$;
$(2\,700 + 450) : 15 - 10$.

Răspuns : Avem :

$109\,452\,671 - (15\,006 + 1\,252 + 239\,415) = 109\,196\,998$;
$98 \times 12 + 105 \times 16 - 102 \times 25 = 1\,176 + 1\,680 - 2\,550 = 306$;
$100\,000 : 25 + 0 : 1\,499 + 1 : 1 = 4\,000 + 0 + 1 = 4\,001$;
$(760 : 19 + 25) \times 13 - 120 : 3 = (40 + 25) \times 13 - 40 = 845 - 40 = 805$;
$(2\,700 + 450) : 15 - 10 = 3\,150 : 15 - 10 = 210 - 10 = 200$.

III.E.6. Știind ordinea de efectuare a operațiilor dintr-un exercițiu, puteți găsi valori pentru a, b, c pentru ca fiecare din egalitățile :

a) $b \times 900 \times a \times 36 \times 7 = 0$,
b) $(a \times b) - (6 \times c) - 6 = 0$,
c) $(a - b) \times c = 0$

să fie adevărată?

Răspuns : În primul caz, $b = 0$ sau $a = 0$. În al doilea caz putem lua $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, iar în al treilea, $c = 0$ şi a, b oarecare, sau $a = b$ şi c oarecare.

III.E.7. În exerciţiul de mai jos:

$$5 \times 4 : 2 + 8 - 2$$

folosiţi paranteze pentru a obţine, pe rînd, rezultatele 0 şi 16.

(Emil Moise, G.M., 6/1984)

Răspuns : Avem :

a) $5 \times 4 : (2 + 8) - 2 = 20 : 10 - 2 = 2 - 2 = 0$;
b) $5 \times 4 : 2 + 8 - 2 = 20 : 2 + 8 - 2 = 10 + 6 = 16$.

III.E.8. Se dau următoarele şapte „egalităţi" :

a) 1 2 3 = 1;
b) 1 2 3 4 = 1;
c) 1 2 3 4 5 = 1;
d) 1 2 3 4 5 6 = 1;
e) 1 2 3 4 5 6 7 = 1;
f) 1 2 3 4 5 6 7 8 = 1;
g) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1.

Fără a schimba ordinea cifrelor, puneţi între ele semnele aritmetice +, —, :, × şi paranteze ( ) pentru a obţine egalităţi matematice.

Răspuns : Avem :

a) $(1 + 2) : 3 = 1$;
b) $1 \times (2 + 3) - 4 = 1$;
c) $(1 + 23) : 4 - 5 = 1$ sau $(12 - 3) : (4 + 5) = 1$;
d) $(12 + 3 - 4) : (5 + 6) = 1$ sau $(12 + 3 - 4 - 5) : 6 = 1$;
e) $(1 \times 2 \times 3 \times 4) - (5 \times 6 - 7) = 1$;
f) $(1 + 2 \times 3 \times 4) : 5 : (6 + 7 - 8) = 1$;
g) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (6 + 7 - 8 + 9) = 1$.

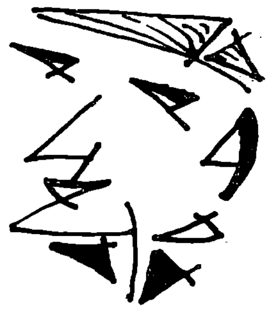
III.E.9. Se dau „exerciţiile" :

a) $6 + 6 + 6 = 30$;
b) $5 + 5 + 5 = 30$;
c) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$.

Schimbaţi semnele şi folosiţi, eventual, paranteze, în aşa fel încît egalităţile să fie adevărate.

Răspuns : Avem :

$6 \times 6 - 6 = 30$;
$5 \times 5 + 5 = 30$;
$(3 : 3 + 3 \times 3) \times 3 = 30$.



UNITĂȚI DE MĂSURĂ

IV.1. Trebuie să măsurați lungimea și lățimea clasei. Ce unitate de măsură veți folosi?

Dar pentru a stabili lungimea drumului de la școală pînă acasă?

Dar pentru a afla lungimea drumului din orașul în care locuiți pînă în satul unde locuiesc bunicii?

Răspuns : Pentru a măsura lungimea clasei vom folosi metrul. Pentru a stabili lungimea drumului de la școală pînă acasă vom putea folosi hectometrul, iar în ultimul caz, kilometrul.

IV.2. Ce unitate veți folosi pentru a determina cantitatea de hîrtie pe care a adus-o un elev în vederea realizării angajamentului economic?

Dar pentru a determina capacitatea vasului în care bunica păstrează laptele?

Răspuns : În primul caz putem folosi kilogramul. Pentru al doilea caz putem folosi litrul.

IV.3. De cîte ori :

a) 1 km este mai mare decît 1 m? Dar decît un dam?

b) 1 m este mai mare decît 1 dm? Dar decît 1 mm?

c) 1 g este mai mare decît 1 cg? Dar decît 1 mg?

d) 1 q este mai mare decît 1 kg?

e) 1 t este mai mare decît 1 kg? Dar decît 1 q?

f) 1 dal este mai mare decît 1 l ?Dar decît 1 cl?

Răspuns : a) 1 km este mai mare decît 1 m de 1 000 de ori. 1 km este mai mare decît 1 dam de 100 de ori;

b) 1 m este mai mare decît 1 dm de 10 ori, iar 1 m este de 1 000 de ori mai mare decît 1 mm;

c) 1 g este de 100 ori mai mare decît 1 cg și de 1 000 de ori mai mare decît 1 mg;

d) 1 q este de 100 de ori mai mare decît 1 kg.

e) 1 t este de 1 000 de ori mai mare decît 1 kg și de 10 ori mai mare decît 1 q.

f) 1 dal este de 10 ori mai mare decît 1 l și de 1 000 de ori decît 1 cl.

IV.4. De cîte ori :
a) 1 l este mai mic decît 1 kl? Dar decît 1 dal?
b) 1 dam este mai mic decît 1 km? Dar decît 1 hm?
c) 1 dag este mai mic decît 1 kg?
d) 1 ml este mai mic decît 1 dal? Dar decît 1 dl?
e) 1 hg este mai mic decît 1 kg? Dar decît 1 t?
f) 1 dal este mai mic decît 1 hl? Dar decît 1 l?
g) 1 mg este mai mic decît 1 cg? Dar decît 1 g?

Răspuns : a) 1 l este de 1 000 de mai mic decît 1 kl şi de 10 ori decît 1 dal;
b) 1 dam este de 100 de ori mai mic decît 1 km şi de 10 ori decît 1 hm;
c) 1 dag este de 100 de ori mai mic decît 1 kg;
d) 1 ml este de 10 000 de ori mai mic decît 1 dal şi de 100 ori decît 1 dl;
e) 1 hg este de 10 ori mai mic decît 1 kg şi de 10 000 ori decît 1 t;
f) 1 dal este de 10 ori mai mic decît 1 hl şi de 10 ori mai mare decît 1 l;
g) 1 mg este de 10 ori mai mic decît 1 cg şi de 1 000 ori mai mic decît 1 g.

IV.5. Transformaţi :

a) 5 km = ? m = ? dm;
30 000 dam = ? m;
5 000 g = ? dg = ? cg;

b) 7 000 l = ? dal = ? kl;
9 dl = ? cl = ? ml;
87 kl = ? dal = ? dl;

c) 7 kg = ? hg = ? dag;
70 000 hg = ? q = ? t;
98 000 cg = ? dg = ? g;

d) 84 luni = ? ani;
7 decenii = ? ani;
5 000 ani = ? secole.


ăspuns : Avem :

a)
5 km = 5 000 m = 50 000 dm;
30 000 dam = 300 000 m;
5 000 g = 50 000 dg = 500 000 cg;

b)
7 000 l = 700 dal = 7 kl;
9 dl = 90 cl = 900 ml;
87 kl = 8 700 dal = 870 000 dl;

c) 7 kg = 70 hg = 700 dag;
70 000 hg = 70 q = 7 t;
98 000 cg = 9 800 dg = 980 g;

d) 84 luni = 7 ani;
7 decenii = 70 ani;
5 000 ani = 50 secole.

IV.6. Calculaţi sumele :

a) 78 km + 230 m = ? m;
13 hl + 6 l = ? l;
80 t + 245 000 hg = ? kg;
7 986 dam + 80 m = ? dm;

b) 15 800 g + 270 dag = ? hg;
2 700 cg + 300 g = ? g;
7 000 ml + 30 dl = ? l;
3 000 dm + 320 m = ? dam.


ăspuns : Avem :
a) 78 km + 230 m = 78 000 m + 230 m = 78 230 m;
13 hl + 6 l = 1 300 l + 6 l = 1 306 l;
80 t + 245 000 hg = 80 000 kg + 24 500 kg = 104 500 kg;
7 986 dam + 80 m = 798 600 dm + 800 dm = 799 400 dm;

b) $15\,800 \text{ g} + 270 \text{ dag} = 158 \text{ hg} + 27 \text{ hg} = 185 \text{ hg}$;
$2\,700 \text{ cg} + 300 \text{ g} = 27 \text{ g} + 300 \text{ g} = 327 \text{ g}$;
$3\,000 \text{ dm} + 320 \text{ m} = 30 \text{ dam} + 32 \text{ dam} = 62 \text{ dam}$.

IV.7. Aflați răspunsurile :

a) $7\,000 \text{ cm} - 70 \text{ mm} = ? \text{ mm}$;
$3\,800 \text{ dam} - 98 \text{ m} = ? \text{ m}$;
$36 \text{ hg} - 190 \text{ dag} = ? \text{ g}$;
$40 \text{ hg} - 300 \text{ dag} = ? \text{ hg}$;

b) $340 \text{ l} - 7 \text{ dal} = ? \text{ dal}$;
$37\,000 \text{ l} - 11 \text{ hl} = ? \text{ dl}$;
$7\,300 \text{ kl} - 389 \text{ dal} = ? \text{ l}$;
$3 \text{ t} - 2\,000 \text{ kg} = ? \text{ t}$.

ăspuns : Avem :
a) $7\,000 \text{ cm} - 70 \text{ mm} = 69\,930 \text{ mm}$;
$3\,800 \text{ dam} - 98 \text{ m} = 37\,902 \text{ m}$;
$36 \text{ hg} - 190 \text{ dag} = 3\,600 \text{ g} - 1\,900 \text{ g} = 1\,700 \text{ g}$;
$40 \text{ hg} - 300 \text{ dag} = 40 \text{ hg} - 30 \text{ hg} = 10 \text{ hg}$;
b) $340 \text{ l} - 7 \text{ dal} = 34 \text{ dal} - 7 \text{ dal} = 27 \text{ dal}$;
$37\,000 \text{ l} - 11 \text{ hl} = 359\,000 \text{ dl}$;
$7\,300 \text{ kl} - 389 \text{ dal} = 7\,296\,110 \text{ l}$;
$3 \text{ t} - 2\,000 \text{ kg} = 1 \text{ t}$.

IV.8. Calculați produsele și cîturile :

a) $3\,200 \text{ dm} \times 3 = ? \text{ m}$;
$7 \times 380 \text{ kl} = ? \text{ l}$;
$36 \times 12\,000 \text{ t} = ? \text{ kg}$;

b) $48\,000 \text{ m} : 3 = ? \text{ dm}$;
$8\,955 \text{ l} : 5 = ? \text{ cl}$;
$763\,000 \text{ kg} : 2 = ? \text{ q}$;

ăspuns : Avem :
a) $3\,200 \text{ dm} \times 3 = 960 \text{ m}$;
$7 \times 380 \text{ kl} = 2\,660\,000 \text{ l}$;
$36 \times 12\,000 \text{ t} = 432\,000\,000 \text{ kg}$;
b) $48\,000 \text{ m} : 3 = 160\,000 \text{ dm}$;
$8\,955 \text{ l} : 5 = 179\,100 \text{ cl}$;
$763\,000 \text{ kg} : 2 = 3\,815 \text{ q}$.

IV.9. Un parașutist sare dintr-un avion aflat la înălțimea de 12 000 m. Exprimați această înălțime în kilometri.

Răspuns : Parașutistul sare de la înățimea de 12 kilometri.

IV.10. Peste un rîu s-a construit un pod lung de 2 000 m. Care este lungimea podului exprimată în kilometri?

Răspuns : Podul are lungimea de 2 kilometri.

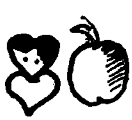
IV.11. Un camion poate transporta 5 000 kg de pietriș. Exprimați această cantitate în tone.

Răspuns : Capacitatea de transport a camionului este 5 tone.

IV.12. O cisternă are capacitatea de 7 kl. Exprimați această capacitate în litri.

Răspuns : Capacitatea cisternei este 7 000 litri.

IV.13. Într-un camion s-au încărcat 2 t și 5 q de cartofi. a) Cîte quintale de cartofi s-au încărcat în camion?



b) Cîte kilograme de cartofi s-au încărcat?

Răspuns : În camion s-au încărcat: a) 25 q ; b) 2 500 kg.

IV.14. Cîte zile are anul? Cîți ani sînt în 9 secole? Dar în 14 secole? Dar în 19 secole?

Răspuns : Anul are 365 sau 366 de zile; în 9 secole sînt 900 ani; în 14 secole sînt 1 400 ani, iar în 19 secole, 1 900 ani.

IV.15. Un copil spune că și-a serbat a treia oară ziua de naștere, cînd a împlinit vîrsta de 12 ani. De ce?

Răspuns : A fost născut într-o zi de 29 a lunii februarie.

IV.16. Pe drumul dintre sat și oraș, un automobilist a parcurs 7 000 m și i-au mai rămas 4 km pînă la destinație. Ce distanță este între sat și oraș?

Răspuns : Distanța este de 11 km sau, altfel exprimat, 11 000 m.

IV.17. Dintr-o bară lungă de 8 m s-a tăiat o bucată de 30 dm. Cîți decimetri are bucata rămasă?

Răspuns : Bucata rămasă are 50 dm.

IV.18. Pentru un palton se folosesc 3 m de stofă, iar pentru costum cu 25 cm mai mult decît pentru un palton.

Cîți centimetri de stofă trebuie pentru un costum?

Răspuns : Pentru un costum sînt necesari 325 cm.

IV.19. Din două bucăți de sîrmă lungi de 7 m și respectiv 5 m, tata întrebuințează 4 m din prima și 3 m din a doua. Cîți metri de sîrmă au rămas?

Răspuns : Au rămas $7\text{m} + 5\text{m} - (4\text{m} + 3\text{m}) = 5$ m.

IV.20. Cantitatea de cartofi recoltată de pe un ogor s-a încărcat în trei camioane: în primul s-au pus 17 q, în al doilea cu 300 kg mai mult decît în primul, iar în al treilea o cantitate egală cu primele două la un loc.

Cîte kilograme de cartofi s-au încărcat în cele trei camioane?

Răspuns : În cele trei camioane s-au încărcat 7 400 kg cartofi.

IV.21. Într-un siloz sînt 8 t de grîu, iar în altul cu 30 q mai puțin decît în primul. Cîte tone de grîu sînt în cele două silozuri?

Răspuns : În cele două silozuri sînt 13 tone de grîu.

IV.22. În trei cisterne sînt 18 kl de motorină. Știind că în prima se află 60 dal, în a doua cu 20 dal mai mult decît în prima, să se afle cîți kilolitri sînt în a treia cisternă.

Răspuns : În a treia cisternă sînt 16,6 kl.

IV.23. Dintr-un balot de pînză s-au vîndut 8 m, apoi 50 dm.

Cîți metri de pînză au rămas în balot dacă înainte de vînzare au fost 25 m?

Răspuns : Din balot au rămas 12 m.

IV.24. După ce dintr-un butoi plin cu ulei s-au folosit 12 l, au mai rămas cu 30 dl mai mult decît s-a folosit.

Ce capacitate are butoiul?

Răspuns : Capacitatea butoiului este 27 l.

IV.25. O țesătoare, folosind mai multe războaie, a țesut într-o zi 360 m de pînză.

Cîți metri de pînză va țese într-o săptămînă de lucru?

Răspuns : În cele 6 zile ale unei săptămîni de lucru ea va țese 2 160 m.

IV.26. O barcă cu motor parcurge într-o oră 4 km. Vaporul parcurge o distanță de 5 ori mai mare într-o oră decît barca cu motor.

Cu cît este mai mică distanța parcursă într-o oră de barcă decît cea parcursă de vapor?

Răspuns : Distanța este mai mică cu 16 km.

IV.27. Un șlep transportă 730 t de grîu și de 4 ori mai mult porumb decît grîu. Cîte kilograme de cereale a încărcat șlepul?

Răspuns : Șlepul a încărcat 3 650 000 kg grîu.

IV.28. O cantitate de 10 kg de roșii costă 80 lei. Cît costă un kilogram?

Răspuns : Un kilogram de roșii costă 8 lei.

IV.29. Cîți metri de pînză s-au cumpărat pentru confecționarea unor drapele dacă tot materialul s-a plătit cu 150 lei, iar metrul costă 15 lei?

Răspuns : S-au cumpărat 10 m.

IV.30. O cantitate de 78 l de lapte se așază în bidoane de cîte 3 l. Cîte bidoane s-au folosit?

Răspuns : S-au folosit 26 bidoane.

IV.31. Un biciclist parcurge 40 km în 5 ore. Cîți metri a parcurs într-o oră?

Răspuns : Biciclistul a parcurs într-o oră 8 000 m.

IV.32. Într-o pungă sînt 3 kg de orez, iar în alta 500 grame. Care cantitate este mai mică și de cîte ori?

Răspuns : A doua cantitate este mai mică de 6 ori.

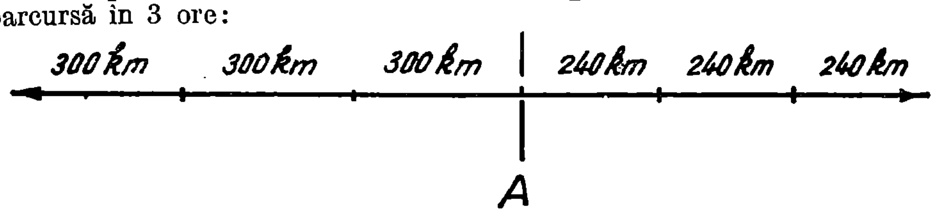
IV.33. Lățimea unui dreptunghi este de 14 cm, iar lungimea sa este de 2 ori mai mare. Aflați perimetrul dreptunghiului.

Răspuns : Perimetrul dreptunghiului este 84 cm.

IV.34. Două avioane au pornit în același timp, din același loc, dar zburînd în direcții opuse.

Știind că primul parcurge 300 km într-o oră, iar al doilea 240 km într-o oră, aflați la ce distanță se află unul față de celălalt după 3 ore de la decolare, apoi după 6 ore.

Răspuns : Observăm desenul care reprezintă schematic distanța parcursă în 3 ore:



După 3 ore, distanța dintre ele este de 1 620 km, respectiv de 3 240 km după 6 ore.

IV.35. O cooperativă agricolă de producție a transportat cele 9 t de grîu recoltate într-o zi în trei camioane.

Ce cantitate de grîu se afla în fiecare camion dacă în primul și al doilea au fost 5 000 kg, iar în primul și al treilea 6 000 kg?

Indicație: Putem să reprezentăm cantitățile aflate în camioane prin I, II și III. Avem:

I + II + III = 9 t = 9 000 kg;
I + II = 5 000 kg;
I + III = 6 000 kg.

Răspuns: În cele trei camioane sînt 2 000 kg, 3 000 kg, respectiv 4 000 kg.

IV.36. Un număr de 12 bucăți de pînză albă și colorată au împreună lungimea totală de 69 m.

Ce lungime are fiecare bucată de pînză albă dacă sînt 3 bucăți de pînză colorată de cîte 8 m? Se presupune că bucățile de pînză albă au aceeași lungime.

Indicație: Se poate folosi prezentarea schematică a problemei:

12 bucăți cu lungimea de 69 m

bucăți pînză albă + bucăți pînză colorată

$(12-3)\times$ lungimea unei bucăți colorate + 3×8 m lungimea unei bucăți de pînză albă

Răspuns: Fiecare bucată de pînză albă are 5 m.

IV.37. Pentru un cearceaf se folosesc 2 m de pînză.

Cîți metri vor rămîne dintr-o bucată de 17 m, dacă din ea se vor confecționa 8 cearceafuri?

Răspuns: Rămîne 1 m de pînză.

IV.38. La o cantină s-au adus 28 l de ulei care au fost turnați în 5 sticle de cîte 1 l fiecare și 2 damigene, fiecare avînd capacitatea de 10 ori mai mare decît a unei sticle.

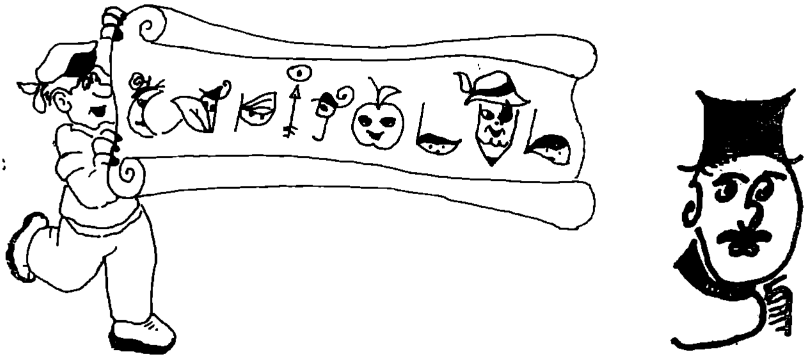
Ajung vasele acestea pentru a depozita întreaga cantitate?

Răspuns: Nu! Rămîne o cantitate de 3 l.

IV.39. O gospodărie agricolă de producție a recoltat 32 t de cartofi, sfeclă roșie cu 15 t mai mult decît cartofi, iar morcovi de 4 ori mai puțin decît cartofi.

Cîte quintale de cartofi, sfeclă și morcovi s-au recoltat?

Răspuns: S-au recoltat 870 q de legume.



FRACȚII ORDINARE

V.1. Luați o bucată de hîrtie dreptunghiulară și pliați-o o dată. Cum pot fi cele două părți una față de cealaltă?

Răspuns : Cele două părți sînt egale ca arie sau inegale.

V.2. Tăiați un măr în două părți egale. Ce sînt fiecare din aceste părți?

Răspuns : Fiecare din cele două părți reprezintă o jumătate de măr sau o doime.

V.3. Tăiați un alt măr în patru părți egale. Ce sînt fiecare din aceste părți?

Răspuns : Fiecare din cele patru părți reprezintă un sfert de măr. sau o pătrime.

V.4. Desenați un dreptunghi, un pătrat, un cerc. Colorați $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$ din suprafața lor. Ce observați dacă vi se cere să colorați $\frac{2}{2}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{8}$ din suprafața fiecărei figuri geometrice?

Răspuns : În al doilea caz colorăm în întregime suprafețele.

V.5. O pîine a fost împărțită în șapte părți egale. Ce reprezintă o parte, două părți, cinci părți, șapte părți din această pîine?

Răspuns : O parte reprezintă $\frac{1}{7}$ din pîine, două părți reprezintă $\frac{2}{7}$ din pîine, etc.

V.6. Luați o bucată de sfoară. Stabiliți cît din lungimea ei reprezintă $\frac{3}{6}$, apoi $\frac{4}{8}$.

Răspuns : $\frac{3}{6}$ din lungimea sforii reprezintă jumătate din lungimea ei. De asemenea, $\frac{4}{8}$ din lungimea ei reprezintă jumătate.

V.7. Cîte douăsprezecimi de litru reprezintă 1 litru?

Răspuns : Într-un litru sînt douăsprezece douăsprezecimi de litru.

V.8. Cîte cincimi de kilogram reprezintă 1 kg?

Răspuns : Într-un kilogram sînt cinci cincimi de kilogram.

V.9. Cîte zecimi de kilometru reprezintă un kilometru?
Răspuns : Într-un kilometru sînt zece zecimi de kilometru.

V.10. Cît reprezintă din an luna august? Dar săptămîna cît reprezintă din lună? Dar ziua cît din săptămînă?

Răspuns : Luna august reprezintă a douăsprezecea parte dintr-un an, săptămîna $\frac{7}{28}$, sau $\frac{7}{29}$, sau $\frac{7}{30}$, sau $\frac{7}{31}$ din lună, iar ziua, $\frac{1}{7}$ din săptămînă.

V.11. Avem 9 nuci. Cîte nuci reprezintă $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{4}{9}$ din cele 9 nuci?

Răspuns : $\frac{2}{9}$ din cele 9 nuci reprezintă 2 nuci; $\frac{1}{9}$ reprezintă o nucă, $\frac{5}{9}$ reprezintă 5 nuci, etc.

V.12. Care parte din oră este un minut? Dar 30 minute? Dar 15 minute?

Răspuns : Un minut reprezintă $\frac{1}{60}$ din oră; 30 minute reprezintă $\frac{1}{2}$ din oră, iar 15 minute, $\frac{1}{4}$ din oră.

V.13. Cît reprezintă dintr-un leu un ban? Dar 25 bani? Dar 50 bani?

Răspuns : Un ban reprezintă $\frac{1}{100}$ dintr-un leu, 25 de bani reprezintă $\frac{1}{4}$ dintr-un leu, iar 50 de bani, $\frac{1}{2}$ dintr-un leu.

V.14. Scrieţi sub formă de fracţie cît reprezintă 1 dm; 1 cm; 1 mm faţă de 1 m.

Răspuns : Avem: 1 dm $=\frac{1}{10}$ m; 1 cm $=\frac{1}{100}$ m; 1 mm $=\frac{1}{1\,000}$ m.

V.15. Scrieţi ce unităţi de măsură reprezintă :

$$\frac{10}{10}\,\text{l};\ \frac{100}{100}\,\text{dag};\ \frac{1\,000}{1\,000}\,\text{m}.$$

Răspuns : Reprezintă litrul, decagramul şi metrul.

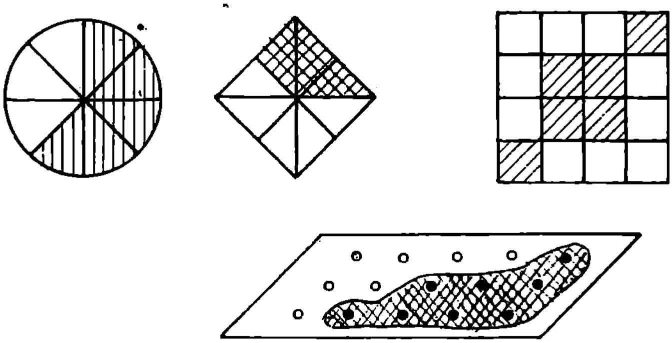
V.16. Cîte părţi din an sînt reprezentate de 7 luni, respectiv 9 luni?

Răspuns : 7 luni reprezintă $\frac{7}{12}$ dintr-un an, iar 9 luni, $\frac{9}{12}$ dintr-un an.

V.17. Cîte zile din săptămînă sînt reprezentate de $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$?

Răspuns : Fracţiile reprezintă 3 zile, 4 zile, 2 zile.

V.18. Scrieţi fracţiile corespunzătoare părţilor haşurate în desen, apoi a celor nehaşurate.



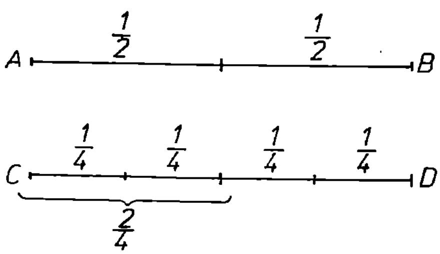
Răspuns : Zonele haşurate reprezintă, respectiv, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{8}{15}$.

V.19. Desenaţi 3 pătrate cu laturile de mărimi diferite. Coloraţi $\frac{1}{4}$ din fiecare. Cum sînt părţile colorate unele faţă de altele?

V.20. Desenaţi cercuri cu raza de 5 cm, 6 cm, 10 cm. Decupaţi-le apoi. Tăiaţi jumătate din fiecare şi comparaţi bucăţile. Cum sînt una faţă de alta? De ce?

Răspuns : Bucăţile au mărimi inegale deoarece razele cercurilor sînt diferite.

V.21. Priviţi cele două segmente AB şi CD:

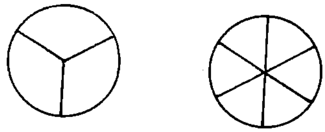


şi înlocuiţi punctele de suspensie cu unul din semnele $<$, $>$ sau $=$:

$$\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{4}\,;\ \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{2}\,;\ \frac{3}{4} \ldots \frac{1}{2}.$$

Răspuns : Avem $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

V.22. Priviţi desenul :

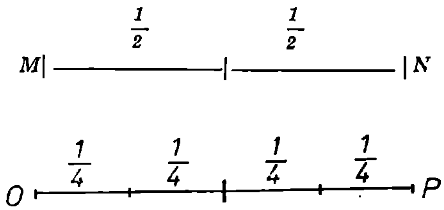


şi stabiliţi relaţia de ordine :

$$\frac{2}{3} \dots \frac{4}{6}; \quad \frac{1}{3} \dots \frac{1}{6}; \quad \frac{3}{3} \dots \frac{5}{6}.$$

Răspuns : Avem : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, $\frac{3}{3} > \frac{5}{6}$.

V.23. Priviţi segmentele :



şi stabiliţi apoi relaţia de ordine:

$$\frac{1}{2} \dots \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{2} \dots \frac{4}{4}; \quad \frac{2}{2} \dots \frac{2}{4}.$$

Răspuns : Avem $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$, $\frac{2}{2} > \frac{2}{4}$.

V.24. Doi copii au muşcat fiecare din cîte o chiflă, egale ca mărime. Întrebaţi cît au muşcat, unul a răspuns că o doime din a sa, iar celălalt două pătrimi din cealaltă. Spuneţi care a muşcat o bucată mai mare?

Răspuns : Copiii au muşcat părţi egale din chifle.

V.25. Trei kilograme de bomboane au fost împărţite astfel :

a) un kilogram în două pachete egale;
b) un kilogram în patru pachete egale;
c) un kilogram în opt pachete egale.

Comparaţi pachetele! Care este mai mare şi de ce? Spuneţi şi cu cît sînt mai mari faţă de celelalte.

Răspuns : Fiecare din pachetele obţinute în cazul a) este mai mare decît fiecare din pachetele obţinute în cazurile b) şi c) de 2 şi, respectiv, 4 ori. Fiecare din pachetele obţinute în cazul b) este de 2 ori mai mare decît fiecare din pachetele obţinute în cazul c).

V.26. Un teren a fost împărţit în 5 parcele egale ca suprafaţă şi s-a cultivat în felul următor : 1 parte cartofi, 2 părţi roşii, iar restul varză.

Ce fracţie din teren reprezintă suprafaţa cultivată cu fiecare fel de legume?

Răspuns : Cu cartofi s-a cultivat $\frac{1}{5}$ din teren, cu roşii, $\frac{2}{5}$ din teren, iar cu varză $\frac{2}{5}$ din teren.

V.27. Scrieţi fracţii echivalente cu:

$$a)\ \frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{7};\quad c)\ \frac{1}{3};\quad d)\ \frac{1}{4}.$$

Răspuns : Avem a) $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{4}{20}$; b) $\frac{1}{7}=\frac{2}{14}=\frac{3}{21}$; c) $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$; d) $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}$.

V.28. Scrieţi în diferite feluri cît reprezintă:

a) 25 bani dintr-un leu;
b) 50 de bani dintr-un leu;
c) 10 minute dintr-o oră;
d) 8 luni dintr-un an.

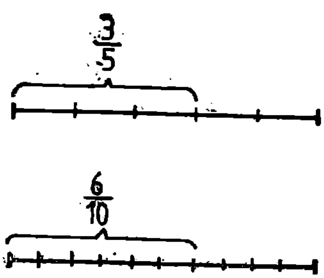
Răspuns : Avem :

a) $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ dintr-un leu; b) $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ dintr-un leu; c) $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$ dintr-o oră; d) $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ dintr-un an.

V.29. Scrieţi cum sînt fracţiile următoare una faţă de cealaltă (reprezentaţi fiecare fracţie pe un segment) :

$$\frac{3}{5}\ \text{şi}\ \frac{6}{10};\quad \frac{3}{4}\ \text{şi}\ \frac{5}{8};\quad \frac{3}{8}\ \text{şi}\ \frac{3}{6};\quad \frac{2}{4}\ \text{şi}\ \frac{4}{8};\quad \frac{4}{5}\ \text{şi}\ \frac{3}{5}.$$

Răspuns : De exemplu:



DECI $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$

V.30. Scrieți în ordine crescătoare fracțiile:

a) $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{3}{5}$; b) $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{3}{4}$.

Răspuns: Avem: a) $\frac{3}{8} < \frac{3}{6} < \frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4}$.

V.31. Scrieți în ordine descrescătoare șirul de fracții:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{6}$

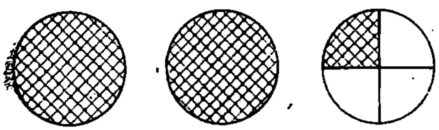
Răspuns: Avem: a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$; b) $\frac{4}{6} > \frac{3}{6} > \frac{2}{6} > \frac{1}{6}$.

V.32. Reprezentați prin pătrate sau cercuri:

a) 2 întregi și $\frac{1}{4}$; b) 1 întreg și $\frac{3}{4}$;

c) 3 întregi și $\frac{1}{2}$; d) 2 întregi și $\frac{5}{8}$.

Răspuns: a) Avem reprezentarea:



2 întregi și $\frac{1}{4}$ sau $2\frac{1}{4}$.

V.33. Pentru un stegulet se întrebuințează $\frac{1}{4}$ m de pînză. Cîte stegulețe se pot confecționa din $2\frac{3}{4}$ m de pînză?

Răspuns: Cu $2\frac{3}{4}$ m pînză se pot confecționa 11 stegulețe.

V.34. Cantitatea de $6\frac{1}{2}$ kg de zahăr este pusă în pungi de $\frac{1}{2}$ kg. Cîte pungi de $\frac{1}{2}$ kg sînt necesare?

Răspuns: Sînt necesare 13 pungi.

V.35. Într-un magazin alimentar s-au umplut cu fidea 60 de pungi de cîte $\frac{1}{2}$ kg fiecare.

Cîte kilograme de fidea s-au pus în aceste pungi?

Răspuns: În pungi s-au pus 30 kg fidea.

V.36. Calculați :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8};\ \frac{3}{8}-\frac{1}{4};$$

$$\frac{7}{8}-\frac{1}{4};\ \frac{5}{8}-\frac{1}{4};\ \frac{5}{8}+\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}+\frac{5}{8}.$$

Răspuns : Avem : $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4};$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\ \frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8};\frac{7}{8}-\frac{1}{4}=\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=$

$=\frac{5}{8};\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8};\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8};\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}.$

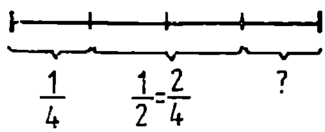
V.37. Care este capacitatea butoiului cu vin din care s-a turnat conținutul în 360 de sticle de $\frac{1}{4}$ l fiecare?

Răspuns : Capacitatea butoiului este de 90 l.

V.38. O brigadă de muncitori a săpat un șanț în 3 zile. În prima zi a săpat $\frac{1}{4}$ din lungimea lui, iar a doua zi $\frac{1}{2}$ tot din lungimea rămasă.

Care parte din lungimea șanțului a fost săpată în a treia zi?

Răspuns : În a treia zi a fost săpată $\frac{1}{4}$ din lungimea șanțului



căci $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ este fracția ce reprezintă lungimea șanțului săpat în primele două zile, iar $1-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ este fracția care reprezintă lungimea șanțului săpat în a treia zi.

V.39. Un tractorist a arat într-o zi $\frac{1}{4}$ din terenul repartizat, iar a doua zi încă $\frac{2}{8}$ din teren.

Ce parte din suprafață a rămas nearată?

Indicație : Reprezentați datele prin segmente.

Răspuns : Au rămas nearate $\frac{4}{8}$ din suprafață.

V.40. O suprafaţă de $\frac{2}{5}$ din lotul şcolii este ocupată de grădina de zarzavat, iar $\frac{2}{5}$ de livadă.

Ce parte din lotul şcolii este ocupată de grădina de zarzavat şi de livadă împreună?

Răspuns : Grădina de zarzavat şi livada ocupă $\frac{4}{5}$ din lotul şcolii.

V.41. În pădure sînt pini şi brazi. Pinii ocupă $\frac{2}{7}$ din întinderea pădurii, iar brazii $\frac{4}{7}$.

Ce parte din întinderea pădurii ocupă pinii şi brazii împreună?

Răspuns : Pinii şi brazii ocupă $\frac{6}{7}$ din întinderea pădurii.

V.42. Din întreaga cantitate de legume primită, un aprozar vinde în prima zi $\frac{3}{8}$, iar a doua şi a treia zi cîte $\frac{2}{8}$

Cîte părţi din cantitatea de legume primită au fost vîndute?

Răspuns : Au fost vîndute $\frac{7}{8}$ din cantitatea de legume.

V.43. Un călător parcurge $\frac{2}{9}$ din lungimea unui drum cu trenul, iar restul cu vaporul.

Ce fracţie din lungimea drumului a fost parcursă cu vaporul?

Răspuns : Cu vaporul au fost parcurse $\frac{7}{9}$ din drum.

V.44. Din numărul de muncitori al unei ţesătorii, $\frac{4}{9}$ sînt femei iar restul bărbaţi.

Ce fracţie din numărul total de muncitori reprezintă numărul de bărbaţi? Comparaţi această fracţie cu cea care reprezintă numărul de femei din ţesătorie.

Răspuns : Numărul de bărbaţi reprezintă $\frac{5}{9}$ din numărul total de muncitori. Numărul de femei este cu $\frac{1}{9}$ mai mic.

V.45. Un vapor de mărfuri trebuie descărcat în trei zile. În prima zi s-au descărcat $\frac{1}{8}$ din întreaga cantitate de mărfuri, a doua zi cu $\frac{1}{8}$ mai mult decît în prima zi, iar a treia zi cu $\frac{2}{8}$ mai mult ca în primele două zile.

91

S-a terminat de descărcat vaporul în cele trei zile?

Răspuns : Descărcarea vaporului a fost terminată, $\frac{8}{8}$ reprezentînd întreaga cantitate de mărfuri.

V.46. Suma a două fracții este $\frac{5}{6}$, un termen fiind $\frac{1}{6}$. Aflați celălalt termen.

Răspuns : Celălalt termen este $\frac{4}{6}$.

V.47. Într-o familie se consumă dimineața $\frac{3}{4}$ dintr-o pîine, la amiază $\frac{5}{4}$ și seara o pîine.

Cîte pîini trebuie cumpărate zilnic în această familie?
Răspuns : Familia cumpără zilnic 3 pîini.

V.48. Andrei a cumpărat $\frac{1}{2}$ kg cartofi, $\frac{3}{2}$ kg ceapă și $1\frac{1}{2}$ kg de roșii.
Cîntăresc cumpărăturile 5 kg?

Răspuns : Cumpărăturile cîntăresc $3\frac{1}{2}$ kg.

V.49. Un excursionist pornește de la cabana *A* spre cabana *B*. După 45 km se oprește și face un popas lung, zicîndu-și că mai are de parcurs doar un sfert din drum.
Care este lungimea drumului dintre cabane?
Răspuns : Lungimea drumului este 60 km.

V.50. Dintr-o bucată de sîrmă de 1 m s-au tăiat $\frac{3}{4}$.

Cîți centimetri de sîrmă au rămas?
Răspuns : Au rămas 25 cm.

V.51. Un tren de marfă este încărcat cu 980 t de cereale. A zecea parte din cantitate este grîu, a cincea este porumb, iar restul orez.
Cîte tone de orez sînt în trenul de marfă?

Răspuns : Avem : 980 t : 10 = 98 t (cantitatea de grîu) ; 980 t : 5 = = 196 t (cantitatea de porumb) ; 98 t + 196 t = 294 t (cantitatea de grîu și porumb) ; 980 t − 294 t = 686 t (cantitatea de orez).

V.52. Într-o termocentrală se aflau 1 536 t cărbune. Într-o săptămînă s-au consumat $\frac{1}{4}$ din cantitatea totală, iar săptămîna următoare $\frac{3}{8}$ tot din cantitatea totală.

Cîte tone de cărbuni au rămas pentru a treia săptămînă?
Răspuns : Pentru a treia săptămînă au rămas 576 t.

V.53. Într-un magazin de încălţăminte s-au adus 2 400 de perechi de sandale.

Într-o săptămînă s-au vîndut $\frac{3}{5}$ din numărul total, iar în alta $\frac{7}{10}$ din rest.

Au rămas perechi de sandale în magazin?

Răspuns : În magazin au rămas 288 perechi de sandale.

V.54. Un tractorist a lucrat într-un an 2 560 de ore. Numărul de zile pentru arăturile de primăvară reprezintă $\frac{1}{2}$ din numărul total de ore, pentru cele de vară $\frac{3}{8}$ din numărul total de ore, iar pentru arăturile de toamnă, restul.

Cîte ore a lucrat pentru arăturile de toamnă?

Răspuns : Arăturile de toamnă necesită 320 de ore.

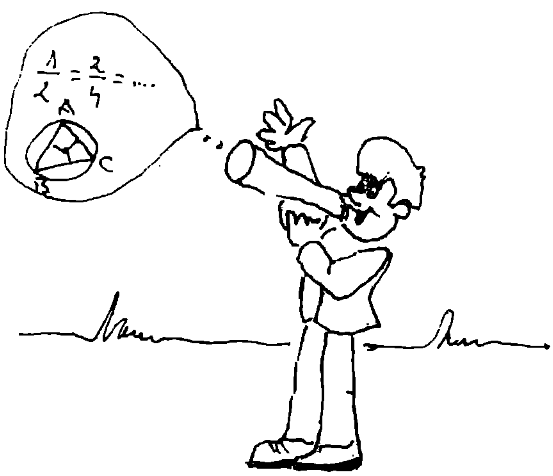
V.55. La o cantină s-au adus 100 kg de carne. În prima zi s-a consumat o pătrime, a doua o zi o treime din cantitatea de carne rămasă, iar a treia zi a cincea parte din cantitatea rămasă după a doua zi, după care a mai rămas o cantitate de carne care s-a consumat în ziua a patra.

Aflaţi această cantitate.

Răspuns : În ultima zi s-au consumat 40 kg carne.

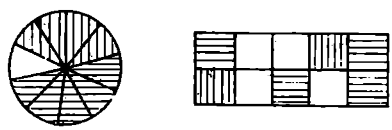
V.56. O echipă de muncitori sapă un şanţ cu lungimea de 54 m în 3 zile. Cîţi metri de şanţ s-au săpat a treia zi dacă în prima s-au săpat $\frac{4}{9}$ din lungimea totală, iar în a doua zi $\frac{7}{10}$ din ce a rămas?

Răspuns : În a treia zi s-au săpat 9 m.



FRACȚII ZECIMALE

VI.1. Priviți desenele din dreapta :



Cîte părți din aceste figuri geometrice s-au hașurat cu linii orizontale? Dar cu linii verticale? Cîte părți au rămas nehașurate? Ce fracții reprezintă?

Răspuns : În prima figură s-au hașurat cu linii orizontale 5 părți și cu linii verticale 4 părți și reprezintă: 5 zecimi, respectiv 4 zecimi. În a doua figură s-au hașurat cu linii orizontale 4 părți și cu linii verticale 2 părți și reprezintă: 4 zecimi, respectiv două zecimi.

VI.2. Desenați un pătrat. Împărțiți-l în 10 părți egale. Colorați, pe rînd, $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$ din suprafața lui.

VI.3. Desenați un dreptunghi și tăiați $\frac{1}{10}$, apoi $\frac{3}{10}$ din el.

Cîte zecimi au rămas?

Răspuns : În primul caz au rămas $\frac{9}{10}$, iar în al doilea $\frac{7}{10}$.

VI.4. Cîte zecimi are un întreg? Dar 2 întregi, 4 întregi, 8 întregi?

Răspuns : Un întreg are 10 zecimi, doi întregi au 20 de zecimi, 4 întregi au 40 de zecimi, iar 8 întregi, 80 de zecimi.

VI.5. Cîte sutimi, cîte miimi au : un întreg, 3 întregi, 5 întregi, 6 întregi?

Răspuns : Un întreg are 100 de sutimi sau o mie miimi; 3 întregi au 300 de sutimi sau 3 000 miimi, etc.

VI.6. Spuneți cît reprezintă dintr-un metru, un decimetru. Dar 1 l dintr-un hectolitru, 1 mg dintr-un gram, 1 cm dintr-un decimetru?

Răspuns : Un decimetru este a zecea parte dintr-un metru; un litru este a suta parte dintr-un hectolitru, un miligram este a mia parte dintr-un gram, un centimetru este a zecea parte dintr-un decimetru.

VI.7. Citiţi următoarele numere zecimale, apoi arătaţi ce unitate de măsură reprezintă fiecare cifră :

3,4 kg ; 8,5 g ; 12,6 m ; 4,8 m ; 5,3 l.

VI.8. Scrieţi $\frac{7}{10}$ dam ; $\frac{9}{100}$ hl ; $\frac{3}{1\,000}$ mg ; $\frac{15}{100}$ kg ; $\frac{9}{100}$ q ; $\frac{13}{1\,000}$ hl, folosind fracţiile zecimale.

Răspuns : Avem :

$\frac{7}{10}$ dam = 0,7 dam ; $\frac{9}{100}$ hl = 0,09 hl ; $\frac{3}{1\,000}$ mg = 0,003 mg ; $\frac{15}{100}$ kg = 0,15 kg ; $\frac{9}{100}$ q = 0,09 q ; $\frac{13}{1\,000}$ hl = 0,013 hl.

VI.9. Transformaţi în unităţi de măsură mai mari de 10, 100, 1 000 ori decît unitatea de măsură dată :

8 dm ; 9 l ; 3 q ; 17 dal ; 3 dal ; 13 cm ; 7 dl ; 9 kg.

Răspuns : Avem :

8 dm = 0,8 m = 0,08 dam = 0,008 hm ; 9 l = 0,9 dal = 0,09 hl = 0,009 kl ; 17 dal = 1,7 hl = 0,17 kl ; 3 dal = 0,3 hl = 0,03 kl ; 7 dl = 0,7 l = 0,07 dal = 0,007 hl ; 9 kg = 0,09 q = 0,009 t.

VI.10. Scrieţi fracţii zecimale considerînd întregul reprezentat de prima unitate de măsură :

1 dam şi 37 m ; 8 km şi 36 hm ; 9 t, 3 q şi 3 kg ; 7 dal, 5 l şi 3 dl ; 9 hm şi 3 dam ; 13 l şi 3 ml.

Răspuns : Avem :

1 dam şi 37 m = 4,7 dam ; 8 km şi 36 hm = 11,6 km ; 9 t, 3 q şi 3 kg = 9,303 t ; 7 dal, 5 l şi 3 dl = 7,53 dal ; 9 hm şi 3 dam = 9,3 hm ; 13 l şi 3 ml = 13,003 l.

VI.11. a) Transformaţi în litri :

97 dl ; 3 cl ; 36 ml ;

b) Transformaţi în kilograme :

3 hg ; 7 dag ; 5 kg.

Răspuns : Avem :

a) 97 dl = 9,7 l ; 3 cl = 0,03 l ; 36 ml = 0,036 l.
b) 3 hg = 0,3 kg ; 7 dag = 0,07 kg.

VI.12. Drumul de la şcoală pînă acasă este de 3 hm şi 8 dam.

Cîţi decametri sînt de la şcoală pînă acasă ? Dar hectometri ?

Răspuns : Drumul, exprimat în decametri, are lungimea 38 dam, iar exprimat în hectometri, 3,8 hm.

VI.13. Alegeţi răspunsul corect :

Lungimea unei cutii de chibrituri este : de 5 cm, de 0,5 dm, sau de 0,05 m.

Răspuns : Toate dimensiunile sînt corecte.

VI.14. Scrieţi următoarele numere ca sutimi, apoi ca miimi:

3 dl; 3 m; 8 mm.

Ce unitate de măsură vor reprezenta?

Răspuns: 3 dl $= 0,03$ dal $= 0,003$ hl; 3 m $= 0,03$ hm $= 0,003$ km; 8 mm $= 0,08$ dm $= 0,008$ m.

VI.15. Înălţimea unei litere mici de tipar folosite la scrierea textelor din manual este de 4,5 mm.

Cîţi decimetri are înălţimea unei litere de tipar? Dar metri?

Răspuns: În decimetri, înălţimea literei este 0,045 dm, iar în metri 0,0045 m.

VI.16. Un centru pentru produse lactate vinde în prima săptămînă 256,75 l lapte, iar în a doua 256,750 l.

Care din cele două cantităţi de lapte este mai mare?

Răspuns: Cantităţile sînt egale.

VI.17. Comparaţi:

a) 3 şi 3,279; 1,234 şi 1,123; 47,102 şi 39,987; 2,700 şi 270; 3,909 şi 39,09; 44,9 şi 44,90;

b) 0,250 tone şi 0,25 tone; $\frac{25}{100}$ tone şi $\frac{250}{1\,000}$ tone;

c) 25 bani, 0,25 lei şi $\frac{1}{4}$ lei;

d) 50 bani, 0,50 lei şi $\frac{1}{2}$ leu.

Răspuns: Avem: a) $3 < 3,279$; $1,234 > 1,123$; $47,102 > 39,987$; $2,700 < 270$; $3,909 < 39,09$; $44,9 = 44,90$; b) 0,250 tone $= 0,25$ tone; $\frac{25}{100}$ tone $= \frac{250}{1\,000}$ tone; c) 25 bani $= 0,25$ lei $= \frac{1}{4}$ lei; c) 50 bani $= 0,50$ lei $= \frac{1}{2}$ leu.

VI.18. Scrieţi în ordine crescătoare numerele:

a) 9,7; 3,7; 4,36; 100,5; 0,250; 0,26;

b) 245,36; 245,736; 388,13; 389,13; 40,312.

Răspuns: Avem: a) $0,250 < 0,26 < 3,7 < 4,36 < 9,7 < 100,5$; b) $40,312 < 245,36 < 245,736 < 388,13 < 389,13$.

VI.19. Scrieţi în ordine descrescătoare numerele:

a) 5,401; 5; 5,31; 5,403; 5,67;

b) 3,9; 3,82; 3,71; 2,6; 3,5; 2,71.

Răspuns: Avem: a) $5,67 > 5,403 > 5,401 > 5,31 > 5$; b) $3,9 > 3,82 > 3,71 > 3,5 > 2,71 > 2,6$.

VI.20. Găsiţi oral sumele:

$3,2 + 5$; $3,5 + 4$; $25,037 + 9$; $14 + 0,513$;

$0,007 + 12$; $0,08 + 1$; $0,527 + 24$; $0,001 + 4$.

VI.21. Aflaţi răspunsurile :

2,52 m + 9 m ; 32 m + 0,007 m ; 9,36 l + 45,36 dl ;
7 l + 1,5 l ; 20,004 kg + 17,005 kg ; 7,95 kg + 36,8 q ;
6,275 g + 450 g ; 4,59 l + 19 l ; 96 hm + 35 km.

Răspuns : Avem :

2,52 m + 9 m = 11,52 m ; 32 m + 0,007 m = 32,007 m ; 9,36 l + + 45,36 dl = 9,36 l + 4,536 l = 13,896 l ; 7 l + 1,5 l = 8,5 l ; 20,004 kg + + 17,005 kg = 37,009 kg ; 7,95 kg + 36,8 q = 3 687,95 kg ; 6,275 g + + 450 g = 456,275 g ; 4,59 l + 19 l = 23,59 l ; 96 hm + 35 km = 44,6 km.

VI.22. Într-un bidon erau 25,750 l ulei de floarea soarelui, iar în altul 410 dl ulei de porumb.

Cîţi litri de ulei se aflau în cele două bidoane?

Răspuns : În cele două bidoane se aflau 66,750 l.

VI.23. Calculaţi sumele, apoi verificaţi-le :

326,50 + 4 125 ; 178,325 + 322,475 ;
8 055,450 + 1 011 ; 733,265 + 67,045 ;
2,875 + 1,5 ; 70,426 + 179,574 ;
986,154 + 3,985 ; 402,69 + 593,307.


Răspuns : Avem :

326,50 + 4 125 = 4 451,50 ; 178,325 + 322,475 = 500,8 ;
8 055,450 + 1 011 = 9 066,450 ; 733,265 + 67,045 = 800,31 ;
2,875 + 1,5 = 4,35 ; 70,426 + 179,574 = 250 ;
986,154 + 3,985 = 990,139 ; 402,69 + 593,307 = 995,997.

VI.24. Un magazin alimentar a vîndut 1 875,250 kg de orez.

Ce cantitate de orez a fost în magazin dacă au rămas 118,273 kg?

Răspuns: În magazin au fost 1 993,523 kg.

VI.25. O fabrică de conserve a primit pentru prepararea gemurilor 6 475,57 kg de zmeură, 2 691,350 kg de fragi, 1 426 kg de afine şi 832,525 kg de mure.

Ce cantitate de fructe s-a folosit?

Răspuns : S-au folosit 11 425,445 kg fructe.

VI.26. Din trei bucăţi de pînză cu lungimile de 36,83 m ; 714,5 dm şi 4,321 dam se confecţionează lenjerie pentru un cămin de copii.

Cîţi metri de pînză s-au folosit?

Răspuns : S-au folosit 151,49 m de pînză.

VI.27. Suma a doi termeni este egală cu 456,17. Unul din ei fiind 69,435, calculaţi pe celălalt.

Răspuns : Celălalt termen este 386,735.

VI.28. Calculaţi :

406,47 + 90,48 − 130 ; 10 307,425 + 1 396,98 + (6 934,5 − 1 520) ;
110,25 + 79,96 − 85 ; 915,52 + 124,78 + (455,5 − 278) ;
265,19 + 87,35 − 184 ; 2 016,508 + 365,36 + (4 013,75 − 2 597).

Răspuns : Avem :

406,47 + 90,48 − 130 = 366,95 ;
110,25 + 79,96 − 85 = 105,21 ;
265,19 + 87,35 − 184 = 168,54 ;

10 307,425 + 1 396,98 + (6 934,5 − 1 520) = 17 118,905.
915,52 + 124,78 + (455,5 − 278) = 1 217,80.
2 016,508 + 365,36 + (4 013,75 − 2 597) = 3 798,618.

VI.29. Descăzutul este 34 568,45, scăzătorul 122,001. Care este diferenţa?

Răspuns : Diferenţa este 34 446,449.

VI.30. Ştiind că descăzutul este 4 237,02, iar diferenţa 705,72 să se afle scăzătorul.

Răspuns : Scăzătorul este 3 531,30.

VI.31. O fabrică de pîine a folosit 4,257 t de făină pentru pîinea neagră, cu 2 758 kg mai puţină făină pentru pîine de secară decît pentru pîinea neagră şi cu 1,967 t mai puţină făină pentru pîine albă decît cantitatea de făină folosită pentru celelalte sortimente de pîine.

Cîte tone de făină s-au folosit pentru pîine neagră, pîine de secară şi pîine albă?

Răspuns : S-a folosit 9,545 t făină.

VI.32. Pionierii unei şcoli generale din Bucureşti au colectat în primul trimestru al anului pentru realizarea angajamentului economic 23 000,300 kg de hîrtie, 47 000,750 kg de fier şi 24 678 kg de textile.

Care a fost angajamentul economic pe sortimente al pionierilor şcolii dacă în al II-lea trimestru trebuie să mai colecteze 38 999,700 kg de hîrtie, 1 999,25 kg de fier şi 322 kg de textile?

Răspuns : Angajamentul economic este de 62 000 kg hîrtie ; 49 000 kg de fier ; 25 000 kg textile.

VI.33. Un C.A.P. are o livadă de pruni cu suprafaţa de 85,29 ha, alta de meri de 125,25 ha şi una de caişi cu suprafaţa mai mică cu 115,32 ha decît a primelor două livezi la un loc.

Care este suprafaţa acoperită de livezile de pruni, meri şi caişi?

Răspuns : Suprafaţa acoperită de livezi este 305,76 ha.

VI.34. Care număr este mai mare şi cu cît : suma numerelor 437,86 şi 1 385,885 sau diferenţa numerelor 385,43 şi 90,489?

Răspuns : Suma este cu 1 528,804 mai mare decît diferenţa.

VI.35. Suma a trei numere este 16 336,75. Dacă adunăm primul şi al doilea număr obţinem 10 702,50, iar dacă adunăm al doilea şi al treilea număr obţinem 6 712,25.

Care sînt cele trei numere?

Răspuns : Numerele sînt 9 624,50 ; 1 078 ; 5 634,25.

VI.36. De pe un teren supus inundațiilor se obțin 106 991,875 kg de porumb. Construindu-se un dig, recolta de porumb a ajuns la 531 913,986 kg.

Care este diferența dintre cele două recolte de porumb?

Răspuns : Diferența este de 424 922,111 kg.

VI.37. Lungimea Dunării de la Baziaș pînă la Marea Neagră este de 1 075,009 km.

Aflați lungimea Dunării de la izvor pînă la vărsarea în mare, dacă de la izvor pînă la Baziaș sînt cu 1 785,006 km mai mult decît de la Baziaș la Marea Neagră.

Răspuns : Lungimea totală a Dunării este de 3 935,024 km.

VI.38. Într-un coș erau : o rață cu greutate de 3,250 kg, un rățoi care avea cu 600 g mai mult și un curcan cu 4,700 kg mai greu decît rața și rățoiul la un loc.

Cu cîte kilograme este mai greu curcanul decît rața?

Răspuns: Curcanul este cu 8,550 kg mai greu decît rața.

VI.39. Calculați produsele:

0,05 × 29	145,50 × 0,06	456,13 × 70,381
0,148 × 36	734,32 × 7,005	4,509 × 9,43
0,215 × 3	375,13 × 5,013	7,388 × 3,005

Răspuns : Avem :

0,05 × 29 = 1,45 ;   145,50 × 0,06 = 8,73 ;
0,148 × 36 = 5,328 ;   734,32 × 7,005 = 5 143,9116 ;
0,215 × 3 = 0,645 ;   375,13 × 5,013 = 1 880,52669 ;

456,13 × 70,381 =3 2102,88553 ;
4,509 × 9,43 = 42,51987 ;
7,388 × 3,005 = 22,20094.

VI.40. Un turist parcurge într-o oră 4,5 km. Cîți kilometri parcurge în 5 ore? Dar în 10 ore?

Răspuns : În 5 ore parcurge 22,5 km, iar în 10 ore, 45 km.

VI.41. Un camion încarcă 3,436 t de cartofi. Ce cantitate de cartofi s-a recoltat de pe unul din ogoarele C.A.P.-ului dacă au fost necesare 8 transporturi?

Răspuns : S-au recoltat 27,488 tone cartofi.

VI.42. Lungimea unui teren în formă de dreptunghi este de 78,3 m, iar lățimea de 9 m.

Care este lungimea gardului ce îl înconjoară?

Răspuns : Lungimea gardului este de 174,6 m.

VI.43. O față de masă costă 42,50 lei, iar un șervețel 6,25 lei.

Cîți lei costă 7 fețe de masă și 28 de șervețele?

Răspuns : Cele 7 fețe de masă și cele 28 de șervețele costă 472,50 lei.

VI.44. Bunicul îngrijește prisaca C.A.P.-ului care are 100 de stupi. Știind că din fiecare stup s-au recoltat 25,5 kg de miere, vîndută cu prețul de 32,50 lei kilogramul, care a fost valoarea întregii cantități de miere?

Răspuns : Valoarea întregii cantități este 82 875 lei.

VI.45. O piatră care cade străbate în prima secundă 4,8 m, iar în fiecare secundă următoare cu 9,8 m mai mult decît în prima secundă.

De la ce înălțime cade o piatră care străbate drumul în 7 secunde?

Răspuns : Piatra cade de la înălțimea de 92,4 m.

VI.46. Dacă un tren accelerat parcurge 16,125 m într-o secundă, cîți metri va parcurge în 100 secunde? Dar în 3 600 secunde?

Răspuns : În 100 de secunde trenul a parcurs 1 612,5 m, iar în 3 600 secunde, 58 050 m.

VI.47. Un autoturism consumă 0,115 l benzină la fiecare kilometru parcurs.

Cîți litri de benzină consumă pentru distanța de 100 km? Dar pentru 300 km? Dar pentru 500 km?

Răspuns : Pentru a parcurge 100 km, automobilul consumă 11,5 l. Distanța de 300 km este parcursă folosind 34,5 l, iar pentru a parcurge 500 km sînt necesari 57,5 l benzină.

VI.48. Calculați :

$216 \times 81,44 + 38,85 \times 21,25$;	$758,32 \times 5 + 783,05 : 5$;
$(269,23 - 186,98) \times 15,25$;	$(793,28 - 37,36) \times (389,38 + 43,36)$;
$(35,6 \times 7,5 \times 10,87) + 109,86$;	$(4\,566,75 + 385) - (4\,383,36 - 4\,217,13)$;
$70,06 \times 6 - 38,185 \times 2$;	$6\,936,12 : 3 + 4\,321,02 : 2$.

Răspuns : Avem :

$216 \times 81,44 + 38,85 \times 21,25 = 17\,591,04 + 825,5625 =$
$= 18\,416,6025$;

$(269,23 - 186,98) \times 15,25 = 82,25 \times 15,25 = 1\,254,3125$;

$(35,6 \times 7,5 \times 10,87) + 109,86 = 3\,012,15$;

$70,06 \times 6 - 38,185 \times 2 = 420,36 - 76,37 = 343,99$;

$758,32 \times 5 + 783,05 : 5 = 3\,791,6 + 156,61 = 3\,948,21$;

$(793,28 - 37,36) \times (389,38 + 43,36) = 755,92 \times 432,74 =$
$= 327\,116,8208$;

$(4\,566,75 + 385) - (4\,383,36 - 4\,217,13) = 4\,951,75 - 166,23 =$
$= 4\,785,52$;

$6\,936,12 : 3 + 4\,321,02 : 2 = 2\,312,04 + 2\,160,51 = 4\,472,55$.

VI.49. Dacă am zbura zi și noapte de-a lungul Ecuatorului (linia imaginară ce înconjoară Pămîntul la distanță egală de Polul Nord și Polul Sud) cu viteza de 232 km pe oră, ar rămîne de parcurs după 7 zile și 4 ore de zbor, 96 km.

Care este lungimea Ecuatorului?

Răspuns : Lungimea Ecuatorului este de 40 000 km.

VI.50. Avem trei numere. Primul este 875,257 ; al doilea este de 75 ori mai mare ca primul, iar al treilea de 100 ori mai mic decît al doilea.
Cu cît este mai mic numărul al treilea decît primul?

Răspuns : Numărul al treilea este mai mic cu 218,81425 decît primul număr.

VI.51. Un bazin de înot este umplut prin două robinete în 20 de ore.
Ce capacitate are bazinul dacă printr-un robinet curg 1 280,13 l pe oră, iar prin celălalt 1345,75 l pe oră?

Răspuns : Capacitatea bazinului este de 52 517,60 l.

VI.52. Din două gări A şi B pleacă unul spre celălalt două trenuri cu vitezele de 54,3 km pe oră şi respectiv 75,75 km pe oră.
Dacă după 5 ore de mers se întîlnesc, aflaţi care este distanţa dintre gări.

Răspuns : Primul tren parcurge 271,5 km, iar al doilea 378,75 km în cele 5 ore. Deci distanţa dintre gări este 650,25 km.

VI.53. Un metru de stofă costă 350,75 lei, iar unul de pînză cu 298,50 lei mai puţin decît un metru de stofă.
Care este costul a 4,50 m de stofă şi a 7,25 m de pînză?

Răspuns : Un metru de pînză costă 52,25 lei. Atunci costul total cerut este, rotunjit, 1 957,20 lei.

VI.54. Calculaţi :

4 208,42 : 2	4 560,90 : 15	3 250,5 : 1 000
72 648,32 : 8	5 670,56 : 14	5 600,50 : 100
4 864,72 : 8	1 240,60 : 5	16,045 : 100

Răspuns : Avem, de exemplu 4 208,42 : 2 = 2 104,21 ; etc.

VI.55. Trei brigăzi de muncitori au reparat o şosea lungă de 70,5 km.
Prima brigadă a reparat $\frac{1}{3}$ din lungimea şoselei, a doua $\frac{1}{5}$ din lungimea şoselei, iar a treia restul.
Cîţi kilometri a reparat a treia brigadă?

Răspuns : Brigada a treia a reparat 32,9 km.

VI.56. Capacitatea unui rezervor cu ţiţei este de 456,24 hl. Rezervorul se umple prin două robinete. Dacă numai primul ar fi deschis, în 6 ore s-ar umple, dacă numai al doilea ar fi deschis, în 4 ore.
Prin care robinet curg mai mulţi hectolitri de ţiţei într-o oră şi cu cît?

Răspuns : Prin al doilea robinet curg cu 38,02 hl mai mult decît prin primul.

VI.57. Ştiind că în 1 000 de curse o autocisternă transportă 4 500,6 tone de petrol, aflaţi ce capacitate are cisterna.

Răspuns : Capacitatea cisternei este de 4,5006 t.

VI.58. Un vapor a parcurs într-o oră 38,400 km, în a doua cu 3,200 km mai mult decît în prima oră, iar în a treia oră de 2 ori mai puţin decît în primele două ore la un loc.

Ce distanță a parcurs vaporul în cele trei ore?

Răspuns : În cele trei ore vaporul a parcurs 120 km.

VI.59. O cantitate de $\frac{55}{100}$ dintr-un ou este albuș, iar $\frac{44}{100}$ gălbenuș, restul fiind coajă.

Ce greutate are coaja unui ou care cîntărește 180 g?

Răspuns : Coaja cîntărește 1,80 g.

VI.60. Pentru o prăjitură se folosesc 150 g de unt, 100 g de zahăr, 150 g de făină, 50 g praf de copt și conținutul a 6 ouă de gîscă cu greutate de 178,20 g fiecare. Aluatul se așază la cuptor separat în 6 porții. Ce greutate are fiecare porție (înainte de a se coace)?

Răspuns : Fiecare porție are o greutate de 253,20 g.

VI.61. Un automobil a parcurs în primele două ore 122,4 km, iar în următoarele 3 ore, 198 km.

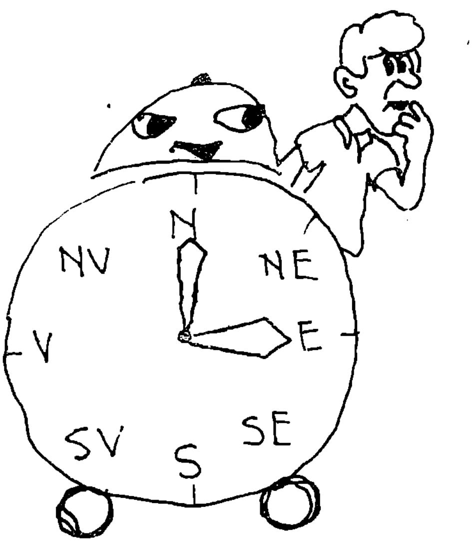
Care din viteze (cea din primele 2 ore sau cea din ultimele 3 ore) este mai mare și cu cît?

Răspuns : Viteza din primul interval este de 61,20 km/h, iar cea din al doilea interval de 66 km/h, deci cea din al doilea interval este mai mare cu 4,80 km/h.

VI.62. Cei 80 de elevi aflați în tabără la cabana „Gura Diham" consumă zilnic 24 kg de carne.

Cîte kilograme de carne consumă copiii altei serii dacă numărul lor este cu 20 mai mare?

Răspuns : Copiii celeilalte serii consumă 30 kg de carne zilnic.



ELEMENTE DE GEOMETRIE

VII.1. Care sînt literele așezate la dreapta literei „ț” în cuvintele : învățător ; înțelept ; colțuri?

Răspuns : În cuvîntul „învățător”, literele din dreapta literei „ț” sînt : ă, t, o și r, etc.

VII.2. Care sînt literele așezate la stînga literei „n” în cuvintele : bancă ; condei ; anunț?

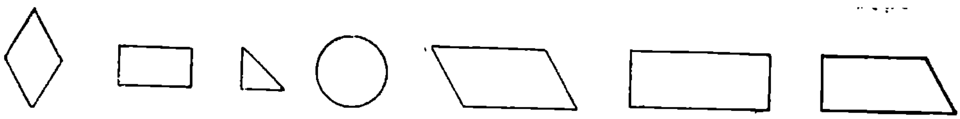
Răspuns : În cuvîntul „bancă” literele din stînga literei „n” sînt : b și a etc.

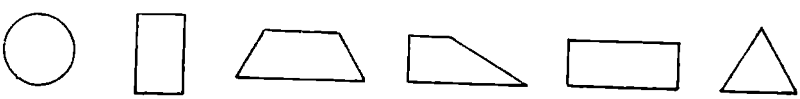
VII.3. Desenați pe o foaie de hîrtie numai figurile geometrice așezate la stînga triunghiului :

a) 

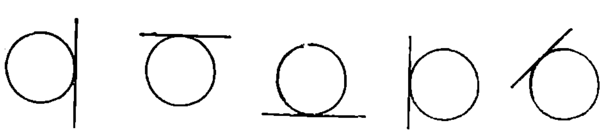
b) 

VII.4. Desenați pe o foaie de hîrtie numai figurile geometrice așezate între dreptunghiuri :

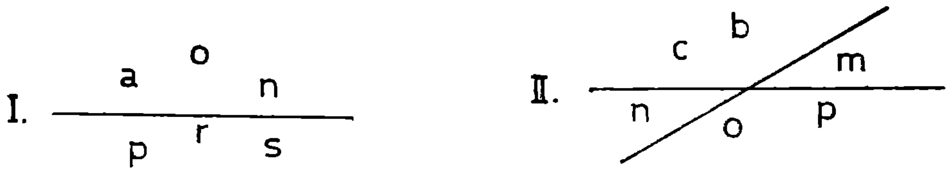
a) 

b) 

VII.5. Copiați figurile, apoi colorați doar cercurile care au un punct comun cu o linie verticală :

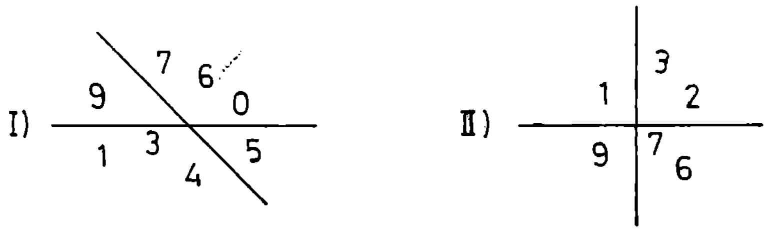


VII.6. Copiaţi literele aşezate deasupra liniei orizontale :



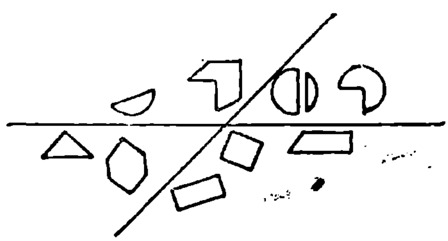
Răspuns : I) Deasupra liniei orizontale sînt scrise literele a, o, n. II) Literele scrise deasupra liniei orizontale sînt b, c, m.

VII.7. Copiaţi cifrele aşezate sub linia orizontală :

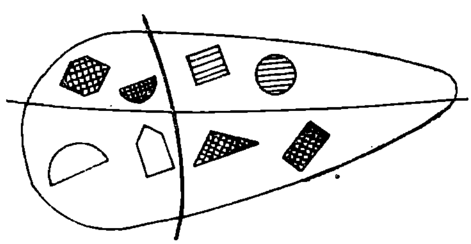


Răspuns : I) Cifrele aşezate sub linia orizontală sînt 1, 3, 4, 5. II) Cifrele aşezate sub linia orizontală sînt 6, 7, 9.

VII.8. Priviţi cu atenţie desenul următor şi copiaţi pe o hîrtie figurile geometrice aşezate sub linia orizontală, la dreapta liniei oblice :

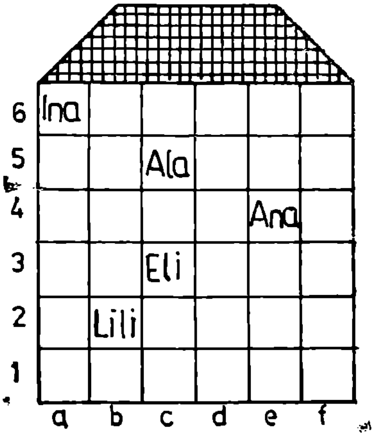


VII.9. Copiaţi figurile geometrice aşezate la stînga liniei îngroşate :



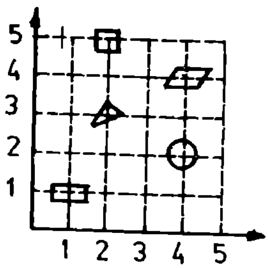
104

VII.10. Notați camerele în care se află fiecare fetiță.



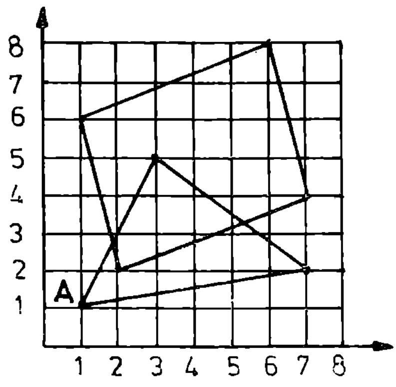
Răspuns : Ina se află în camera (a, 6) ; Ala se află în camera (c, 5), Lili se află în camera (b, 2), Eli se află în camera (c, 3), iar Ana în (e, 4).

VII.11. Notați unde sînt așezate figurile geometrice :



Răspuns : Triunghiul este așezat în punctul de coordonate (2, 3), etc.

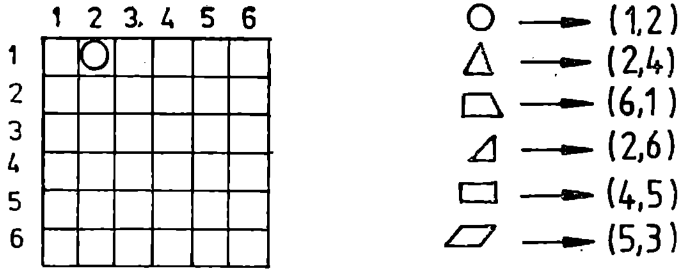
VII.12. Notați vîrfurile triunghiului și ale paralelogramului cu literele corespunzătoare coordonatelor date :



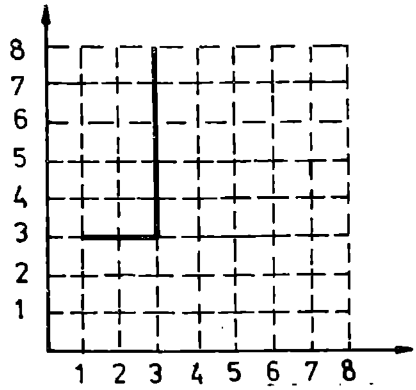
a) $A \to (1, 1)$; $B \to (3, 5)$; $C \to (7, 2)$; b) $D \to (1, 6)$; $E \to (6, 8)$; $F \to (7, 4)$; $G \to (2, 2)$.

Notă : $A \to (1, 1)$ înseamnă că punctul A are coordonatele (1, 1).

VII.13. Găsiţi locul figurilor geometrice din dreapta pe grilă.

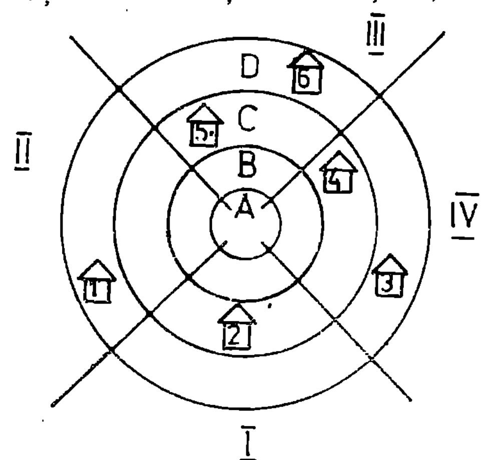


VII.14. Notaţi pe grila de mai jos punctele $A \to (3, 3)$, $B \to (1, 2)$, $C \to (2, 1)$, $D \to (6, 2)$, $E \to (7, 3)$, $F \to (3, 1)$, $G \to (6, 4)$, $H \to (3, 8)$, $I \to (1, 3)$, respectînd coordonatele apoi uniţi-le în ordinea dată. Ce aţi obţinut?



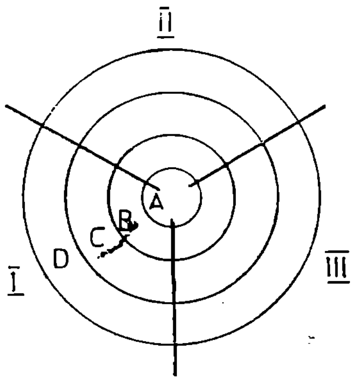
Răspuns: Obţinem conturul unei bărci.

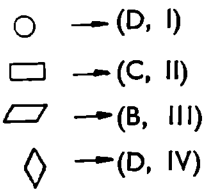
VII.15. Observaţi unde sînt aşezate căsuţele şi notaţi coordonatele.



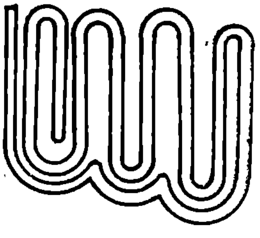
Răspuns: Căsuţa nr. 1 are coordonatele (II, *D*), căsuţa nr. 2 are coordonatele (I, *C*), căsuţa nr. 3 are coordonatele (IV, *D*), căsuţa nr. 4 are coordonatele (IV, *C*), căsuţa nr. 5 are coordonatele (III, *C*), iar căsuţa nr. 6 are coordonatele (III, *D*).

VII.16. Așezați figurile geometrice din dreapta la locul potrivit.

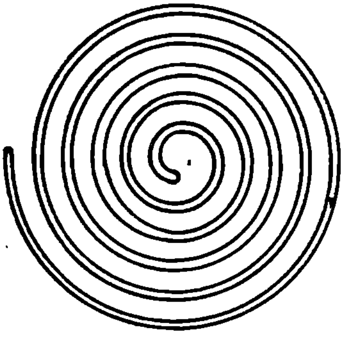




VII.17. Hașurați interiorul curbelor:

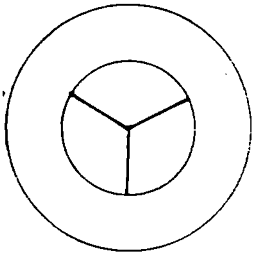


a)

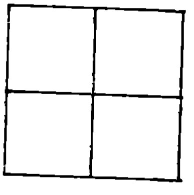


b)

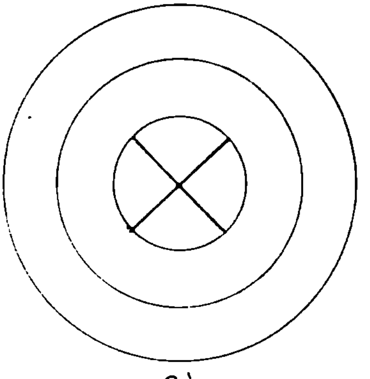
VII.18. Colorați fiecare din figurile care compun desenele de mai jos:



a)



b)

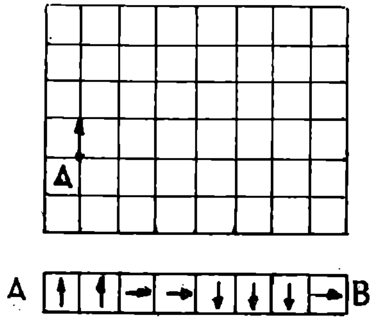


c)

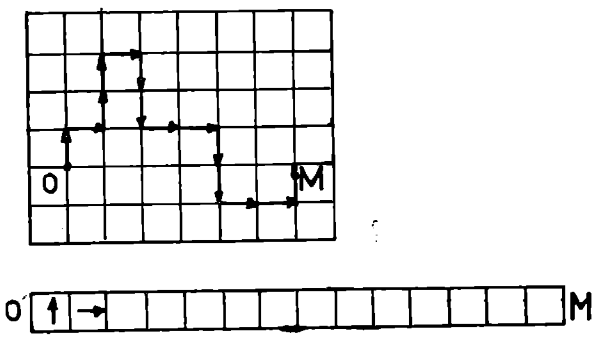
în așa fel încît două regiuni (suprafețe) alăturate să nu fie de aceeași culoare.

407

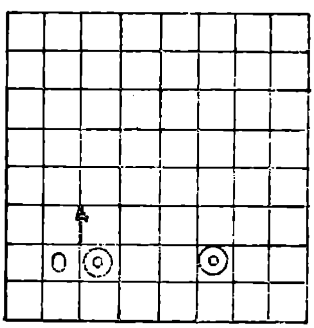
VII.19. Trasați săgeți pe grila de mai jos începînd cu punctul A în direcțiile indicate de legendă. Notați punctul B.



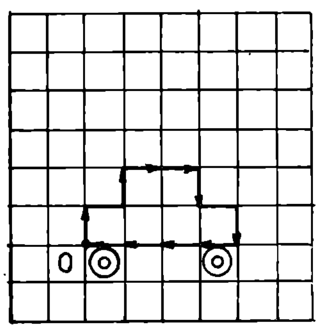
VII.20. Priviți grila de mai jos și trasați în pătratele din legendă direcțiile indicate pe grilă de săgeți.



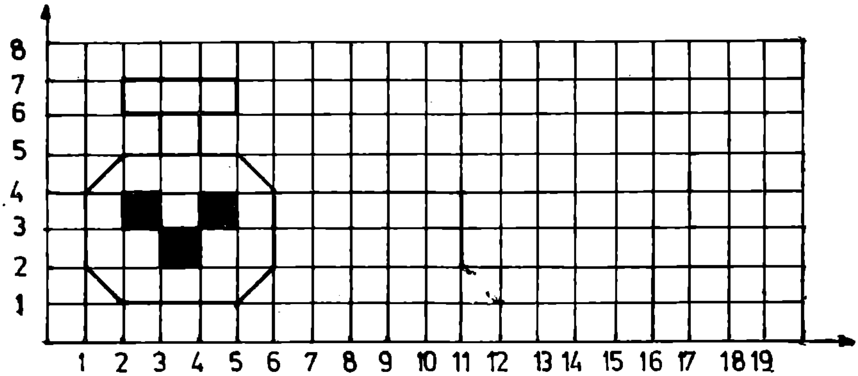
VII.21. Construiți pe grila de mai jos figura corespunzătoare direcțiilor : sus, dreapta, sus, dreapta, dreapta, jos, dreapta, jos, stînga, stînga, stînga, stînga, pe care le notați prin săgeți începînd cu punctul O. Ce obțineți?



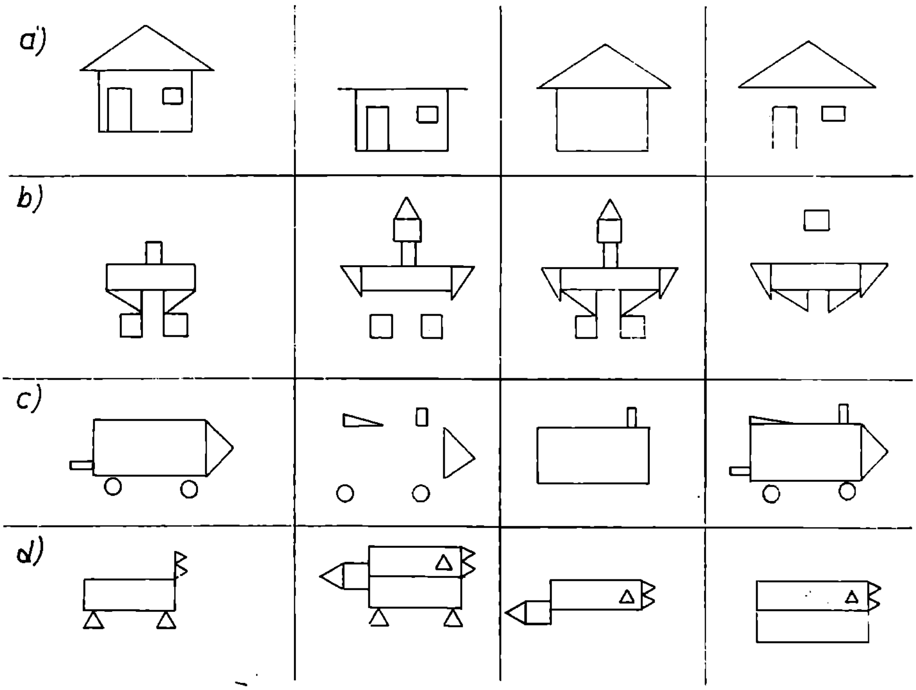
Răspuns :



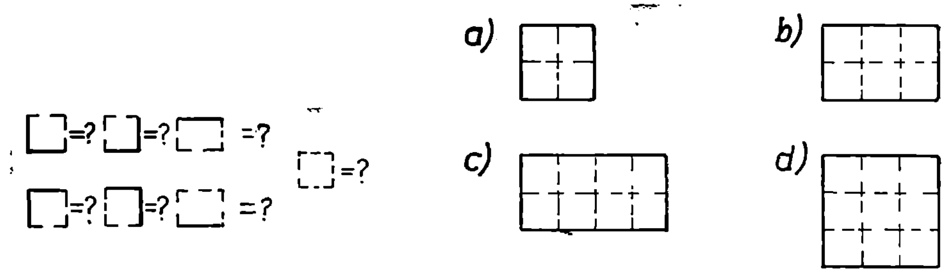
VII.22. Redesenați figura de mai jos în așa fel încît coordonatele punctelor ce conturează figura să fie cu 10 unități mai mari decît cele anterior folosite.



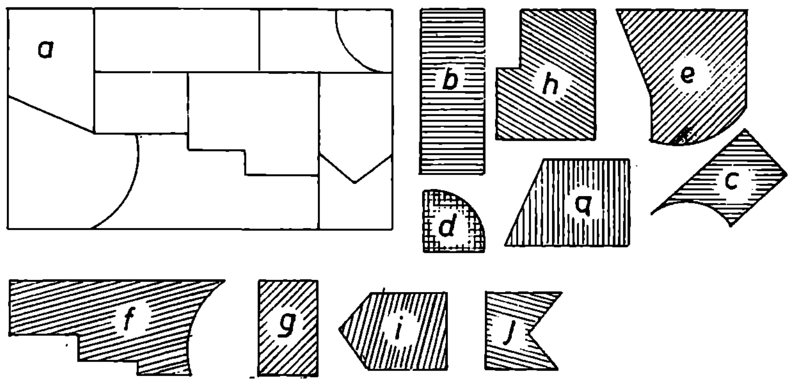
VII.23. Completați șirurile de imagini cu segmentele de dreaptă care lipsesc în figurile:



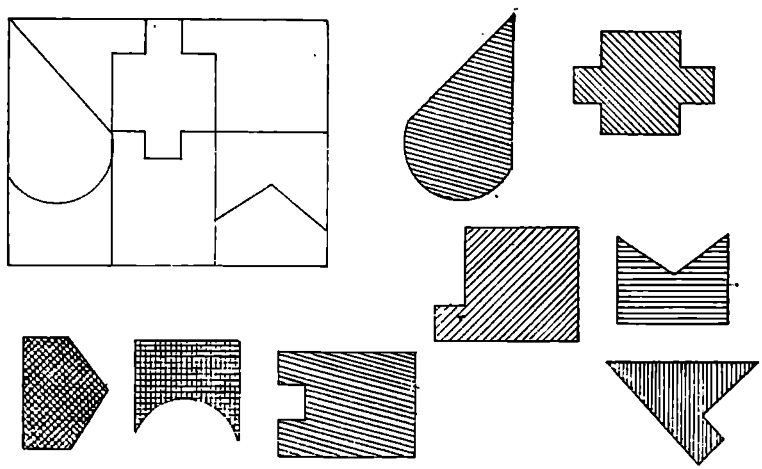
VII.24. Priviţi figurile de la punctele a), b), c), d), şi număraţi cîte părţi din cele notate în stînga cu semnul ? alcătuiesc pe fiecare din dreapta.



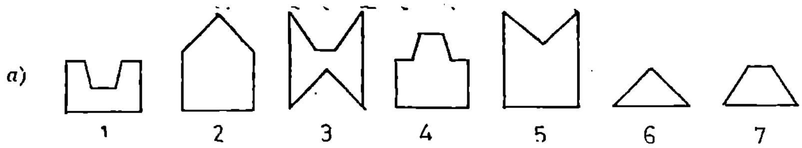
VII.25. Notaţi figurile geometrice din care este format dreptunghiul, cu literele corespunzătoare figurilor haşurate.

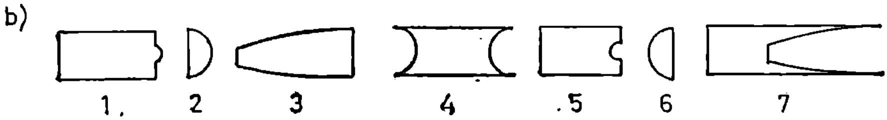


VII.26. Desenaţi numai figurile geometrice haşurate care alipite compun un dreptunghi asemănător celui de mai jos.



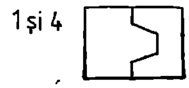
VII.27. Care din bucăţile următoare :



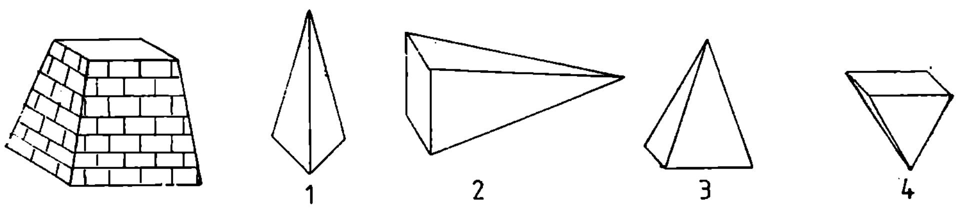


se potrivesc pentru a forma prin alăturare o figură geometrică cunoscută?

Răspuns : a) Figurile 1 şi 4 formează un dreptunghi ; 3, 6, 7 şi de asemenea 2 şi 5, etc.



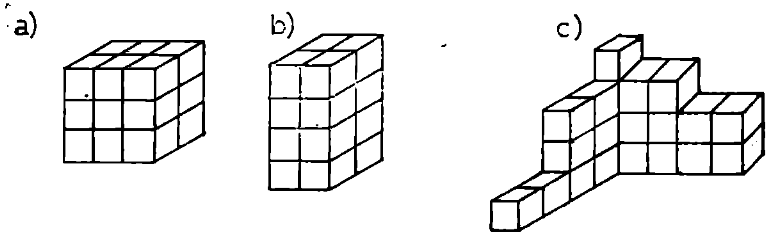
VII.28. Piramidei îi lipseşte vîrful. Care din corpurile de mai jos (notate cu 1, 2, 3, 4) :

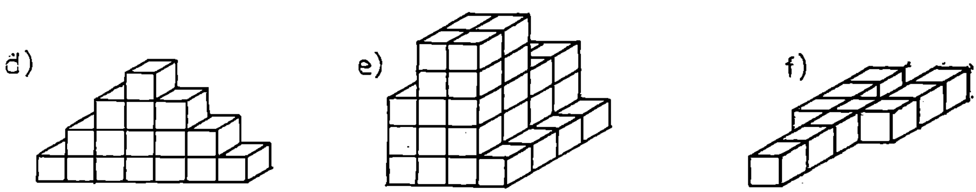


i se potriveşte?

Răspuns : I se pot potrivi corpurile 2, 3 şi 4.

VII.29. Priviţi cum sînt aranjate cuburile mici :



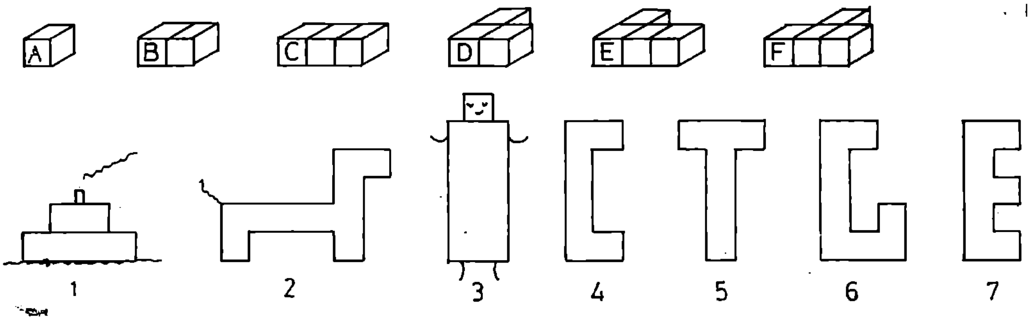


şi calculaţi cîte s-au folosit pentru fiecare construcţie.

Răspuns : a) Pentru construcţie s-au folosit: a) 18 cuburi mici ; b) 16 cuburi ; c) 22 cuburi ; d) 16 cuburi ; e) 48 cuburi ; f) 10 cuburi.

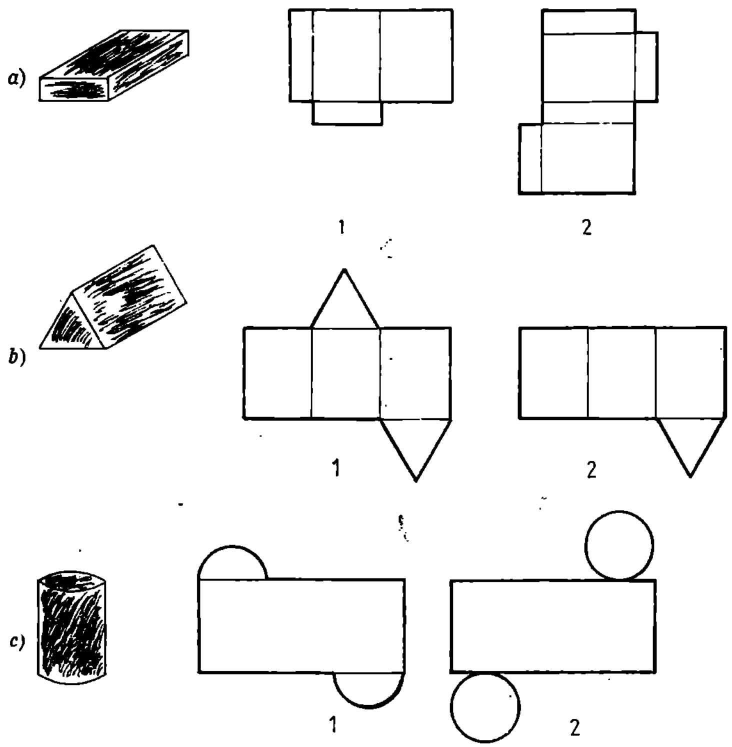
333

VII.30. Ce grupuri de cuburi (marcate prin A, B, C, D, E şi F) se folosesc pentru a construi vaporul, căţelul, robotul şi a literele?



Răspuns : Exemplu: pentru vapor se folosesc grupurile A, B, C, etc.

VII.31. Care din figurile următoare:



copiate pe o foaie de hîrtie, decupate pe liniile îngroşate şi apoi îndoite pot deveni cutii ca cele din imaginile haşurate?

VII.32. Întindeţi bine o sfoară, sau o sîrmă. Ce se obţine?
Răspuns : Se obţine o linie dreaptă.

VII.33. Luaţi o riglă şi cu ajutorul unui creion trasaţi o dreaptă. Cît puteţi să o prelungiţi?

Răspuns : Dreapta se poate prelungi oricît, este nesfîrşită (*infinită*).

VII.34. Gîndiţi-vă că o bucată de cretă vă cade din mînă. Ce descrie ea în aer? Dar raza de soare?

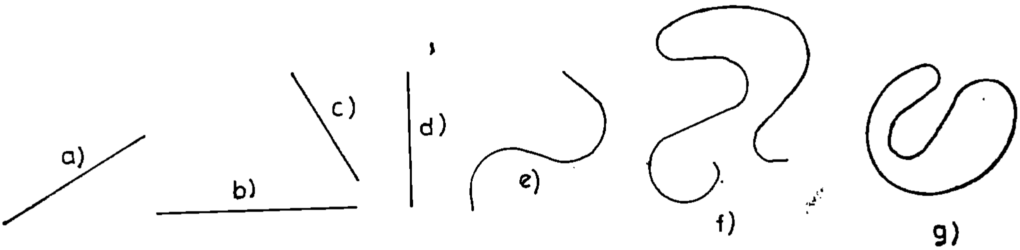
Răspuns : Ambele descriu o linie dreaptă.

VII.35. Priviţi sîrmele de telegraf sau sfoara corzii cu care se joacă fetiţele în curte, sau urma lăsată de o rîmă pe pămîntul umed.
Ce linii s-au descris?

Răspuns : Acestea descriu linii curbe.

VII.36. Desenaţi linii drepte, desenaţi linii curbe pe o foaie albă de caiet.

VII.37. Spuneţi cum sînt liniile desenate mai jos:

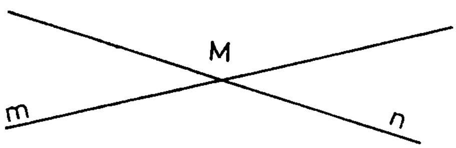


Răspuns : Liniile *a*, *b*, *c*, *d* sînt linii drepte. Liniile *e*, *f*, *g* sînt curbe.

VII.38. Scrieţi literele mari de tipar ale alfabetului limbii române care sînt alcătuite din linii curbe.

Răspuns : Exemple de astfel de litere sînt : C, O, etc.

VII.39. Priviţi dreptele desenate mai jos :



şi spuneţi cum sînt aşezate. Cine este M pe fiecare din dreptele m şi n?

Răspuns : Dreptele sînt *secante* ; M este un punct aparţinînd ambelor drepte.

VII.40. Desenaţi o dreaptă m care să treacă printr-un punct N. Ce obţineţi într-o parte şi alta a punctului N, pe dreapta m?

Răspuns : Obţinem două semidrepte cu originea în punctul N.

VII.41. Alte drepte pot trece prin punctul N considerat în problema precedentă?

Răspuns : Printr-un punct se pot trasa o infinitate de drepte.

VII.42. Fie două puncte distincte A şi B. Uniţi punctele A şi B. Ce aţi obţinut?

Răspuns : Se obţine segmentul de dreaptă AB.

VII.43. Notaţi trei puncte distincte cu B, C, D, nesituate pe aceeaşi dreaptă. Cîte segmente de dreaptă se pot trasa folosind cele trei puncte? Ce segmente de dreaptă s-au obţinut?

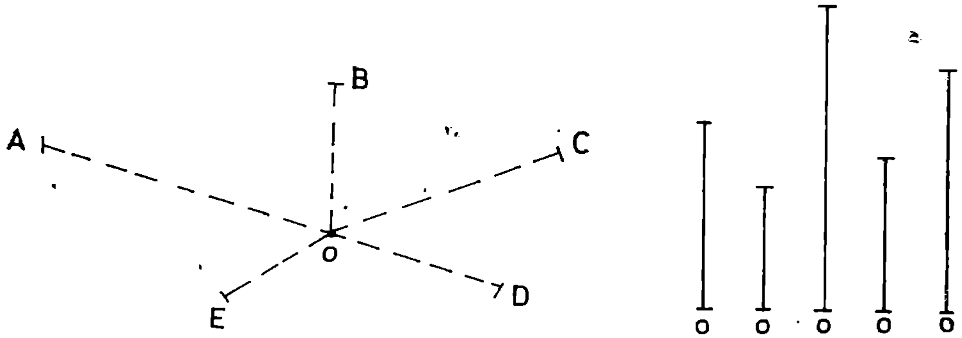
Răspuns : Se pot trasa 3 segmente de dreaptă. Se obţin segmentele BC, CD, BD.

VII.44. Desenaţi segmentele de dreaptă FG cu lungimea de 8 cm, HI cu lungimea de 5 cm şi $KL = FG - HI$.

VII.45. Desenaţi un segment de dreaptă AB cu lungimea de 2 cm şi altul CD cu lungimea de 5 ori mai mare decît AB.

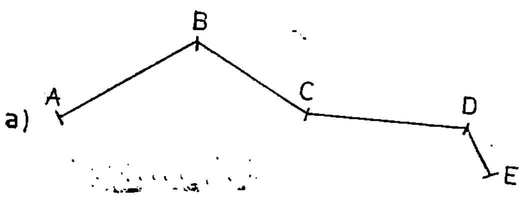
VII.46. Desenaţi segmentele CD, EF, GH cu lungimea de 3 cm, 2 cm şi respectiv 8 cm, apoi segmentul $MN = GH - (CD + EF)$.

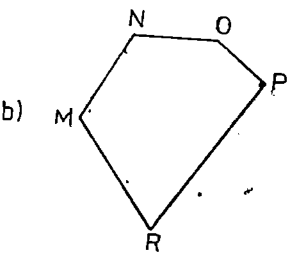
VII.47. Priviţi desenul :



şi după măsurători stabiliţi care din segmentele alăturate se potrivesc celor reprezentate prin linii întrerupte. Notaţi cu o literă cel de-al doilea capăt al segmentelor de dreaptă. Scrieţi cum sînt segmentele unele faţă de celelalte.

VII.48. a) Numiţi segmentele de dreaptă ce formează liniile de mai jos.
b) Ce formează fiecare ansamblu de linii?





Răspuns : a) Se formează o linie frîntă deschisă ; b) Se formează o linie frîntă închisă.

VII.49. Priviţi în jurul vostru şi găsiţi linii frînte : închise, deschise.

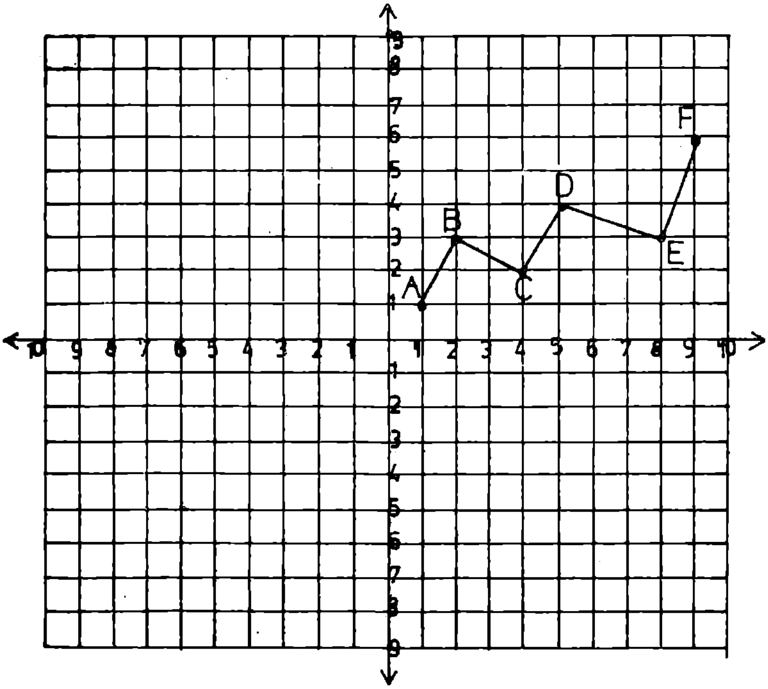
Răspuns : Un exemplu de linie frîntă închisă este cea formată de liniile ramelor unui tablou. O linie frîntă deschisă este cea formată de dunga decorativă trasă pe pereţii din bucătărie (întreruptă de existenţa uşii).

VII.50. Scrieți literele mari de tipar ale alfabetului limbii române formate din linii frînte.

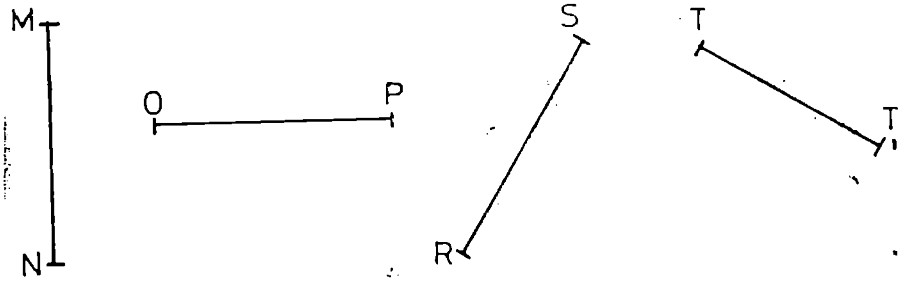
Răspuns : Exemple de astfel de litere sînt M, N, V.

VII.51. Construiți o linie frîntă formată din segmentele AB de lungime 3 cm ; BC de lungime 7 cm ; $CD = BC - AB$; $DE = AB + CD$.

VII.52. Construiți alte linii frînte asemănătoare liniei frînte $ABCDEF$ din figura de mai jos, respectînd coordonatele.



VII.53. Spuneți ce poziție are fiecare din segmentele de dreaptă desenate :

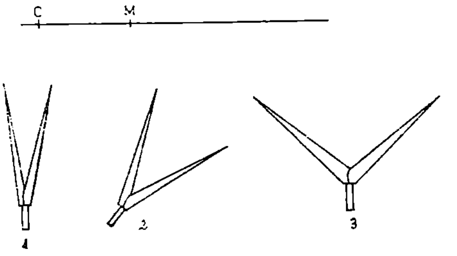


Construiți alte segmente cu aceeași lungime, în aceeași poziție Ce instrumente geometrice sînt necesare pentru aceste construcții ?

Răspuns : Pentru construcția unor astfel de segmente este necesară o linie gradată.

VII.54. Desenaţi linii frînte formate din segmente de dreaptă cu aceeaşi lungime cu cele desenate în problema anterioară. Păstraţi poziţia fiecăruia, dar schimbaţi de fiecare dată ordinea în care le desenaţi.

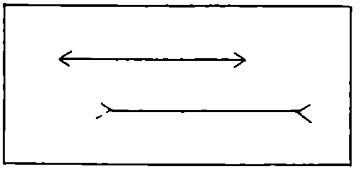
VII.55. Priviţi desenul următor :



şi spuneţi care din compasele desenate a trasat punctul M al segmentului de dreaptă OM, dacă vîrful compasului a fost plasat în O.

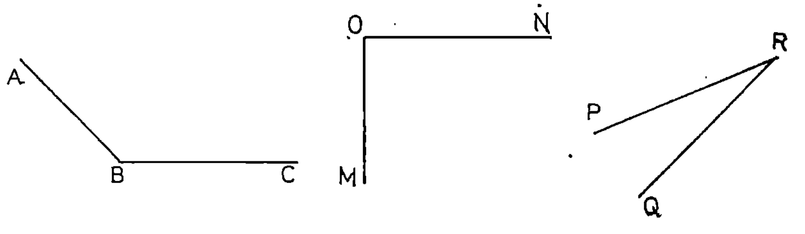
Răspuns : Al doilea compas.

VII.56. Care segment este mai lung din cele două de mai jos?



Răspuns : Segmentele au aceeaşi lungime.

VII.57. Priviţi desenele următoare :



şi spuneţi ce reprezintă.

Răspuns : Desenele reprezintă: un unghi obtuz, un unghi drept, un unghi ascuţit.

VII.58. Desenaţi unghiuri drepte, ascuţite, obtuze.

VII.59. Copiaţi pe calc unghiurile desenate, conform indicaţiei date la problema anterioară, suprapuneţi-le şi scrieţi cum sînt ca mărime unele faţă de altele. „Lungiţi" laturile unghiurilor. Se schimbă mărimea unghiurilor?

Răspuns : Mărimea unghiurilor nu se schimbă.

VII.60. Segmentul de dreaptă AB este perpendicular pe segmentul de dreaptă MN în punctul B. Cel fel de unghiuri se formează? Ce poziţie au segmentele MN şi AB unul faţă de celălalt?

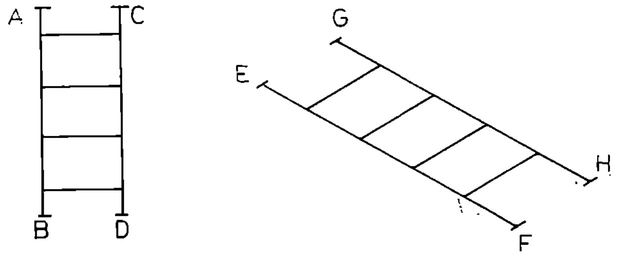
Răspuns : Se formează două unghiuri drepte : $\widehat{ABM}$ şi $\widehat{ABN}$. Segmentele sînt perpendiculare unul pe celălalt.

VII.61. Segmentele de dreaptă BC şi DE sînt secante avînd punctul comun O şi formînd unghiul ascuţit $\widehat{BOD}$.

Ce alte unghiuri s-au format?

Răspuns : Se mai formează unghiurile $\widehat{BOE}$, $\widehat{DOC}$, $\widehat{EOC}$.

VII.62. Priviţi desenele următoare :



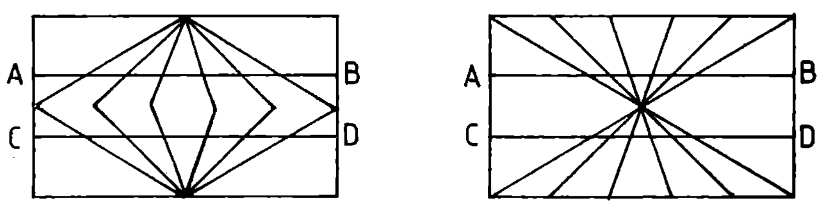
şi spuneţi cum sînt segmentele de dreaptă care alcătuiesc „scara" şi linia ferată?

Răspuns : Segmentele sînt paralele.

VII.63. Desenaţi segmente de dreaptă paralele. Ce instrumente geometrice veţi folosi?

Răspuns : Pentru desen se folosesc o riglă şi un raportor.

VII.64. Priviţi cu atenţie figurile de mai jos :

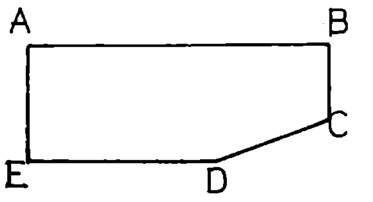


a) b)

şi spuneţi cum este segmentul de dreaptă AB faţă de segmentul de dreaptă CD.

Răspuns : În ambele cazuri segmentele sînt paralele.

VII.65. Priviţi cu atenţie figura geometrică următoare :

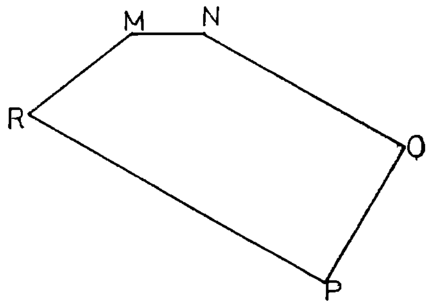


997

şi notaţi poziţia segmentelor de dreaptă ce o compun. Scrieţi unghiurile din care este formată şi stabiliţi ce fel de unghiuri sînt.

Răspuns: Segmentele AB şi DE sînt paralele; de asemenea, segmentele AE şi BC. Unghiurile sînt $\widehat{EAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}$.

VII.66. Priviţi figura geometrică următoare:



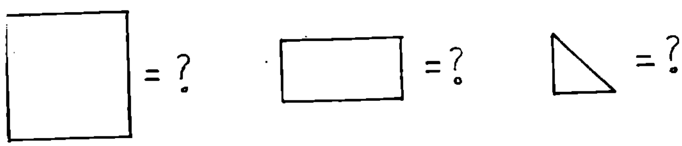
şi stabiliţi care din propoziţiile următoare:

a) $RM \perp MN$; b) $\widehat{RMN}$ este unghi ascuţit; c) $RP \perp PO$; d) $PO \perp ON$; e) $PO \perp NO$; f) $MN = PO$; g) $\widehat{MNO}$ este unghi obtuz; h) $\widehat{PON} = \widehat{OPR} = 90°$

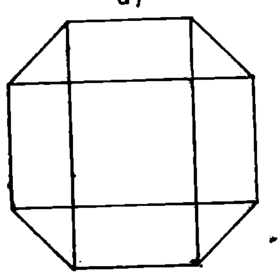
sînt adevărate, care sînt false. Verificaţi fiecare afirmaţie folosind: rigla, echerul, compasul.

Răspuns: a) falsă; b) falsă; c) adevărată; d) adevărată; e) adevărată; f) falsă; g) adevărată; h) adevărată.

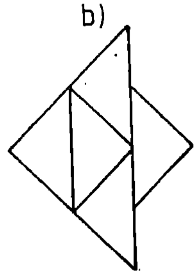
VII.67. Priviţi cu atenţie desenele de la punctele a) şi b) şi spuneţi cîte din figurile notate cu semnul întrebării le alcătuiesc.



a)

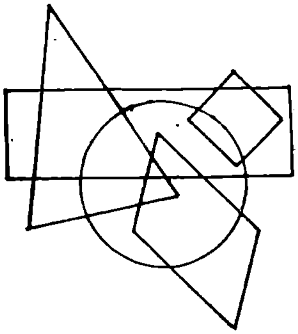


b)



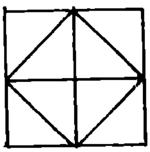
Răspuns: a) Un pătrat, 4 dreptunghiuri şi 4 triunghiuri; b) 5 triunghiuri.

VII.68. Recunoaşteţi figurile geometrice din desenul următor?

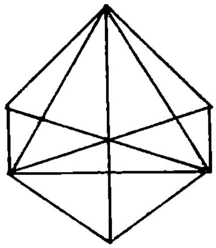


Răspuns : Recunoaştem un paralelogram, un cerc, un triunghi isoscel, un pătrat, un dreptunghi.

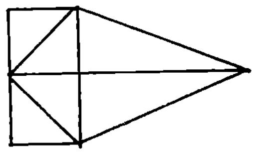
VII.69. Cîte pătrate şi cîte triunghiuri sînt în desenele următoare?



a)



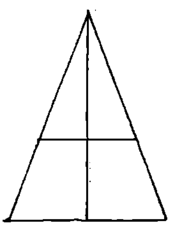
b)



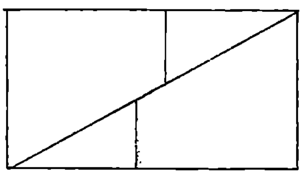
c)

Răspuns : a) Desenul are 6 pătrate şi 12 triunghiuri, etc.

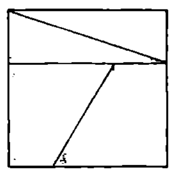
VII.70. Desenaţi pe hîrtie figurile următoare:



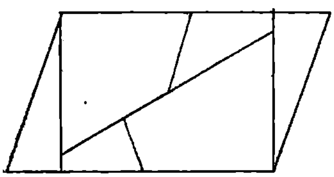
a)



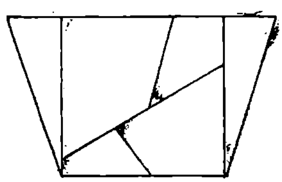
b)



c)



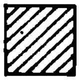
e)

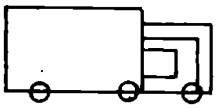


d)

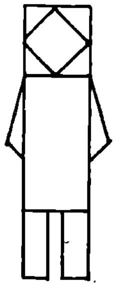
Decupați urmînd fiecare din liniile trasate. Recompuneți apoi figurile inițiale.

VII.71. Cîte pătrate asemănătoare cu cel hașurat conține fiecare desen?

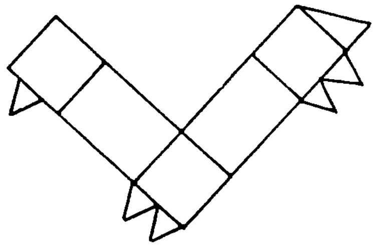




a)

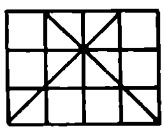


b)

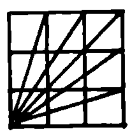


c)

VII.72. Cîte figuri asemănătoare cu cea de sus sînt în desenele următoare?

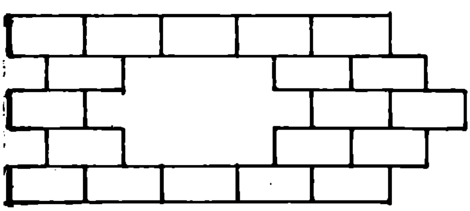


a)

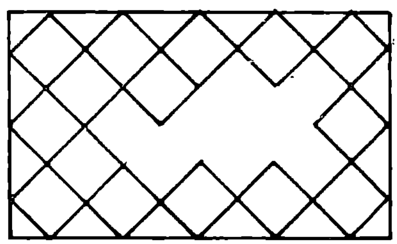


b)

VII.73. Cîte cărămizi lipsesc din figurile următoare?

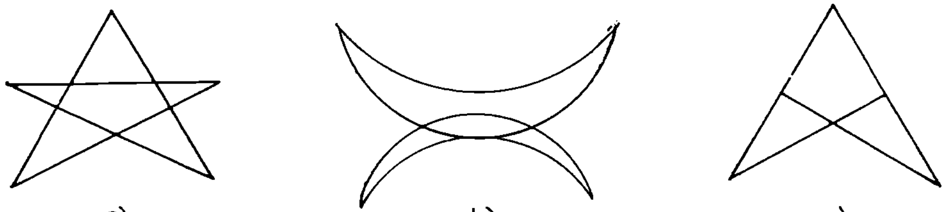


a)

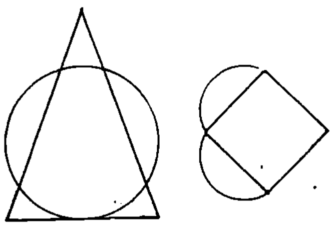


b)

VII.74. Desenați figurile următoare:

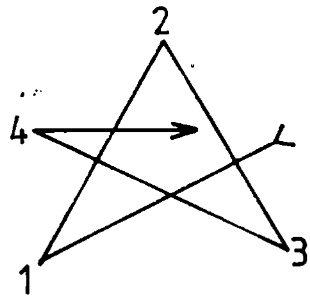


a) b) c)



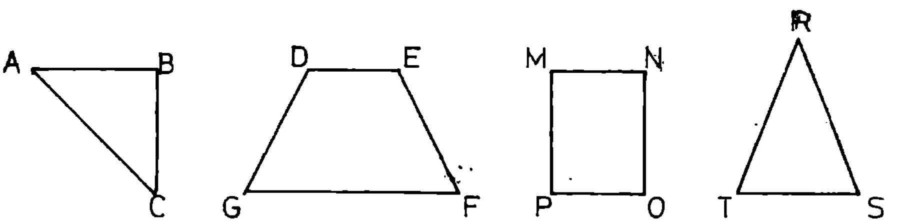
d) e)

Răspuns: a)



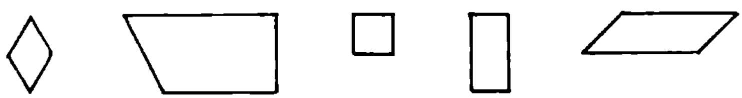
fără să ridicați creionul de pe hîrtie.

VII.75. Măsurați unghiurile, laturile, stabiliți poziția laturilor și denumiți apoi figurile geometrice:



Răspuns: Figurile sînt: triunghi dreptunghic, trapez isoscel, dreptunghi, triunghi isoscel.

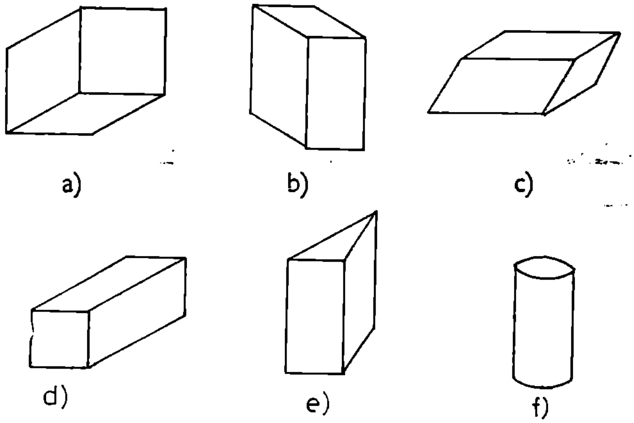
VII.76. Denumiți patrulaterele desenate mai jos;



a) b) c) d) e)

Răspuns: a) romb; b) trapez dreptunghic; c) pătrat; d) dreptunghi; e) paralelogram.

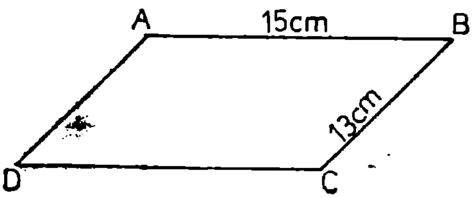
VII.77. Spuneți care dintre corpurile geometrice desenate mai jos :



au fețele patrulatere. Cum se numesc patrulaterele pe care le-ați recunoscut?

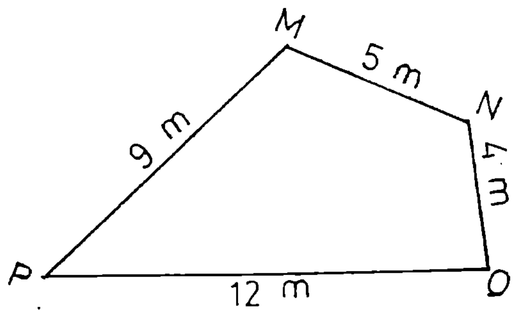
Răspuns : Au fețe patrulatere corpurile a), b), c), d) e) și se numesc paralelogram, dreptunghi, pătrat.

VII.78. Capacul unei cutii cu forma asemănătoare celei desenate mai jos trebuie înconjurat cu un șnur roșu. Ce lungime are șnurul dacă dimensiunile capacului sînt cele notate în figură?



Răspuns : Șnurul are lungimea 56 cm.

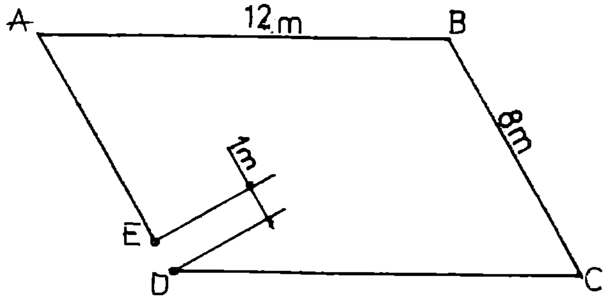
VII.79. Pe asfaltul din curtea școlii este trasată cu creta o figură geometrică asemănătoare cu cea de mai jos. Un copil sare într-un picior de-a lungul laturilor acestei figuri. Cîți metri a parcurs copilul?



Răspuns : Copilul a parcurs 30 m.

122

VII.80. Un teren cultivat cu zarzavat are suprafaţa în formă de paralelogram. Acest teren este înconjurat cu un gard format din trei rînduri de sîrmă. Cîţi metri de sîrmă s-au folosit dacă s-a lăsat loc liber pentru poarta largă de 1 m, aşa cum se indică în desenul alăturat?



Răspuns : Perimetrul paralelogramului este 12 m + 8 m + 12 m + + 8 m = 40 m. Lungimea unui singur rînd de sîrmă este 40 m — — 1 m = 39 m. Lungimea sîrmei necesare pentru construirea gardului este 3 × 39 m = 117 m (sau 39 m + 39 m + 39 m = = 117 m).

VII.81. O ramă dreptunghiulară înconjoară tabloul din camera Ralucăi.

Ce lungime totală are rama, dacă lungimea tabloului este de 50 cm, iar lăţimea este cu 20 cm mai mică?

Răspuns : Lăţimea ramei tabloului este 50 cm — 20 cm = 30 cm. Lungimea totală a ramei este 2 × (50 cm + 30 cm) = 160 cm.

VII.82. Aflaţi perimetrul unui dreptunghi cu lăţimea de 786 cm şi lungimea de 3 ori mai mare.

Răspuns : Lungimea dreptunghiului este 3 × 786 cm = 2 358 cm. Perimetrul dreptunghiului este 2 × (786 cm + 2 358 cm) = 6 288 cm.

VII.83. Calculaţi dimensiunile unui dreptunghi cu semiperimetrul de 720 dm şi lăţimea de trei ori mai mică decît lungimea.

Răspuns : Lăţimea dreptunghiului este 720 dm : 4 = 180 dm. Lungimea dreptunghiului este 3 × 180 dm = 540 dm.

VII.84. Perimetrul unui pătrat este de 4 500 cm. Calculaţi lungimea laturii.

Răspuns : Lungimea laturii este 4 500 cm : 4 = 1 125 cm.

VII.85. Un pătrat are perimetrul de 440 cm. Măriţi două laturi opuse cu 53 cm şi calculaţi perimetrul figurii geometrice obţinute.

Răspuns : Latura pătratului are lungimea 440 cm : 4 = 110 cm. Lungimea dreptunghiului obţinut prin mărirea a două laturi opuse este 110 cm + 53 cm = 163 cm. Perimetrul dreptunghiului este 2 × (110 cm + 163 cm) = 546 cm.

VII.86. Perimetrul unui teren de sport în formă de dreptunghi este de 436 m. Lungimea terenului este mai mare decît lăţimea lui cu 72 m.

10 — c. 850

Care sînt dimensiunile acestui teren ?


ăspuns : Semiperimetrul dreptunghiului este 436 m : 2 = 218 m. Dublul lățimii este 218 m − 72 m = 146 m. Lățimea este 146 m : :2 = 73 m. Lungimea terenului este 73 m + 72 m = 145 m.

VII.87. Aflați cîți metri are perimetrul unui pătrat avînd lungimea laturii egală, în metri cu produsul numerelor 2 567 și 362.

Răspuns : Latura pătratului este de 2 567 × 362 = 929 254 (m). Perimetrul pătratului este 4 × 929 254 m = 3 717 016 m.

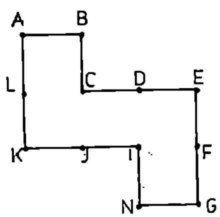
VII.88. Cîte dreptunghiuri, apoi cîte pătrate puteți construi unind punctele de mai jos.

a)	*A*.	· *B*	b)	*M*.	*N*.	*O*.
	F.	· *C*		*T*.	*Q*.	*P*.
	E.	· *D*		*V*.	*S*.	*R*.

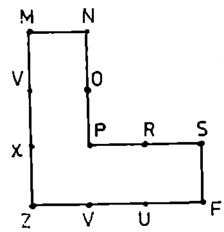
Calculați perimetrele acestor dreptunghiuri considerînd distanța dintre două puncte alăturate este de 2 cm.

Răspuns : a) Se pot forma un dreptunghi și două pătrate. Dreptunghiul are perimetrul 12 cm, iar pătratele au, fiecare, perimetrul de 8 cm.

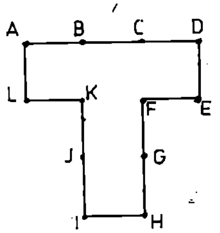
VII.89. Calculați perimetrele figurilor geometrice desenate mai jos,



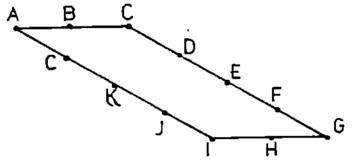
a)

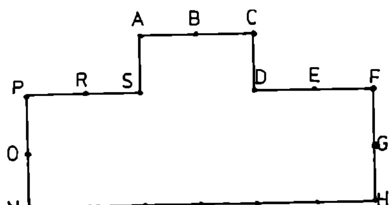


b)

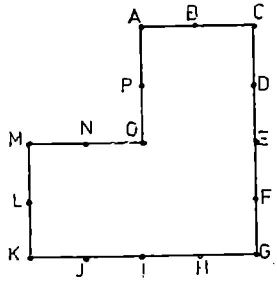


c)

d)




(e

f)


considerînd distanţa dintre două puncte consecutive de 1 dm.

ăspuns : a) Avem : $AB + BC + CD + DE + EF + FG + GN + NI + IJ + JK + KL + LA = 12$ dm. b) 12 dm ; c) 12 dm ; d) 12 dm ; e) 18 dm ; f) 16 dm.

VII.90. Un triunghi are laturile cu lungimea egală fiecare cu 238,5 cm. Care este perimetrul?

Răspuns : Perimetrul triunghiului este 715,5 cm.

VII.91. Calculaţi perimetrul unui triunghi isoscel dacă laturile de aceeaşi lungime au fiecare 3 785 cm, iar lungimea bazei reprezintă 3/5 din această lungime.

Răspuns : Lungimea bazei este (3 785 cm : 5) $\times$ 3 = 2 271 cm. Perimetrul triunghiului este 2 $\times$ 3 785 cm + 2 271 cm = 7 570 cm + + 2 271 cm = 9 841 cm.

VII.92. Un teren în formă de triunghi are următoarele dimensiuni : 120 m ; 2/5 din 120 m şi 1/2 din 120 m.

Care este lungimea gardului ce înconjoară terenul?

Răspuns : Lungimea gardului este 228 m.

VII.93. O cutie în formă de paralelogram are perimetrul de 134 m. Una din laturile mai scurte este de 25,5 m.

Ce lungime are fiecare din laturile mai lungi?

Răspuns : Semiperimetrul paralelogramului este 134 m : 2 = 67 m. Lungimea fiecărei laturi mai lungi este 67 m — 25,5 m = 41,5 m.

VII.94. O eşarfă în formă de paralelogram are pe margini dantelă. Ce lungime are dantela dacă pentru fiecare latură mai mică se folosesc 14 cm, iar pentru fiecare din cele mari, de 7 ori mai multă dantelă?

Răspuns : Pentru fiecare din laturile mari se folosesc 7 $\times$ 14 cm = = 98 cm dantelă. În total se folosesc 2 $\times$(98 cm + 14 cm) = 224 cm dantelă.

VII.95. Un trapez isoscel are perimetrul de 1 080 m. Ştiind că baza mică este de 105 m, iar baza mare cu 105 m mai lungă, aflaţi lungimea fiecărei laturi neparalele.

Răspuns : Baza mare are lungimea 105 m + 105 m = 210 m. Lungimea celor două baze este 105 m + 210 m = 315 m. Suma lungimilor laturilor neparalele este 1 080 m — 315 m = 765 m. Lungimea unei laturi neparalele este 765 m : 2 = 382,5 m.

VII.96. Tăiaţi din hîrtie un dreptunghi cu lungimea de 8 cm şi lăţimea de 5 cm.

VII.97. Construiţi un dreptunghi avînd dimensiunile cu 2 cm mai mici decît cele ale dreptunghiului desenat în problema precedentă.

VII.98. Construiţi un pătrat cu perimetrul de 20 cm.

VII.99. Decupaţi din hîrtie un pătrat cu latura de 10 cm. Tăiaţi de-alungul unei laturi o fîşie cu lăţimea de 3 cm. Ce figuri geometrice aţi obţinut? Calculaţi perimetrele acestor figuri.

Răspuns : Se formează două dreptunghiuri cu perimetrele de 26 cm, respectiv 34 cm.

VII.100. Construiţi un trapez cu baza mare de 6 cm şi baza mică de 3 cm.

VII.101. Decupaţi din hîrtie un trapez cu baza mică de 5 cm, baza mare de 2 ori mai lungă, iar una din laturile neparalele, perpendiculară pe baza mare, de lungime egală cu 7 cm.

VII.102. Tăiaţi din trapezul confecţionat în problema precedentă cea mai mică bucată, ca arie, pentru a obţine un dreptunghi.

VII.103. Decupaţi din hîrtie un paralelogram cu dimensiunile de 6 cm şi 4 cm. Puteţi, păstrînd aceeaşi suprafaţă şi făcînd o singură tăietură, să obţineţi un dreptunghi?

Răspuns : Da : tăiem un triunghi după înălţimea paralelogramului şi o lipim în partea opusă.

VII.104. Construiţi două triunghiuri isoscele egale. Aşezaţi bazele în aşa fel încît să coincidă.

Ce aţi obţinut?

Răspuns : Se obţine un romb.

VII.105. Decupaţi un pătrat cu latura de 7 cm. Tăiaţi-l de-a lungul unei diagonale. Ce aţi obţinut?

Răspuns : Se obţin două triunghiuri dreptunghice.

VII.106. Construiţi un pătrat cu latura de 9 cm, trasaţi diagonalele. Decupaţi pătratul, apoi tăiaţi-l de-a lungul diagonalelor. Ce-aţi obţinut?

Răspuns : Se obţin 4 triunghiuri dreptunghice isoscele.

VII.107. Verificaţi constatările anterioare decupînd un paralelogram, un dreptunghi.

VII.108. Decupaţi din hîrtie două triunghiuri dreptunghice cu aceleaşi dimensiuni. Suprapuneţi, pe rînd, laturile şi observaţi ce figuri geometrice obţineţi.

Răspuns : Se obţine fie un dreptunghi, fie un triunghi isoscel, fie un paralelogram, etc.

VII.109. Decupaţi din hîrtie două triunghiuri echilaterale cu aceleaşi dimensiuni. Alăturaţi, pe rînd, laturile de lungimi egale şi spuneţi ce figură geometrică aţi obţinut.

Răspuns : Se obţin romburi.

VII.110. Decupaţi din hîrtie două triunghiuri isoscele cu aceleaşi dimensiuni şi observaţi ce obţineţi alăturînd, pe rînd, laturile cu aceeaşi lungime.

Răspuns : Se obţin patrulatere.

VII.111. Măsuraţi lungimea şi lăţimea clasei voastre, a camerei. Calculaţi ce lungime are o stinghie ce înconjoară podeaua din clasă, din cameră.

VII.112. Măsuraţi lungimea, lăţimea, grosimea sau înălţimea cărţii de matematică, a caietului, a penarului, a dulapului, etc. Comparaţi aceste dimensiuni.

Calculaţi perimetrele căror suprafeţe doriţi.

VII.113. Construiţi un segment de dreaptă de lungime egală cu jumătate din perimetrul unui romb cu latura de 7 cm.

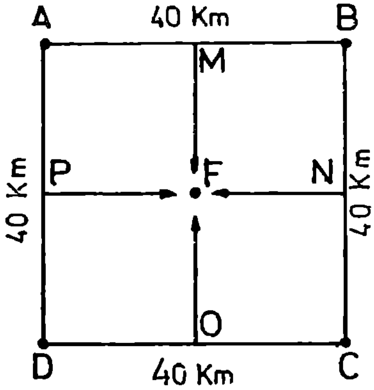
Răspuns : Segmentul are lungimea 14 cm

VII.114. Construiţi un segment de dreaptă a cărui lungime este egală cu 1/4 din perimetrul unui paralelogram cu dimensiunile de 8 cm şi 4 cm.

Răspuns : Lungimea segmentului este 6 cm.

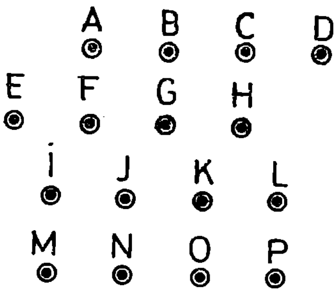
VII.115. Distanţa dintre oraşele *A* şi *B*; *B* şi *C*; *C* şi *D*; *D* şi *A* este de 40 km. Ele sînt amplasate în vîrfurile unui pătrat. S-a cerut amplasarea unei fabrici *F* în aşa fel încît locuitorii fiecărui oraş, automobilişti, să parcurgă un drum de aceeaşi lungime pînă la locul de muncă, trecînd obligatoriu pe la una din staţiile de benzină aflate la jumătatea distanţei dintre două oraşe apropiate (situate în punctele *M, N, O, P*).

Unde este aşezată fabrica şi ce distanţă parcurge fiecare locuitor pînă la locul de muncă?



ăspuns : Oraşele sînt amplasate conform desenului de mai sus. Fabrica va fi aşezată în punctul *F* aşezat la distanţă egală de punctele *A*, *B*,*C*,*D*, oraşe în care locuiesc cei ce lucrează aici. Benzinăriile fiind aşezate în punctele *M*, *N*, *O*, *P* adică la jumătatea distanţei dintre două oraşe apropiate, lungimea drumului parcurs de fiecare pînă la locul de muncă este de 40 km. De exemplu $AP+PF=20\text{ km}+20\text{ km}=40\text{ km}$, sau $AM+MF=20\text{ km}+20\text{ km}=40\text{ km}$.

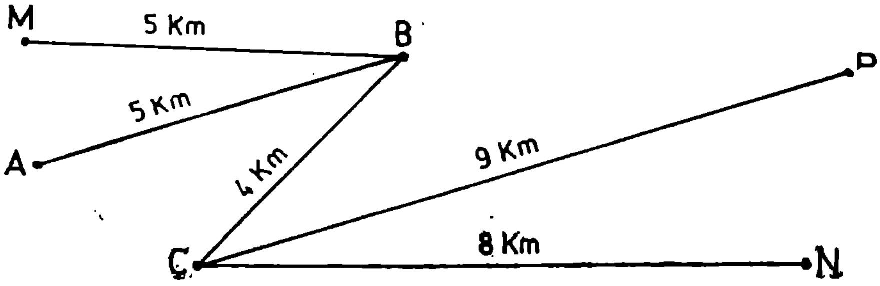
VII.116. Un automobilist parcurge un drum lung trecînd prin toate localităţile notate în desen prin litere :



Indicaţi în ce ordine le vizitează dacă putea începe drumul dintr-unul din oraşele *A* ; *D* ; *P* ; *M*, fără a trece de două ori prin acelaşi loc.

Răspuns : Un parcurs este *ABCDHGFEIJKLPONM*.

VII.117. Priviţi liniile frînte de mai jos, reprezentînd lungimea drumurilor rutiere dintre localităţile notate cu litere parcurse de cîţiva bicicliști, și calculați cu cît este mai lung drumul parcurs de bicicliștii care pleacă din A trecînd prin B și C, ajungînd în D, față de drumul parcurs de cei care pleacă din M trecînd prin B și ajungînd în N.



Răspuns: Avem: $AB + BC + CD = 5$ km $+ 4$ km $+ 9$ km $= 18$ km; $MB + BC + CN = 5$ km $+ 4$ km $+ 8$ km $= 17$ km deci drumul pe care-l parcurge a doua grupă de bicicliști este cu 18 km $-$ 17 km $=$ $= 1$ km mai scurt decît drumul parcurs de prima grupă de bicicliști.

Se poate observa că primele segmente de dreaptă au aceeași lungime, doar ultimele diferă prin 9 km $-$ 8 km $= 1$ km.

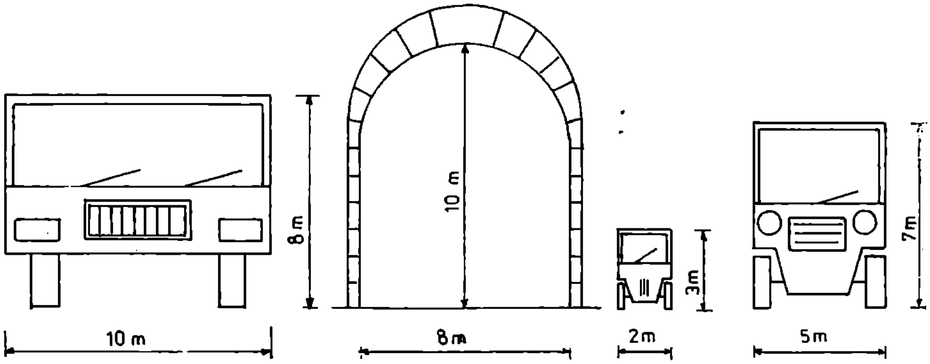
VII.118. Un dreptunghi are lățimea egală cu jumătate din lungime, iar perimetrul de 60 cm. Calculați dimensiunile.

Răspuns: Semiperimetrul dreptunghiului este 60 cm : 2 $= 30$ cm. Lățimea dreptunghiului este 30 cm : 3 $= 10$ cm. Lungimea dreptunghiului este 10 cm $\times$ 2 $= 20$ cm.

VII.119. Un teren agricol în formă de trapez are perimetrul de 932 m. Știind că baza mare este de 4 ori mai mare decît baza mică, că una din laturile neparalele este de 2 ori mai mare decît baza mică, iar cealaltă latură neparalelă de 3 ori mai mare ca baza mică, aflați lungimea fiecărei laturi.

Răspuns: Baza mică are lungimea 932 m : 10 $= 93{,}20$ m. Baza mare are lungimea 93,2 m $\times$ 4 $= 372{,}8$ m. Una din laturile neparalele are lungimea 93,2 m $\times$ 2 $= 186{,}4$ m. Cealaltă latură neparalelă are lungimea 93,2 m $\times$ 3 $= 279{,}6$ m.

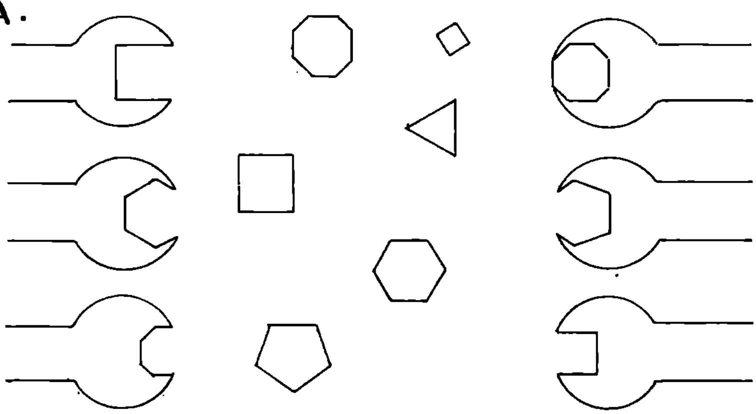
VII.120. Priviți desenele de mai jos și stabiliți ce mașini pot trece prin tunel?



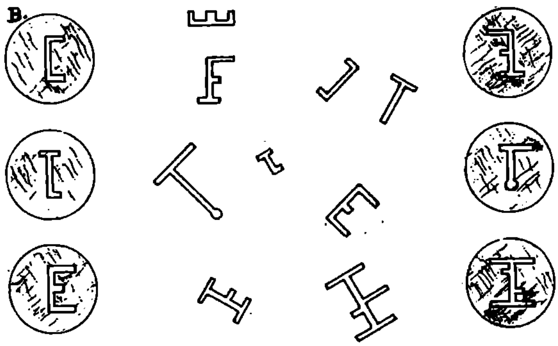
Răspuns: Pot trece prin tunel ultimele două mașini.

VII.121. Ce chei pot desface piuliţele? Stabiliţi acelaşi lucru pentru yale.

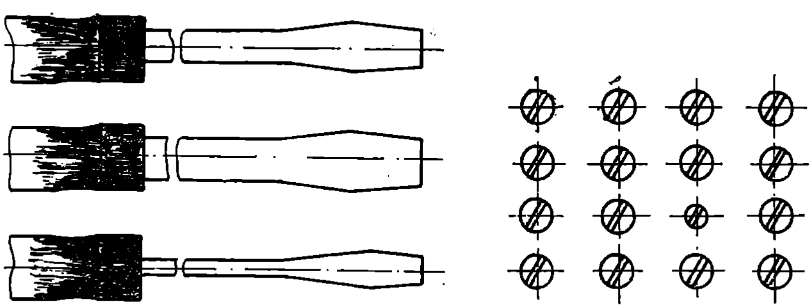
A.



B.

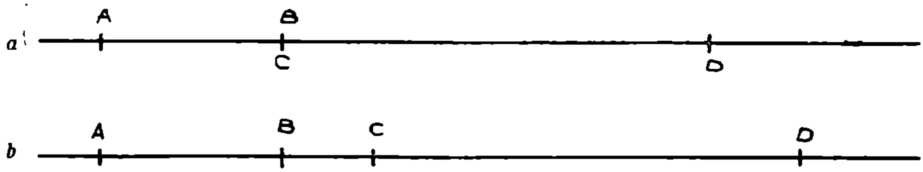


VII.122. Care şurubelniţe sînt potrivite pentru şuruburile desenate mai jos, în dreapta?



VII.123. Trasați o dreaptă a așezată orizontal și două segmente de dreaptă $AB = 21$ mm și $CD = 57$ mm. otați apoi pe dreapta a două segmente cu aceeași lungime cu a segmentelor AB și CD.

Cum puteți nota pe această dreaptă a segmentele cu aceeași lungime cu AB și BC construite?



Răspuns : Segmentele pot fi așezate în așa fel ca punctele B și C să coincidă și atunci segmentul obținut are lungimea egală cu suma lungimilor celor două segmente, deci 81 mm (v. prima figură).

Segmentele pot fi așezate în așa fel încît să se obțină un al treilea segment BC, ca în a doua figură.

VII.124. O buburuză merge de-a lungul unei linii frînte $ABCDEF$ pînă la o frunză.

Cîți centimetri a parcurs buburuza dacă $AB = EF = 3$ cm; DE este mai mare cu 1 cm decît EF, $AB = CD$ și BC este mai mare cu 2 cm decît CD?

Răspuns : Evident, $DE = 3$ cm $+ 1$ cm $= 4$ cm, $BC = 3$ cm $+$ $+ 2$ cm $= 5$ cm, și deci :

$AB + BC + CD + DE + EF = 3$ cm $+ 5$ cm $+ 3$ cm $+ 4$ cm $+$ $+ 3$ cm $= 18$ cm.

VII.125. Desenați pe hîrtie drumul parcurs de buburuza din problema anterioară și stabiliți propozițiile false și propozițiile adevărate din cele ce urmează :

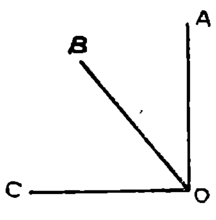
a) $AB = BC$; c) $DE > EF$; e) $AB = 5$ cm;
b) $BC < DE$; d) $CD \neq EF$; f) $DE = 4$ cm.

Răspuns : Avem : a) falsă ; b) falsă ; c) adevărată ; d) falsă ; e) falsă ; f) adevărată.

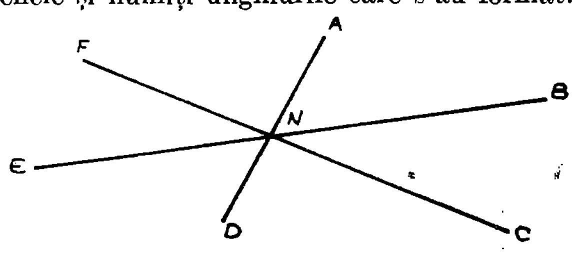
VII.126. Stabiliți un punct O, apoi trasați o semidreaptă cu originea în O, apoi o a doua așezată în prelungirea semidreptei trasate anterior (cu originea în același punct).

VII.127. Priviți desenele și numiți unghiurile care s-au format.

a)



b)

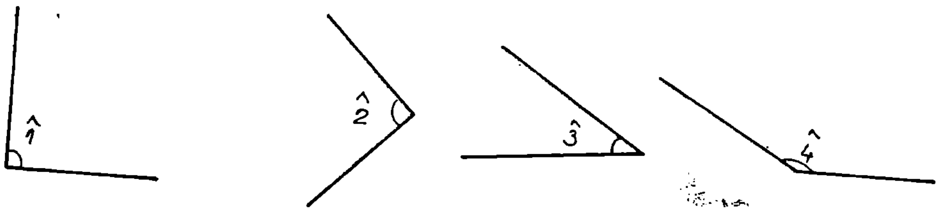


Răspuns : a) S-au format unghiurile $\widehat{COB}$, $\widehat{BOA}$, $\widehat{COA}$; b) s-au format unghiurile $\widehat{DNE}$, $\widehat{ENF}$ etc.

VII.128. Desenaţi segmente de dreaptă cu lungimile : $CD = 6$ cm, $EF = 8$ cm, $GH = 10$ cm.

Ce poziţie pot avea cele trei segmente ?

VII.129. Priviţi unghiurile desenate mai jos :



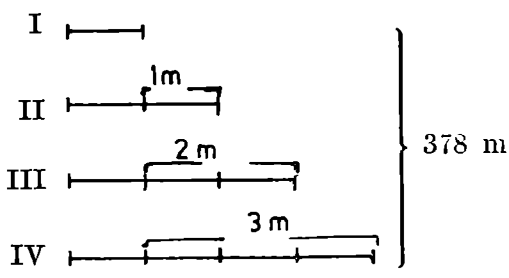
şi stabiliţi propoziţiile false şi adevărate :

a) $\hat{2} < \hat{1}$;
b) $\hat{1} = \hat{2} = 90°$;
c) $\hat{2}$ este de două ori mai mare decît 3 ;
d) $\hat{3} < \hat{4}$;
e) $\hat{4} > \hat{2}$;
f) $\hat{4}$ este de 3 ori mai mare decît 3 ;

Răspuns : Avem : a) falsă ; b) adevărată ; c) adevărată ; d) adevărată ; e) adevărată ; f) adevărată.

VII.130. Suma lungimilor laturilor unui patrulater oarecare este de 378 m. Stabiliţi lungimea fiecăreia, dacă mărimile sînt numere consecutive.

Răspuns : Trebuie să reprezentăm grafic dimensiunile laturilor patrulaterului, pe care le notăm cu I, II, III, IV.



Împătritul lungimii laturii cea mai scurtă este 378 m – 6 m = 372 m.

Latura ce mai mică are lungimea 372 m : 4 = 93 m ; celelalte vor fi, atunci, de 94 m, 95 m, 96 m.

VII.131. Un gospodar și-a susținut vița de vie pe spaliere formate din 5 rînduri de sîrmă de 23 m lungime fiecare.

Calculați lungimea sîrmei instalate pe cele 30 de spaliere.

Răspuns : Lungimea totală a spalierelor este 30 × 23 m = 690 m. Lungimea sîrmei folosite este 5 × 690 m = 3 450 m.

VII.132. O livadă are forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 12 dam și 10 dam. Ea este împrejmuită de un gard întrerupt doar pentru construirea unei porți cu lățimea egală cu $\frac{1}{5}$ din diferența dintre dimensiunile dreptunghiului.

Cîți metri are gardul ?

ăspuns : Diferența dintre dimensiuni este 12 dam — 10 dam = = 2 dam = 20 m. Lățimea porții este 20 m : 5 = 4 m. Perimetrul dreptunghiului este 2 × 12 dam + 2 × 10 dam = 24 dam + + 20 dam = 44 dam = 440 m. Lungimea gardului este 440 m — — 4 m = 436 m.

VII.133. Calculați cîți pomi sînt necesari pentru a fi plantați din 4 m în 4 m de-a lungul unor terenuri în formă de :

a) pătrat cu perimetrul de 32 m ;
b) dreptunghi cu perimetrul de 80 m ;
c) cerc cu lungimea de 120 m.

Răspuns : a) 8 pomi ; b) 80 m : 4 m = 20 (intervale) deci 20 pomi ; c) 120 m : 4 m = 30 (intervale), deci 30 pomi.

VII.134. De-a lungul unei alei cu lungimea de 300 m, la distanță de 10 m începînd cu capătul aleii se așază bănci pînă la celălalt capăt.

Cîte bănci s-au folosit dacă trebuie așezate pe o singură parte a aleii ?

Răspuns : Băncile se așază pe o linie deschisă, deci numărul lor va fi egal cu numărul intervalelor plus 1. Avem 300 m : 10 m = 30 (intervale) deci 30 + 1 = 31 este numărul băncilor instalate de-a lungul aleii.

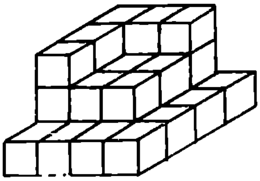
VII.135. De-a lungul unei alei cu lungimea de 300 m la distanță de 10 m începînd și terminînd la 10 m distanță de capetele aleii se instalează bănci.

Cîte bănci sînt necesare pe cele două părți ale aleii ?

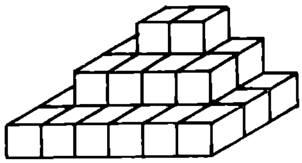
Răspuns : Numărul băncilor așezate pe o linie deschisă, exceptînd capetele, la distanțe egale va fi egal cu numărul intervalelor minus 1. Sînt 300 m : 10 m = 30 (intervale), deci numărul băncilor instalate pe alee este 30 — 1 = 29 ; pe două părți vor fi 2 × 29 = 58 (bănci).

VII.136. Calculați numărul de cuburi folosite în construcțiile următoare:

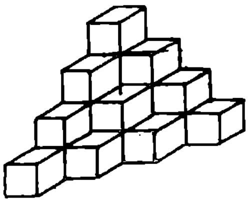
a)



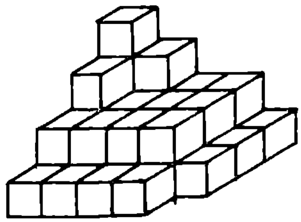
b)



c)



d)



Răspuns : a) 30 cuburi ; b) 28 cuburi ; c) 20 cuburi ; d) 35 de cuburi.

VII.137. Tăiați un dreptunghi de hîrtie $ABCD$ și după ce îl răsuciți o dată, lipiți latura AB peste DC astfel ca punctul A să coincidă cu C, iar B cu D. Suprafața aceasta nu are decît o ***singură*** față.

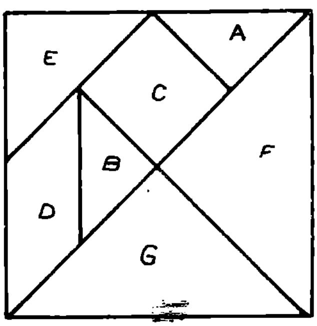
Verificați astfel: pregătiți pentru fiecare față o culoare și începeți să colorați cu una din ele. Ce observați ?

Răspuns: Banda s-a colorat în întregime cu o singură culoare. Banda poartă numele de „Banda lui MÖBIUS"

VII.138. Tăiați pe mijloc această bandă curioasă în lungul ei și vedeți ce ați obținut.

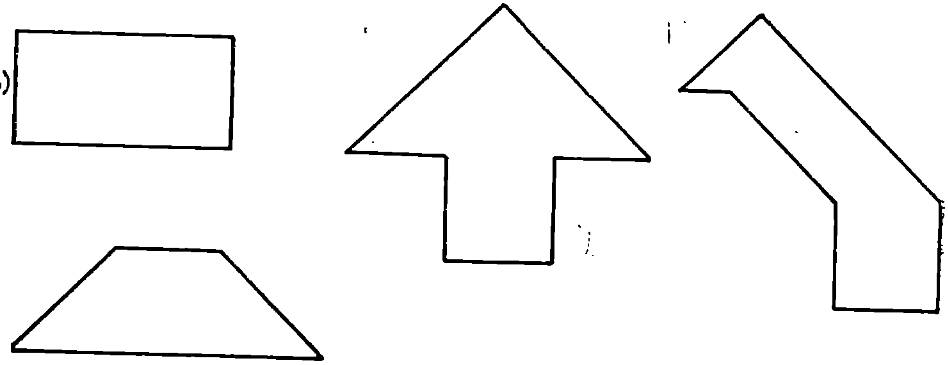
Răspuns : Se obține o bandă de două ori mai lungă ca cea inițială.

VII.139. Tăiați un pătrat de hîrtie în bucăți asemănătoare cu cele indicate mai jos prin litere de tipar, apoi verificați dacă figurile indicate în continuare pot fi alcătuite din:



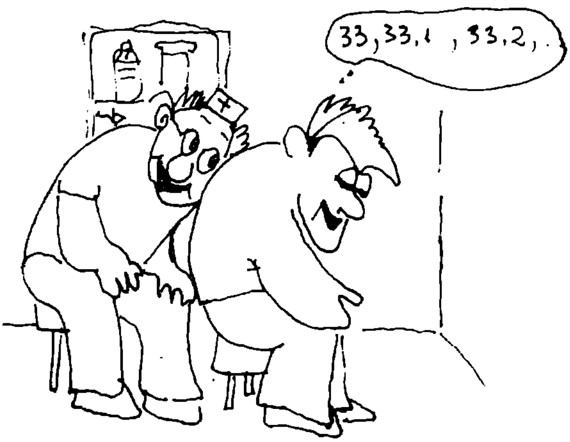
a) A ; B ; C ;
b) A ; C ; B ;
c) F ; C ;
d) A ; D ; C.
↓

a)



b) c) d)

VII.140. Construiți probleme asemănătoare cu cea anterioară, împărțind un triunghi, un dreptunghi, un romb, în diverse bucăți și considerînd figuri care pot fi alcătuite cu aceste bucăți.



Răspuns : Laturile figurilor respective sînt continuate de liniile din mijloc.

VII.141. De o parte și de alta a unei ulițe cu lungimea de 120 m, s-au așezat la distanță de 20 m unul de altul stîlpi pentru liniile telefonice.

Cîți stîlpi s-au folosit, dacă în fiecare capăt a fost instalat cîte unul?

fig. 1

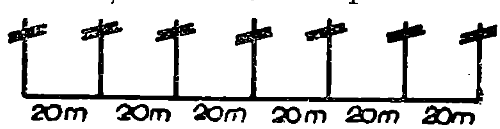
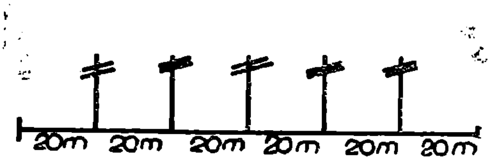


fig. 2



Răspuns : Există 120 m : 20 m = 6 (intervale pe o singură parte a uliței). Pentru fiecare parte sînt necesari 6 + 1 = 7 stîlpi, dacă pe această linie deschisă stîlpii sînt așezați și la fiecare capăt ca în figura 1. Sînt deci necesari 2 × 7 = 14 (stîlpi pe amîndouă părțile).

Dacă nu plasăm stîlpi în capete, vor fi necesari 10 stîlpi, pe o parte, fiind așezați ca în figura 2.

VII.142. Alcătuiți o problemă asemănătoare cu cea anterioară dar plantînd pe marginile uliței pomi, copaci, păstrînd datele.

VII.143. Pe marginea unui teren în formă de trapez se așază pari la distanță de 5 m unul de celălalt, pentru construcția unui gard. Baza mare și laturile neparalele sînt egale avînd fiecare lungimea de 30 m, baza mică avînd cu 10 m mai puțin.

Cîți pari s-au folosit?

Răspuns : Baza mică are lungimea 30 m − 10 m = 20 m. Perimetrul este 20 m + 3 × 30 m = 110 m. Numărul parilor necesari pentru construcția gardului este 22.

VII.144. Pe un teren trebuie plantați în lățime pomi în rînduri de cîte 7 exemplare la distanță de 3 m unele de celelalte.

Cîți pomi sînt necesari, dacă lungimea terenului pe care se plantează este de 70 m și distanța de la margini pînă la primele rînduri de pomi este de 2 m?

Răspuns : De la primul rînd pînă la ultimul este o distanță de 70 m − − 2 m − 2 m = 66 m.

Există 66 m : 3 m = 22 (intervale) deci 22 + 1 = 23 este numărul de rînduri de pomi, rîndurile avînd pomii plantați de la capete. Există, în total, 7 × 23 pomi = 161 pomi.

VII.145. De-a lungul șoselei Sinaia—Predeal se plantează pe o distanță de 2 km plopi la distanța de 10 m unul de celălalt.

S-au adus pentru această acțiune 405 plopi ce trebuie plantați de o parte și de alta a șoselei începînd de la punctul cel mai apropiat de Sinaia și terminînd plantatul la distanța de 2 km de punctul de la care s-a pornit.

Ajung plopii?

Răspuns : Există 2 km : 10 m = 2 000 m : 10 m = 200 (intervale). 200 + 1 = 201 este numărul de plopi necesari pentru fiecare parte a șoselei. Pentru ambele părți ale șoselei sînt necesari 201 plopi × 2 = 402 plopi.

Numărul plopilor aduși pentru plantat este cu 3 mai mare decît numărul plopilor necesari pentru această acțiune.

VII.146. Pe marginea unei fețe de masă în formă de pătrat cu latura de 4 m se pun ciucuri la distanța de 10 dm unul de celălalt.

Ajung 14 ciucuri pentru a respecta condițiile stabilite anterior?

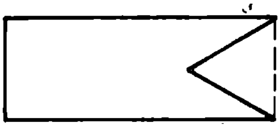
Răspuns : Perimetrul pătratului este 4 × 4 m = 16 m. Numărul ciucurilor necesari pentru fața de masă este 16 m : 10 dm = 160 dm : 10 dm = 16. Rezultă că 14 ciucuri sînt puțini; lipsesc 2 ciucuri.

VII.147. Dintr-o bucată de pînză roșie cu lungimea de 72 cm și lățimea de 64 cm s-au tăiat eșarfe cu lățimea de 8 cm.

Cum trebuie tăiată pînza pentru a avea cel mai mare număr de eșarfe și ce lungime vor avea ele?

Răspuns: Putem avea 72 cm: 8 cm = 9 (eșarfe cu lungimea de 64 cm); tăieturile se vor face de-a lungul lățimii. De asemenea, putem avea 64 cm: 8 cm = = 8 (eșarfe cu lungimea de 72 cm); tăieturile se vor face paralel cu lungimea.

VII.148. Dintr-o bucată dreptunghiulară de pînză albastră cu lungimea de 40 cm și lățimea de 15 cm se taie un triunghi de pînză cu laturile de lungimi egale cu lățimea dreptunghiului, așa cum se arată în desenul alăturat, pentru a se confecționa un fanion.



Pe marginea bucății rămase se prinde o bentiță subțire pentru a nu se destrăma materialul.

Ce lungime are bentița?

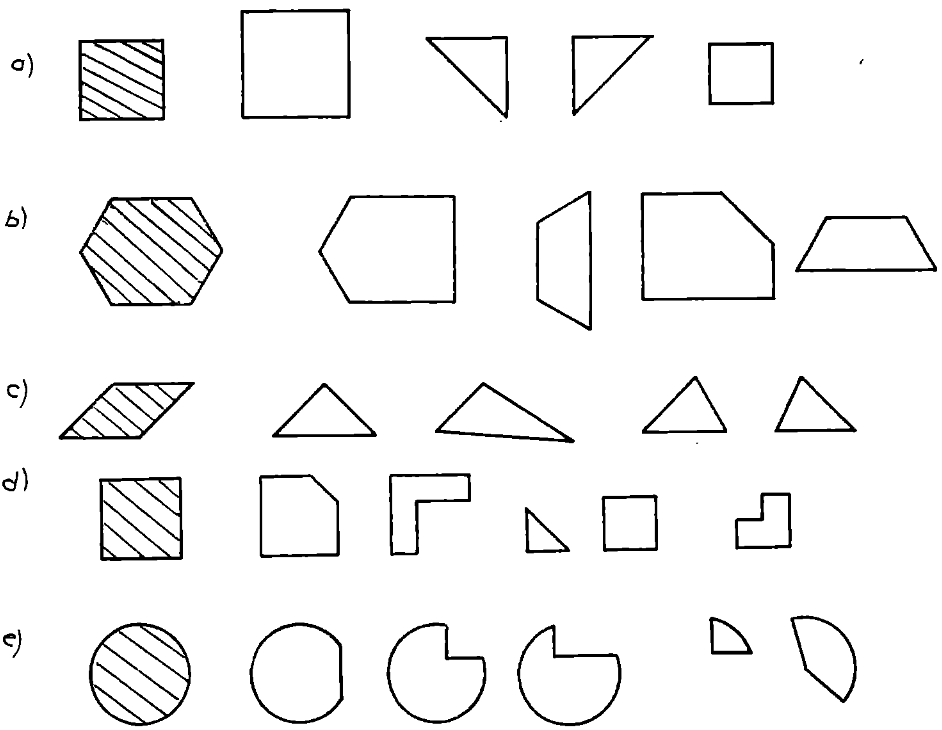
Răspuns: Marginea pe care s-a pus bentița are lungimea de 3×15 cm $+ 2 \times 40$ cm $= 125$ cm.

VII.149. Un lac în formă de paralelogram are perimetrul de 2 485,2 dam și una din laturi cu lungimea de 342 dam.

Care este lungimea celeilalte laturi?

Răspuns: Semiperimetrul este 2 485,2 dam : 2 = 1 242,6 dam. Cea de a doua dimensiune a paralelogramului este 1 242,6 dam − 342 dam = = 900,6 dam.

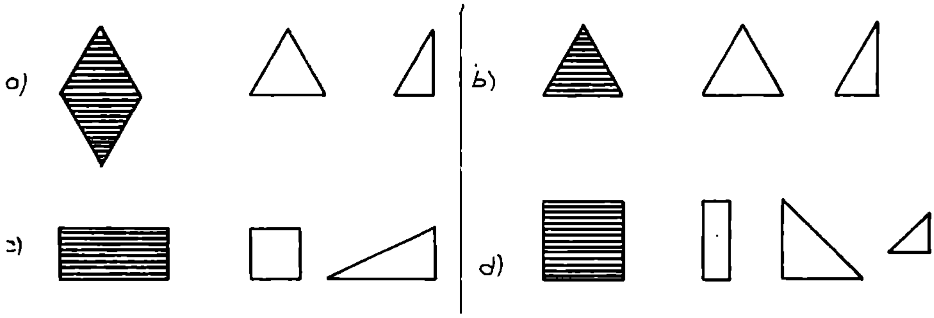
VII.150. Care din suprafețele așezate în dreapta figurilor geometrice hașurate compun aceste suprafețe?



Verificați răspunsurile confecționînd din hîrtie figurile și comparîndu-le.

Răspuns : a) A doua ; și a treia ; b) A doua și a patra ; c) Ultimele două ; d) Prima și a treia, respectiv a doua și a patra ; e)A doua și a patra.

VII.151. Cîte figuri geometrice compun figura hașurată cu linii orizontale ?



Răspuns : a) Două de primul tip sau patru de al doilea ; b) Una de primul tip sau două de al doilea.

VII.152. Confecționați din hîrtie 100 pătrate cu latura de 1 cm și unul cu latura de 1 dm.

Acoperiți suprafața pătratului cu latura de 1 dm cu pătrățele ce au suprafața de 1 cm. Ce observați ?

Răspuns : Pătratul cu latura 1 dm este complet acoperit cu cele 100 de pătrate cu latura de 1 cm.

VII.153. Confecționați din hîrtie un dreptunghi cu lungimea de 7 cm și lățimea de 3 cm. Acoperiți această suprafață cu pătrate cu latura de 1 cm.

Cîte astfel de pătrate sînt necesare ?

Răspuns : Sînt necesare 21 de pătrate cu latura de 1 cm.

VII.154. Scrieți formulele de calcul pentru a exprima numărul de pătrate cu latura de 1 cm care ar acoperi pătratul și dreptunghiul cu lungimile laturilor exprimate prin numere întregi.

Răspuns : Fie L și l lungimea și, respectiv, lățimea dreptunghiului sînt necesare $L \times l$ pătrate pentru acoperire. În cazul pătratului sînt necesare $l \times l$ pătrate pentru acoperire, unde l este lungimea laturii pătratului.

VII.155. Confecționați un pătrat cu latura de 1 m și calculați cîte pătrate asemănătoare sînt necesare pentru a acoperi diferite suprafețe.

VII.156. Reamintiți-vă unitățile de măsură pentru suprafețe și efectuați transformările următoare :

a) $1\ cm^2 = ?\ mm^2$;	b) $23\ hm^2 = ?\ dam^2$;
$1\ km^2 = ?\ hm^2$;	$7\ m^2 = ?\ dm^2$;
$1\ dam^2 = ?\ m^2 = ?\ dm^2$;	$9\ cm^2 = ?\ dm^2$;
$1\ m^2 = ?\ dm^2 = ?\ cm^2 = ?\ mm^2$;	$32\ km^2 = ?\ hm^2 = ?\ dam^2$;

c) $100\ dm^2 = ?\ m^2$;
$5\ m^2 = ?\ dm^2 = ?\ cm^2 = ?\ mm^2$;
$100\,000\ m^2 = ?\ dam^2 = ?\ hm^2$
$1\,000\,000\ dam^2 = ?\ hm^2 = ?\ km^2$;
$100\,000\ mm^2 = ?\ cm^2 = ?\ dm^2$;

d) $356\,700\ m^2 = ?\ dam^2 = ?\ hm^2 = ?\ km^2$;
$0{,}938\ mm^2 = ?\ cm^2 = ?\ dm^2$;
$500\,000\ m^2 = ?\ dam^2 = ?\ hm^2$;
$5\,678\ cm^2 = ?\ dm^2 = ?\ m^2$;

e) 1 ar $= ?\ m^2$;
1 ha $= ?\ dam^2 = ?\ m^2$;
$3\,700\,000\ m^2 = ?\ km^2 = ?$ ha;
$378\ km^2 = ?$ ha $= ?$ ar.

Răspuns: Avem :

a) $1\ cm^2 = 100\ mm^2$;
$1\ km^2 = 100\ hm^2$;
$1\ dam^2 = 100\ m^2 = 10\,000\ dm^2$;
$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2$;

b) $23\ hm^2 = 2\,300\ dam^2$;
$7\ m^2 = 700\ dm^2$;
$9\ cm^2 = 0{,}09\ dm^2$;
$32\ km^2 = 3\,200\ hm^2 = 320\,000\ dam^2$;

c) $100\ dm^2 = 1\ m^2$;
$5\ m^2 = 500\ dm^2 = 50\,000\ cm^2 = 5\,000\,000\ mm^2$;
$100\,000\ m^2 = 1\,000\ dam^2 = 10\ hm^2$;
$1\,000\,000\ dam^2 = 10\,000\ hm^2 = 100\ km^2$;
$100\,000\ mm^2 = 1\,000\ cm^2 = 10\ dm^2$;

d) $356\,700\ m^2 = 3\,567\ dam^2 = 35{,}67\ hm^2 = 0{,}3567\ km^2$;
$0{,}938\ mm^2 = 0{,}00938\ cm^2 = 0{,}0000938\ dm^2$;
$500\,000\ m^2 = 5\,000\ dam^2 = 50\ hm^2$;
$5\,678\ cm^2 = 56{,}78\ dm^2 = 0{,}5678\ m^2$;

e) 1 ar $= 100\ m^2$;
1 ha $= 100\ dam^2 = 10\,000\ m^2$;
$3\,700\,000\ m^2 = 3{,}7\ km^2 = 370$ ha;
$378\ km^2 = 37\,800$ ha $= 3\,780\,000$ ari;

VII.157. Calculați aria unui dreptunghi dacă lungimea lui este de 8 m, iar lățimea cu 2 m mai mică.

Răspuns : Aria dreptunghiului este 48 m^2.

VII.158. Ce suprafață are o față de masă în formă de pătrat dacă lungimea unei laturi este de 2 m?

Răspuns : Suprafața feței de masă este 4 m^2.

VII.159. Lungimea unei grădini de zarzavat este de 62 m, iar lățimea de 2 ori mai mică decît lungimea.

Aflați aria acestei grădini de zarzavat.

Răspuns : Aria grădinii este 1 922 m^2.

VII.160. Calculați numărul dalelor de piatră de formă pătratică cu latura de 1 m folosite pentru pavarea unui teren de sport cu perimetrul de 700 m și lungimea de 4 ori mai mare decît lățimea.

ăspuns : Semiperimetrul terenului este 700 m : 2 = 350 m. Lățimea terenului este 350 m : 5 = 70 m. Lungimea terenului este 4 × 70 m = 280 m. Aria terenului este 70 m × 280 m = = 19 600 m². Numărul dalelor folosite este 19 600 m² : 1 m² = = 19 600.

VII.161. Perimetrul unei curți în formă de pătrat este de 120 m. Calculați aria curții.

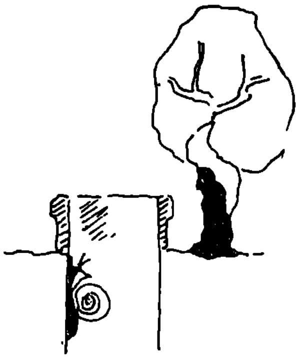
Răspuns : Aria curții este 900 m².

VII.162. Pentru sădirea unei tulpini de pătlăgea roșie este necesară o arie de 60 cm².

Cîte răsaduri se pot sădi pe un teren cu lungimea de 70 m și lățimea cu 40 m mai mică?

Răspuns : Lățimea terenului este 70 m − 40 m = 30 m. Aria terenului este 70 m × 30 m = 2 100 m². Numărul răsadurilor de pătlăgea roșie este 2 100 m² : 60 cm² = 2 100 m² : 0,006 m² = 350 000.

VII.163. Construiți probleme asemănătoare cu cea anterioară.



VII.164. Perimetrul unui pătrat este de 16 cm.

Măriți lungimea a două laturi opuse cu 3 cm. Calculați perimetrul și aria figurii geometrice obținute.

ăspuns : Latura pătratului are lungimea 16 cm : 4 = 4 cm. Prin mărirea a două laturi opuse cu 3 cm se obține un dreptunghi. Lungimea dreptunghiului este 4 cm + 3 cm = 7 cm. Perimetrul dreptunghiului este 2 × (7 cm + 4 cm) = 22 cm. Aria dreptunghiului este 7 cm × 4 cm = 28 cm².

VII.165. Decupați un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 7$ cm și $BC = 4$ cm. La distanța de 2 cm de punctul C se consideră punctul O pe segmentul DC. Uniți punctele B și O apoi faceți o tăietură de-a lungul segmentului BO.

Ce formă geometrică au bucățile obținute?

Așezați bucățile în așa fel încît laturile BC și DA ale celor două bucăți să coincidă.

Ce figură geometrică ați obținut și ce arie are?

Răspuns : Tăind dreptunghiul de-a lungul segmentului BO obținem un triunghi dreptunghic și un trapez dreptunghic. Prin lipirea celor două bucăți în forma indicată obținem un paralelogram cu aceeași arie ca a dreptunghiului inițial.

VII.166. Strada noastră a fost asfaltată pe o lungime de 530 m. Ce suprafață s-a asfaltat dacă lățimea străzii este de 10,5 m ?
Răspuns : Aria suprafeței asfaltate este 530 m $\times$ 10,5 m $= 5\,565$ m^2.

VII.167. Ce lungime are clasa noastră dacă suprafața parchetului este de 96 m^2, iar lățimea clasei este de 8 m ?

Răspuns : Lungimea clasei este 12 m.

VII.168. Un teren cu aria de 93 dam^2 avînd lungimea de 31 dam se seamănă cu porumb.

Care este lățimea terenului ?

Răspuns : Lățimea terenului este 3 dam.

VII.169. Un coridor cu lățimea de 3 m trebuie ceruit. Știind că pentru această operație este necesară o cutie cu ceară care ajunge pentru o suprafață de 36 m^2, aflați lungimea coridorului.

Răspuns : Lungimea coridorului este 12 m.

VII.170. Baia este pardosită cu plăci pătrate din gresie cu latura de 1 dm. Știind că sînt 8 rînduri de cîte 30 plăci aflați aria pardoselii.

Răspuns : Dacă pardoseala a fost acoperită cu 8 rînduri de cîte 30 plăci, dimensiunile ei sînt de 8 dm și 30 dm.

Suprafața pe care s-au așezat gresii este 8 dm $\times$ 30 dm $= 240$ dm^2.

VII.171. Un zugrav, calculînd cantitatea de vopsea ce o are în cutii află că se poate folosi de ea pentru a acoperi o suprafață de 42 dm^2.

Pe ce lățime se poate întinde vopseaua dacă lungimea suprafeței vopsite este de 14 dm ?

Răspuns : Lățimea suprafeței este de 3 dm.

VII.172. Trei din pereții unei camere cu lungimea de 3 m și înălțimea de 2,20 m trebuie acoperiți cu tapet.

Pe ce suprafață se întinde tapetul ?

Răspuns : Suprafața tapetată este 19,80 m^2.

VII.173. Un bazin de înot are lungimea de 50 m și lățimea de 16 m.

a) Calculați suprafața bazinului ;

b) Pe ce distanță înoată un băiat care înconjoară o dată pe lîngă margine întreg bazinul ajungînd la locul de unde a plecat ?

Răspuns : Suprafața bazinului este 800 m^2, iar perimetrul este 132 m.

VII.174. Pe tavanul unei camere cu lungimea de 6 m și lățimea de 2 ori mai mică se trage la distanță de 10 cm de marginile tavanului o dungă de vopsea.

Ce lungime are dunga?

Răspuns: Lățimea tavanului este 6 m : 2 = 3 m.

Dimensiunile dreptunghiului desenat pe tavan sînt:

lungimea: 6 m — 10 cm — 10 cm = 600 cm — 10 cm — 10 cm = 580 cm;

lățimea: 3 m — 10 cm — 10 cm = 300 cm — 10 cm — 10 cm = 280 cm.

Dunga are lungimea 2(580 cm + 280 cm) = 1 720 cm.

VII.175. Un tablou cu dimensiunile 40 cm și 20 cm trebuie înrămat. Care este lungimea ramei și care este suprafața geamului necesar pentru protejarea picturii?

Răspuns: Lungimea ramei este 120 cm, iar suprafața geamului, 800 cm^2.

VII.176. Pentru hrana zilnică a vitelor sale, un țăran cosește o suprafață de 280 m^2 de fîneață.

Într-una din zile se hotărăște să cosească aceeași suprafață cu lățimea de 7 m.

Calculați lungimea.

Răspuns: Lungimea suprafeței este 40 m.

VII.177. O echipă de muncitori a montat 30 de geamuri avînd fiecare forma unui pătrat cu latura de 42 cm. Costul montării unui metru pătrat de geam este 15 lei.

Calculați cîți lei trebuie plătiți pentru cele 30 de geamuri.

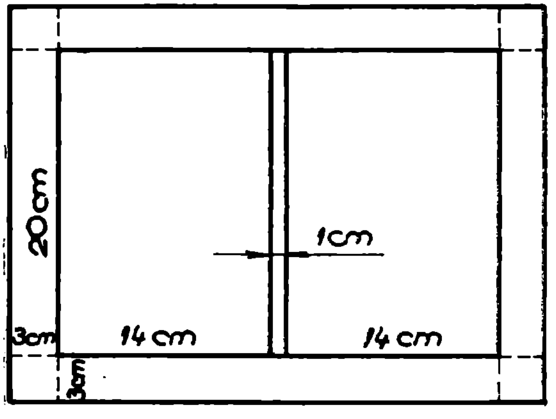
Răspuns: Suprafața unui geam este 42 cm $\times$ 42 cm = 1 764 cm^2 Suprafața celor 30 de geamuri este 30 $\times$ 1 764 cm^2 = 52 920 cm^2 = 5,2920 m^2. Costul montării este 5,2920 $\times$ 15 lei = 79,38 lei sau, rotunjind 79,40 lei.

VII.178. Care este aria unui teren cu perimetrul de 24 m, dacă lungimea este egală cu numărul de metri a trei lățimi?

Răspuns: Lățimea este 24 m : 8 = 3 m, iar lungimea 3 $\times$ 3 m = 9 m. Aria este 3 m $\times$ 9 m = 27 m^2.

VII.179. Un caiet are lățimea de 14 cm, lungimea de 20 cm, iar grosimea de 1 cm. Ce suprafață are hîrtia albastră care îmbracă acest caiet, dacă marginea caietului este acoperită în interior cu 3 cm de hîrtie?

Răspuns: Reprezentăm suprafața hîrtiei printr-un desen:



Lungimea hîrtiei albastre este 2×3 cm $+ 2 \times 14$ cm $+ 1$ cm $= 6$ cm $+ 28$ cm $+ 1$ cm $= 35$ cm.

Lăţimea hîrtiei albastre este 2×3 cm $+ 20$ cm $= 6$ cm $+ 20$ cm $= 26$ cm.

Aria hîrtiei este 35 cm $\times$ 26 cm $= 910$ cm^2.

VII.180. O cameră are lungimea de 5,5 m, iar lăţimea $\frac{4}{5}$ din lungime. Camera se pardoseşte cu linoleum cu preţul de 120 lei metrul pătrat.

Cît costă pardositul camerei?

Răspuns : Lăţimea camerei este $(5{,}5\text{ m} : 5) \times 4 = 4{,}4$ m. Aria pardoselei este 5,5 m $\times$ 4,4 m $= 24{,}20$ m^2. Preţul linoleumului este $24{,}20 \times 120$ lei $= 2\,904$ lei.

VII.181. Lotul şcolar are aria de 17 400 m^2. Livada acoperă $\frac{1}{3}$ din aria lotului, iar grădina de zarzavat $\frac{1}{4}$ din rest.

Ce suprafaţă rămîne pentru plante ornamentale?

Răspuns : Aria livezii este 17 400 m^2 : 3 $= 5\,800$ m^2. Aria grădinii de zarzavat şi a celei cu plante ornamentale este 17 400 m^2 $-$ 5 800 m^2 $= 11\,600$ m^2. Aria grădinii de zarzavat este 11 600 m^2 : 4 $= 2\,900$ m^2. Aria terenului cu plante ornamentale este 17 400 m^2 $-$ 5 800 m^2 $-$ 2 900 m^2 $= 8\,700$ m^2.

VII.182. În curtea sa în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 20 m şi 40 m, un agricultor toarnă un trotuar cu lăţimea de 1 m, aşezat pe lăţimea curţii.

Ce suprafaţă rămîne pentru culturi?

Răspuns : Aria curţii este 20 m $\times$ 40 m $= 800$ m^2. Aria trotuarului este 1 m $\times$ 20 m $= 20$ m^2. Aria cultivată este 800 m^2 $-$ 20 m^2 $= 780$ m^2.

VII.183. Pe o parcelă dreptunghiulară cu lungimea de 22,5 dam şi lăţimea de 108 m s-a semănat porumb.

Dacă de pe un ar s-au recoltat 20 kg porumb, aflaţi ce cantitate s-a recoltat de pe întreg terenul.

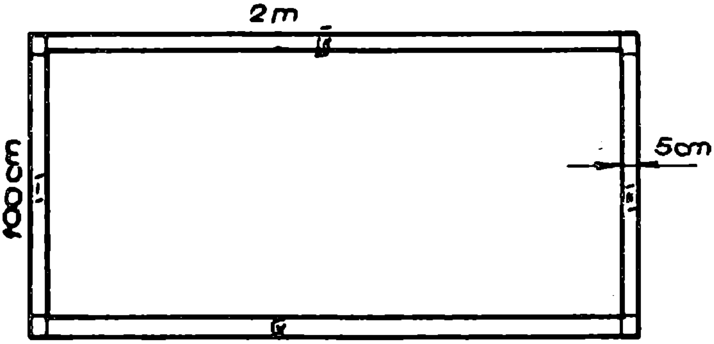
Răspuns : Suprafaţa parcelei este 22,5 dam $\times$ 108 m $= 22{,}5$ dam $\times$ 1,08 dam $= 243$ dam^2 sau ari.

Dacă de pe un ar s-au recoltat 20 kg porumb, rezultă că de pe 243 ari s-au recoltat 243×20 kg $= 4\,860$ kg.

VII.184. Pe marginea unei coli de desen cu lungimea de 2 m şi lăţimea de 100 cm necesară pentru împodobirea clasei, un elev desenează un chenar ornamental avînd lăţimea de 5 cm.

Cît timp îi este necesar elevului pentru terminarea lucrării dacă pentru 10 cm² sînt necesare 3 minute?

Răspuns : Chenarul determină pe suprafaţa colii un dreptunghi interior. Chenarul avînd lăţimea 5 cm, dimensiunile dreptunghiului interior sînt 200 cm — 5 cm — 5 cm = = 190 cm = 1,9 m, respectiv 100 cm — 5 cm — 5 cm = = 90 cm = 0,9 m. Aria dreptunghiului interior este egală cu produsul dimensiunilor lui, adică 1,9 m × 0,9 m = 1,71 m². Aria ramei este egală cu diferenţa dintre aria dreptunghiului mare şi aria dreptunghiului interior, adică 2 m² — 1,71 m² = 0,29 m² = 2 900 cm². Există, în total, un chenar, 2 900 cm² : 10 cm² = 290 de suprafeţe (care nu se acoperă unele



pe altele) de cîte 10 cm². Cum pentru desenarea unei astfel de porţiuni sînt necesare 3 minute, pentru desenarea celor 290 de porţiuni sînt necesare 290 × 3 minute = 870 minute, adică 14 ore şi 30 minute.

VII.185. O sală de lectură de formă dreptunghiulară are capacitate pentru 20 cititori, socotind cîte 1 m² pentru fiecare.
Calculaţi lăţimea sălii dacă lungimea sa este de 5 m.
Răspuns : Aria sălii este 20 × 1 m² = 20 m². Rezultă că lăţimea sălii este 20 m² : 5 m = 4 m.

VII.186. O grădină de zarzavat în formă de dreptunghi are lungimea de 400 m, iar lăţimea $\frac{2}{5}$ din lungime.
Lungimea unei livezi este de 462 m, iar lăţimea de 3 ori mai mică.
Cu cît este mai mică aria grădinii decît cea a livezii?

Răspuns : Lăţimea grădinii de zarzavat este (400m : 5) × 2 = 80m × × 2 = 160 m. Lăţimea livezii este 462 m : 3 = 154 m. Rezultă de aici că aria grădinii de zarzavat este 400 m × 160 m = = 64 000 m², iar aria livezii este 462 m × 154 m = 71 148 m². Deci aria grădinii este mai mică decît aria livezii cu 71 148 m² — 64 000 m² = 7 148 m².

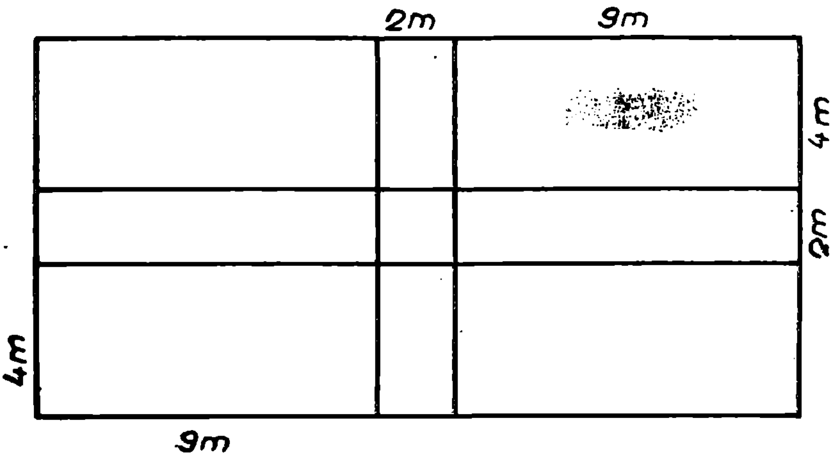
VII.187. Pe un loc dreptunghiular cu perimetrul de 540 m şi lăţimea $\frac{1}{2}$ din lungime se construieşte o şcoală care ocupă un loc în formă de dreptunghi cu lungimea de 90 m şi lăţimea de 40 m, restul terenului fiind ocupat de o grădină de zarzavat şi de terenul de sport.

Ce arie au grădina şcolii şi respectiv terenul de sport dacă aria terenului de sport reprezintă $\frac{1}{3}$ din terenul rămas neacoperit de construcţia şcolii?

Răspuns : Deoarece lăţimea este $\frac{1}{2}$ din lungimea dreptunghiului, rezultă că lungimea este de două ori mai mare decît lăţimea. Perimetrul dreptunghiului este suma dintre dublul lăţimii şi dublul lungimii (care este, deci, împătritul lăţimii). Rezultă deci, că perimetrul dreptunghiului este de $2 + 4 = 6$ ori mai mare decît lăţimea, adică lăţimea dreptunghiului este $540 \text{ m} : 6 = 90$ m. Atunci lungimea este egală cu $2 \times 90 \text{ m} = 180$ m, deci aria terenului pe care se construieşte şcoala este $180 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 16\,200 \text{ m}^2$. Locul ocupat efectiv de şcoală are aria $40 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 3\,600 \text{ m}^2$, deci aria terenului destinat grădinii şcolii şi terenului de sport (la un loc) este de $16\,200 \text{ m}^2 - 3\,600 \text{ m}^2 = 12\,600 \text{ m}^2$.

Aria terenului de sport este $12\,600 \text{ m}^2 : 3 = 4\,200 \text{ m}^2$, şi deci aria grădinii este $12\,600 \text{ m}^2 - 4\,200 \text{ m}^2 = 8\,400 \text{ m}^2$.

VII.188. Curtea în formă de dreptunghi a unei fabrici are două alei cu aceeaşi lăţime, ca în desenul alăturat. Calculaţi suprafaţa cultivată cu plante ornamentale ştiind că dimensiunile curţii precum şi lăţimea aleilor sînt cele notate pe desen.



Răspuns : Suprafaţa unei parcele cultivată cu plante ornamentale este $9 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 36 \text{ m}^2$. Suprafaţa totală cultivată cu plante ornamentale este $4 \times 36 \text{ m}^2 = 144 \text{ m}^2$.

VII.189. O sală de clasă are lungimea de 12 m. Ştiind că efectivul clasei este de 30 de elevi şi că fiecare are repartizată o suprafaţă de 2 m², calculaţi lăţimea clasei.

Răspuns : Aria clasei este $30 \times 2\ m^2 = 60\ m^2$. Lățimea clasei este $60\ m^2 : 12\ m = 5\ m$.

VII.190. Un bazin în formă de pătrat are plantați la colțuri castani ca în desenul de mai jos :

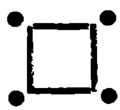


Fig. 1

Bazinul trebuie dublat ca suprafață. Cum realizăm acest lucru fără a distruge castanii ?

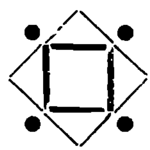


Fig. 2

Răspuns : Linia îngroșată din figura nr. 2 reprezintă marginile vechiului bazin, iar cea subțire marginile noului bazin.

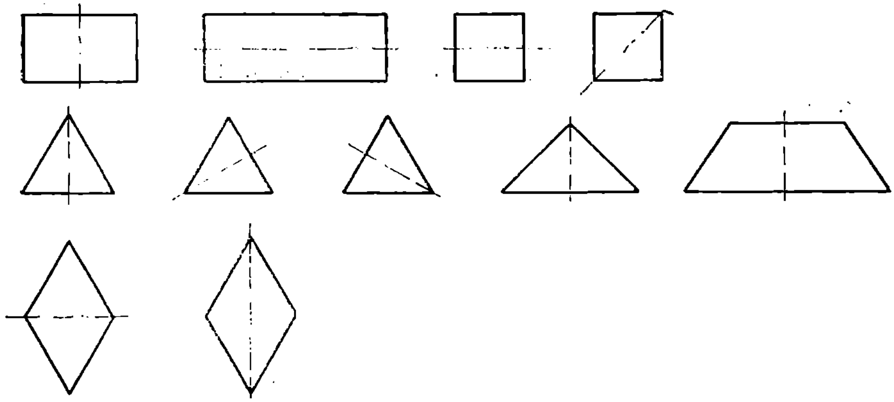
Verificați corectitudinea răspunsului confecționînd un pătrat din hîrtie căruia să-i stabiliți diagonalele. Alăturați pătratului 4 triunghiuri egale cu oricare din cele ce sînt formate în interiorul pătratului în așa fel încît bazele să coincidă cu laturile pătratului.

VII.191. Un dreptunghi cu dimensiunile de 130 dm și 85 m are același perimetru ca al unui pătrat.

Cîți metri are latura pătratului ?

Răspuns : Perimetrul dreptunghiului este $2 \times (130\ dm + 85\ m) = 2 \times (13\ m + 85\ m) = 2 \times 98\ m = 196\ m$. Latura pătratului are lungimea $196\ m : 4 = 49\ m$.

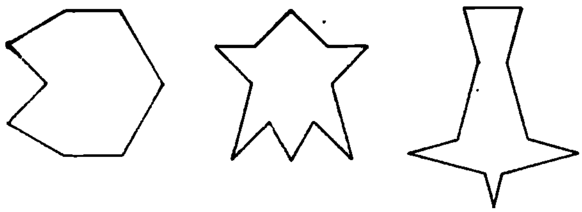
VII.192. Luați o foaie dreptunghiulară și îndoiți-o în așa fel încît părțile obținute de o parte și de alta a îndoiturii să se suprapună. Repetați operația cu o foaie în formă de pătrat, de cerc, de romb, de trapez isoscel, de triunghi echilateral, de triunghi isoscel. Urmăriți desenele și verificați dacă ați obținut aceleași modalități de pliere a figurilor geometrice.



Aceasta este *axa de simetrie*. Ce figuri geometrice învățate nu au axă de simetrie?

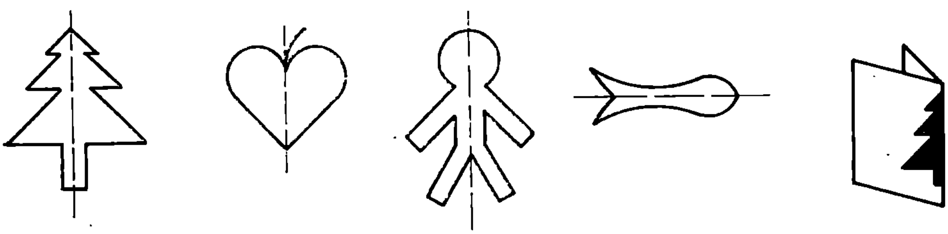
Răspuns : Nu au axă de simetrie un triunghi care nu este isoscel sau echilateral, un trapez care nu este isoscel, etc.

VII.193. Stabiliți axa de simetrie a următoarelor figuri :



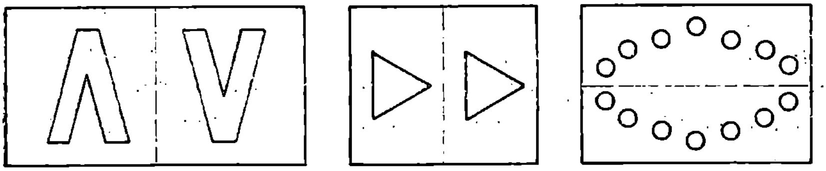
Desenați și alte figuri cărora să le stabiliți axa de simetrie.

Observație. Decupați mai ușor o figură în formă de brad, de frunză, de pește ținînd seama de axa lor de simetrie. Urmăriți acest lucru în desenele următoare :



VII.194. Studiați-vă figura în oglindă și stabiliți părțile simetrice.

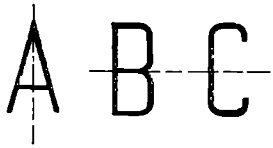
VII.195. Stabiliți dacă figurile alăturate sînt simetrice.



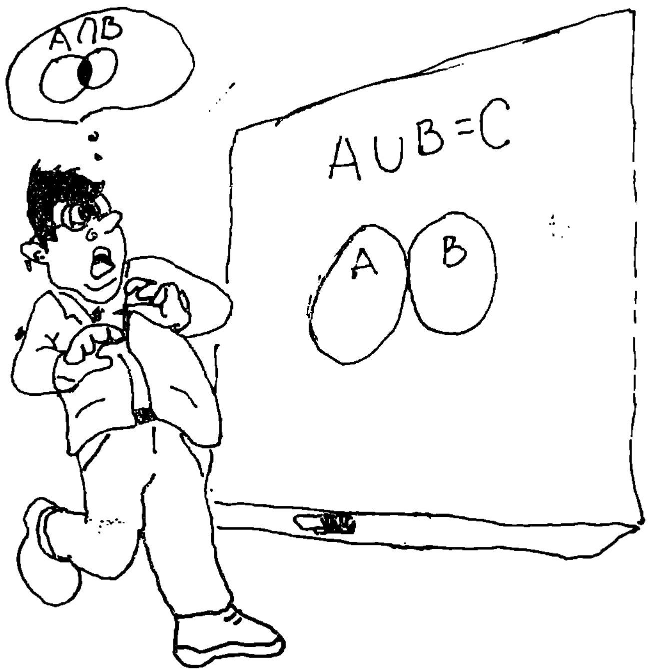
Răspuns : Nu sînt simetrice figurile din primele două desene.

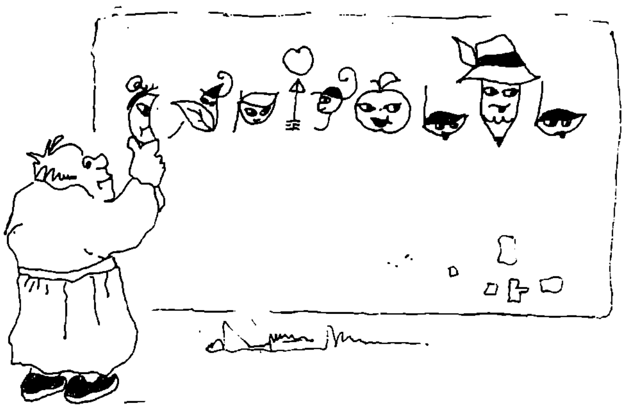
VII.196. Stabiliţi care din literele mari ale alfabetului de tipar au axă de simetrie.

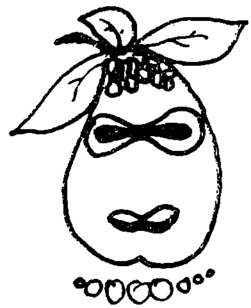
Răspuns : Exemple : A, B, C, etc.



VII.197. Construiţi figura simetrică cu cea din desenul alăturat.







METODE DE REZOLVARE ALE UNOR PROBLEME DE ELEVII DIN ÎNVĂŢĂMÎNTUL PRIMAR

VIII.A. Probleme rezolvate prin metoda grafică

Rezolvarea unor probleme mai grele este condiţionată de reprezentarea datelor printr-un desen, respectîndu-se relaţiile dintre aceste date. Reprezentarea se poate face prin segmente de dreaptă, prin figuri geometrice, prin prezentarea schematică a unor obiecte, fiinţe etc.

Prin această metodă putem afla două numere cînd se cunoaşte suma şi diferenţa lor; de asemenea, putem afla două numere cînd se cunoaşte suma şi raportul lor.

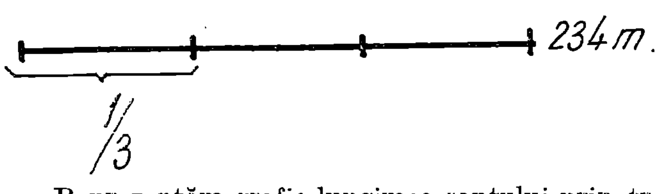
Alte probleme care se pot rezolva prin metoda grafică în ciclul primar sînt problemele:

a) de aflare a unei fracţii dintr-un întreg;

b) de aflare a unui întreg cînd se cunoaşte o anumită fracţie din acel întreg etc.

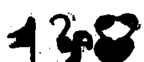
Prezentăm, în continuare, cîteva astfel de probleme.

VIII.A.1. O echipă de muncitori trebuie să sape un şanţ în lungime de 234 m. Într-o săptămînă sapă $\frac{1}{3}$. Cîţi metri a săpat echipa în acea săptămînă?

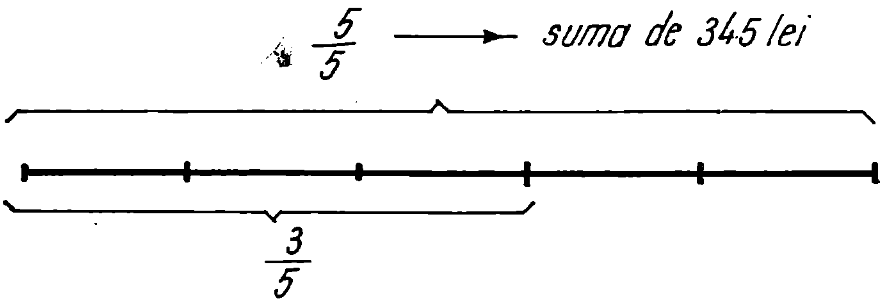


Răspuns: Reprezentăm grafic lungimea şanţului prin trei segmente de aceeaşi lungime. Lungimea unui segment este 234 m : 3 = 78 m. Deci, în acea săptămînă, echipa a săpat 78 m.

VIII.A.2. Din suma de 345 lei, Andrei cheltuieşte $\frac{3}{5}$ pentru o cămaşă. Ce sumă a cheltuit?



Răspuns : Reprezentăm grafic suma pe care a avut-o Andrei şi suma cheltuită, păstrînd relaţia dintre cele două sume.



Suma 345 lei : 5 $= 69$ lei reprezintă $\frac{1}{5}$ din 345 lei. Suma 3×69 lei $=$ $= 207$ lei reprezintă $\frac{3}{5}$ din 345 lei.

După un şir de reprezentări prin segmente a datelor acestui tip de problemă, elevii îşi formează algoritmul de determinare a unei fracţii dintr-un număr: întîi se stabileşte valoarea unităţii fracţionare, apoi a unităţilor fracţionare, sau împărţim numărul la numitor şi înmulţim cu numărătorul. Aceste noţiuni au fost tratate şi în capitolul V, acum reluîndu-se pentru a fi consolidate.

VIII.A.3. Într-o cisternă sînt 2 400 l de benzină. Se folosesc $\frac{5}{8}$ din această cantitate. Cîţi litri s-au folosit?

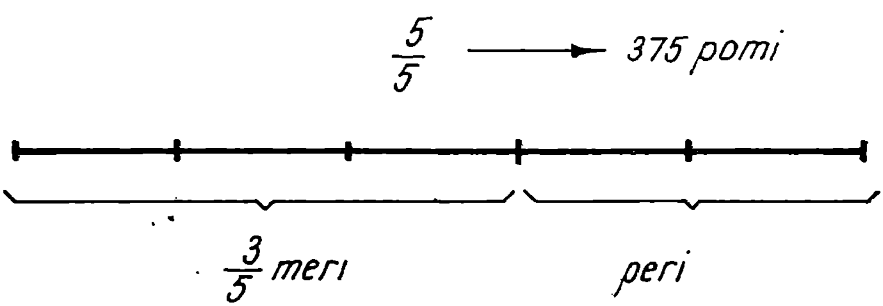
Răspuns : S-au folosit 1 500 l benzină.

VIII.A.4. Din cei 3 773 de elevi ai unei şcoli, $\frac{4}{7}$ sînt fete. Cîte fete sînt în şcoală?

Răspuns : În şcoală sînt 2 156 fete.

VIII.A.5. Din numărul de 375 pomi ai livezii, $\frac{3}{5}$ sînt meri. Care este numărul perilor care reprezintă restul din numărul total de pomi?

Răspuns : Reprezentarea grafică este :



Vom da două soluții:

a) Numărul de meri care reprezintă $\frac{3}{5}$ din total este $(375 : 5) \times 3 = 225$. Numărul de peri este $375 - 225 = 150$.

b) Fracția $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ reprezintă numărul de peri din total deci $(375 : 5) \times 2 = 150$ este numărul de peri care reprezintă $\frac{2}{5}$ din total.

VIII.A.6. Cîte kilograme de ghindă a cules un pionier dacă el a predat la școală 135 kg de castane și ghindă, iar castanele reprezintă $\frac{2}{3}$ din cantitatea totală de fructe de pădure?

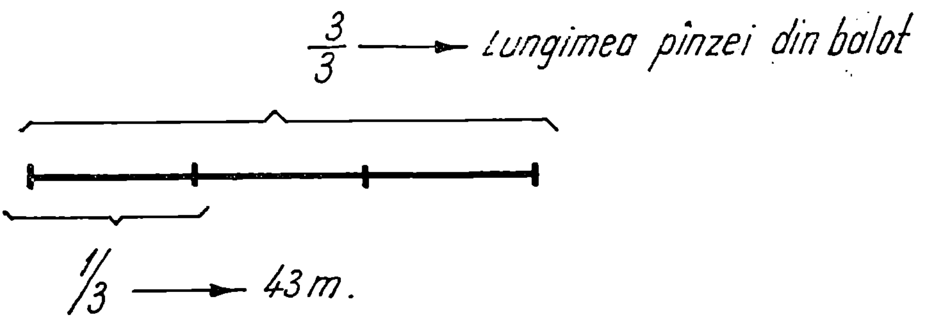
Răspuns: Pionierul a cules 45 kg ghindă.

VIII.A.7. Ogorul unui C.A.P. cu aria de 2 373 ha a fost cultivat pe $\frac{2}{7}$ din suprafață cu grîu, $\frac{1}{7}$ cu orez, iar restul cu porumb.

Care este suprafața ocupată de fiecare fel de cultură?

Răspuns: 678 ha au fost cultivate cu grîu, 339 ha orez, iar 1 356 ha cu porumb.

VIII.A.8. Dintr-un balot de pînză, lungimea de 43 m reprezintă $\frac{1}{3}$ din lungimea totală.

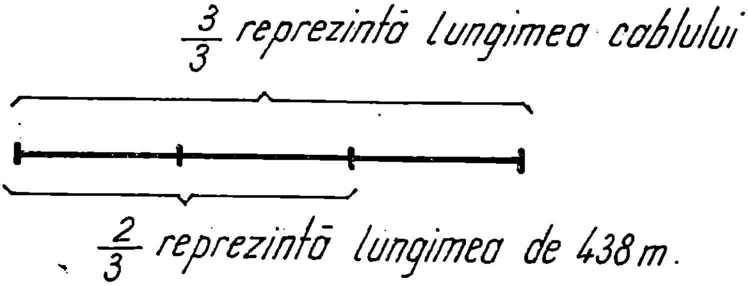


Care a fost lungimea pînzei din acel balot?

Răspuns: Lungimea pînzei din balot este 3×43 m $= 129$ m.

VIII.A.9. Dintr-un cablu telefonic, 438 m reprezintă $\frac{2}{3}$ din lungimea totală. Această porțiune de cablu a fost instalată de o echipă de muncitori într-o singură zi.

Care este lungimea cablului telefonic ce trebuie instalat de echipa de muncitori și în cît timp o vor instala?



Răspuns : Lungimea 438 m : 2 = 219 m reprezintă $\frac{1}{3}$ din lungimea totală a cablului; 3×219 m = 657 m reprezintă $\frac{3}{3}$ din lungime, adică lungimea totală a cablului. Deci cablul se poate instala într-o zi şi jumătate.

VIII.A.10. Din numărul total de panseluţe ce au fost plantate de elevi în parcul din faţa şcolii într-o zi, $\frac{5}{8}$ reprezintă 235 panseluţe.

Cîte panseluţe au fost plantate în total?

Răspuns : Au fost plantate în total 376 panseluţe.

VIII.A.11. Un grup de excursionişti a parcurs 42 km, reprezentînd $\frac{2}{4}$ dintr-un drum ce trebuie parcurs pînă la o cabană.

Care este lungimea drumului pînă la cabană?

Răspuns : Lungimea drumului este 84 km.

VIII.A.12. Într-un magazin a fost adusă încălţăminte pentru femei şi bărbaţi. Pentru bărbaţi au fost aduse 438 perechi de încălţăminte care reprezintă $\frac{3}{9}$ din numărul total de perechi de încălţăminte.

Cîte perechi de încălţăminte au fost aduse pentru femei?

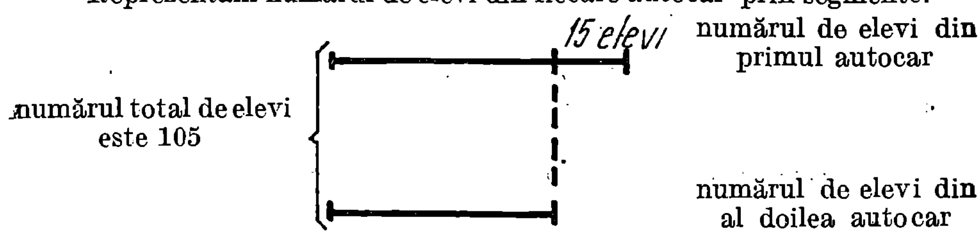
Răspuns : Pentru femei au fost aduse 876 perechi de încălţăminte.

VIII.A.13. Două autocare transportă în excursie 105 elevi.

Aflaţi cîţi elevi sînt în fiecare autocar dacă în primul sînt cu 15 elevi mai mulţi decît în al doilea.

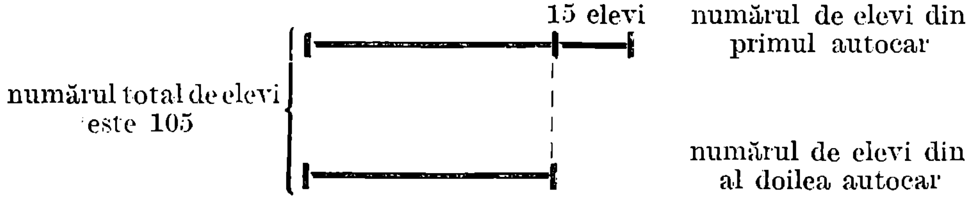
Răspuns : Recunoaştem în problemă suma şi diferenţa numărului de elevi din fiecare autocar.

Reprezentăm numărul de elevi din fiecare autocar prin segmente.



Reprezentarea grafică ne sugerează aflarea numărului de elevi din al doilea autocar prin „îndepărtarea" a 15 elevi; obținem astfel dublul numărului elevilor din al doilea autocar. Dublul acestui număr este $105 - 15 = 90$. Numărul elevilor din al doilea autocar este, deci, $90 : 2 = 45$. Numărul de elevi din primul autocar este $45 + 15 = 60$.

Reprezentarea grafică poate conduce și la altă modalitate de rezolvare:



Această reprezentare grafică sugerează aflarea numărului de elevi din primul autocar adăugînd numărului total de elevi un număr de 15 elevi; găsim, astfel, dublul numărului de elevi din primul autocar, număr pe care-l stabilim, apoi, prin împărțirea acestui număr la 2. Dublul numărului elevilor din primul autocar este $105 + 15 = 120$. Deci în primul autocar sînt $120 : 2 = 60$ (elevi). În al doilea autocar vor fi $60 - 15 = 45$ (elevi).

VIII.A.14. Un cal și o vacă consumă zilnic 34 kg de fîn. Aflați cîte kilograme de fîn mănîncă fiecare animal dacă zilnic calul consumă cu 2 kg mai mult fîn decît vaca.

Răspuns: Cele două animale consumă zilnic 18 kg, respectiv 16 kg fîn.

VIII.A.15. O echipă de tăietori de lemne a tăiat 600 de fagi și tei. Știind că numărul teilor este cu 66 mai mare decît numărul fagilor, aflați cîți tei și cîți fagi s-au tăiat.

Răspuns : S-au tăiat 267 fagi și 333 tei.

VIII.A.16. Un magazin alimentar a primit 880 de sticle cu ulei de floarea soarelui și soia. Numărul sticlelor cu ulei de floarea soarelui este cu 160 mai mic decît numărul sticlelor cu ulei de soia.

Cîte sticle cu ulei de floarea soarelui și cîte sticle cu ulei de soia s-au adus?

Răspuns : Magazinul a primit 360 sticle cu ulei de floarea soarelui și 520 sticle cu ulei de soia.

VIII.A.17. Suma a două numere este 1 200, iar diferența 300. Care sînt numerele?

Răspuns : Numerele sînt 450 și 750.

VIII.A.18. Suma a trei numere este 1 300. Primul este 200, iar al doilea este cu 300 mai mic decît al treilea.

Care sînt numerele pe care nu le cunoaștem?

Răspuns : Numerele necunoscute sînt 400 și 700.

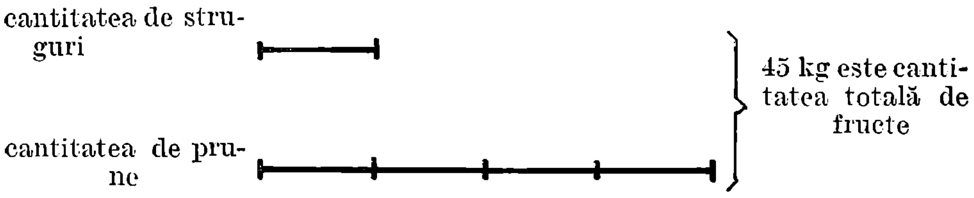
VIII.A.19. Suma a trei numere este 1 500. Primul este cu 300 mai mic decît al doilea. Care sînt numerele dacă al treilea este 300?

Răspuns : Cele două numere necunoscute sînt 450 și 750.

VIII.A.20. O gospodină pregătește dulceața din 45 kg de prune și struguri.

Ce cantitate de prune și ce cantitate de struguri a folosit gospodina atunci cînd cantitatea de prune este de 4 ori mai mare decît cea de struguri?

Răspuns : Reprezentăm prin segmente cantitățile de fructe:

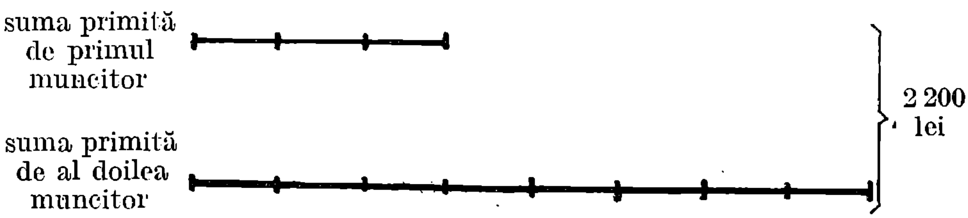


Cantitatea de struguri reprezintă a cincea parte, adică 45 kg : 5 = 9 kg.

Cantitatea de prune este 4 × 9 kg = 36 kg.

VIII.A.21. Doi muncitori au primit pentru o lucrare 2 200 lei. Știind că primului i se cuvin 3/8 din suma primită de al doilea, aflați cîți lei a primit fiecare.

Răspuns :



Cei 2 200 lei reprezintă 11 părți egale, 8 părți reprezentînd suma cuvenită celui de-al doilea muncitor și 3 părți reprezentînd suma cuvenită primului muncitor.

Suma 2 200 lei : 11 = 200 lei reprezintă o parte. Suma primită de primul muncitor este 3 × 200 lei = 600 lei. Suma primită de al doilea muncitor este 8 × 200 lei = 1 600 lei.

VIII.A.22. O țeavă lungă de 15 m trebuie tăiată în așa fel încît una din bucăți să fie de 4 ori mai lungă ca cealaltă.

Ce lungime trebuie să aibă fiecare bucată?

Răspuns : Lungimile țevilor trebuie să fie de 3 m și respectiv 12 m.

VIII.A.23. Clasele a II-a ale unei şcoli generale cuprind 255 elevi. Ştiind că fete sînt de 4 ori mai multe decît băieţi, aflaţi cîte fete şi cîţi băieţi sînt.

Răspuns : Clasele cuprind 51 băieţi şi 204 fete.

VIII.A.24. Într-o excursie s-au străbătut 1 600 km cu autobuzul şi pe jos. Porţiunea de 3/5 din drum a fost parcursă pe jos.

Cîţi kilometri s-au străbătut cu autobuzul şi cîţi pe jos?

Răspuns : 960 km s-au străbătut pe jos şi 640 km cu autocarul.

VIII.A.25. Trei copii au cheltuit împreună 102 lei. Primul a cheltuit cu 12 lei mai puţin decît al doilea, iar al doilea cu 24 de lei mai mult decît al treilea. Cîţi lei a cheltuit fiecare copil?

Răspuns: Cei trei copii au cheltuit: 34 lei, 46 lei, respectiv 22 lei.

VIII.B. Probleme rezolvate prin metoda reducerii la unitate; împărțirea în părți proporționale

Rezolvarea problemelor prin metoda reducerii la unitate constă în compararea mărimilor date cu o mărime obținută din această comparare luată ca unitate. Dîndu-se, de exemplu, relația : 10 kg de mere costă 55 lei. pentru a stabili cît costă 3 kilograme din același sortiment trebuie să determinăm prețul unitar al merelor pe care îl obținem judecînd astfel : dacă 10 kg de mere costă 55 lei, atunci 1 kg costă de 10 ori mai puțin, adică 55 lei : 10 = 5,50 lei. Rezultă că 3 kg costă de 3 ori mai mult, adică 3 × 5,50 lei = 16,50 lei.

Un alt exemplu de problemă care se rezolvă prin metoda reducerii la unitate este următorul: Un muncitor sapă un șanț lung de 54 m în 9 zile. Cîți metri de șanț sapă în 6 zile ?

Pentru rezolvare judecăm în felul următor: Într-o zi muncitorul sapă 54 m : 9 = 6 m. Rezultă că în 6 zile muncitorul va săpa 6m×6=36m.

Această metodă are avantajul că este simplă și este aplicabilă unei clase întregi de probleme întîlnite în practică. Deși problemele propuse în continuare sînt puține la număr, ele au fost alese în asemenea măsură încît să ocupe o tematică largă.

Prezentăm, în continuare, cîteva probleme care se rezolvă cu ajutorul acestei metode.

VIII.B.1. Pentru 8 l de lapte s-au plătit 24 lei. Cîți lei se vor plăti pentru 4 l de lapte?

Răspuns : Pentru 4 l de lapte se vor plăti 12 lei.

VIII.B.2. Un număr de 8 camioane pot transporta o cantitate de cereale în 10 zile. În cîte zile pot transporta 5 camioane aceeași cantitate de cereale?

Răspuns : Dacă 8 camioane transportă cantitatea de cereale în 10 zile, atunci un camion o va transporta într-o perioadă de timp de 8 ori mai mare, deci în 8 × 10 zile = 80 zile.

Cele cinci camioane vor transporta aceeași cantitate de cereale într-o perioadă de timp de 5 ori mai mică, deci în 80 zile : 5 = 16 zile.

VIII.B.3. Un număr de 10 muncitori execută un pod în 20 zile. În cîte zile execută 20 de muncitori aceeași lucrare dacă fiecare păstrează același ritm de lucru?

Răspuns : Cei 20 de muncitori execută lucrarea în 10 zile.

VIII.B.4. În 4 saci sînt 200 kg de ceapă. Cîte kilograme de ceapă sînt în 8 saci cu aceeași capacitate?

Răspuns : În cei 8 saci sînt 400 kg.

VIII.B.5. O bucată de stofă de 7 m lungime a costat 1 610 lei. Cît vor costa 3 m din aceeași stofă de aceeași calitate?

Răspuns : Cei 3 m de stofă costă 690 lei.

12 — c. 850

VIII.B.6. Pentru o cantină se cumpără 120 pîini. Cîți lei costă întreaga cantitate de pîine dacă pentru 10 pîini se plătesc 45 lei?

Răspuns : Cele 120 de pîini costă 540 lei.

VIII.B.7. Un număr de 3 bucăți de metal (liniare și omogene) au lungimile de 6 m, 8 m și respectiv 7 m. Ce greutate are prima și a doua bucată dacă a treia este de 49 kg?

Răspuns : Prima și a doua bucată cîntăresc 42 kg, respectiv 56 kg.

VIII.B.8. O pompă scoate 960 de căldări de apă în 5 ore. Cîte căldări de apă scoate pompa în 8 ore?

Răspuns : În 8 ore pompa scoate 1 536 căldări.

VIII.B.9. Într-un magazin de mobilă se aflau 46 de scaune de același fel necesare pentru mobilarea bucătăriilor. S-au vîndut 27 de scaune încasîndu-se 3 240 lei.

Cîți lei se vor încasa pe scaunele rămase?

Răspuns : Pe scaunele rămase urmează a se încasa 2 280 lei.

VIII.B.10. Două lăzi cu struguri cîntăresc 26 kg. Cantitatea de struguri din prima ladă valorează 70 de lei, iar cea din a doua ladă 60 de lei.

Aflați cantitatea de struguri din fiecare ladă.

Răspuns : În cele două lăzi sînt 14 kg și respectiv 12 kg struguri.

VIII.B.11. Un vapor parcurge distanța de 480 de km în 8 ore. Cîți kilometri parcurge vaporul în 6 ore avînd aceeași viteză?

Răspuns : Vaporul trebuie să parcurgă în 6 ore 360 km.

VIII.B.12. Un număr de 12 tractoare ară un ogor în 5 zile.

În cîte zile vor ara același ogor 15 tractoare (fiecare tractor avînd același ritm de lucru)?

Răspuns : Cele 15 tractoare vor lucra ogorul în 4 zile.

VIII.B.13. Pentru obținerea fontei, la un combinat siderurgic s-au folosit 2 030 tone de cărbuni, timp de 145 de zile. Pentru cîte zile vor ajunge 3 296 tone de cărbuni dacă zilnic se vor consuma cu 2 tone mai mult ca înainte?

Răspuns : Cele 3 296 tone vor ajunge 206 zile.

VIII.B.14. Zugrăvitul unei clădiri în care locuiesc 4 familii costă suma de 11 805 lei. Cu cîți lei va contribui fiecare familie dacă aceasta se face potrivit numărului de camere, două familii avînd cîte 3 camere fiecare, una cinci camere, iar una 4 camere?

Răspuns : Dacă se fixează contribuția pe care o aduce fiecare familie la acoperirea sumei de 11 805 lei conform numărului de camere, trebuie să stabilim numărul total de camere pentru ca apoi, prin reducerea la unitate, să se ajungă la contribuția pentru fiecare cameră.

În total sînt $3 + 3 + 5 + 4 = 15$. Suma ce revine pentru zugrăvirea fiecărei camere este 11 805 lei : 15 = 787 lei. Contribuția primei sau celei de a doua familii care au cîte 3 camere este 3×787 lei = 2 361 lei. Contribuția celei de a treia familii care are 5 camere este 5×787 lei =

156

= 3 935lei. Contribuția adusă de cea de a patra familie care are 4 camere este 4 × 787 lei = 3 148 lei.

Verificare : 2 361 lei + 2 361 lei + 3 935 lei + 3 148 lei = 11 805 lei

VIII.B.15. Pentru o cantitate de lapte aflată în trei cisterne se plătește suma de 2 511 lei.

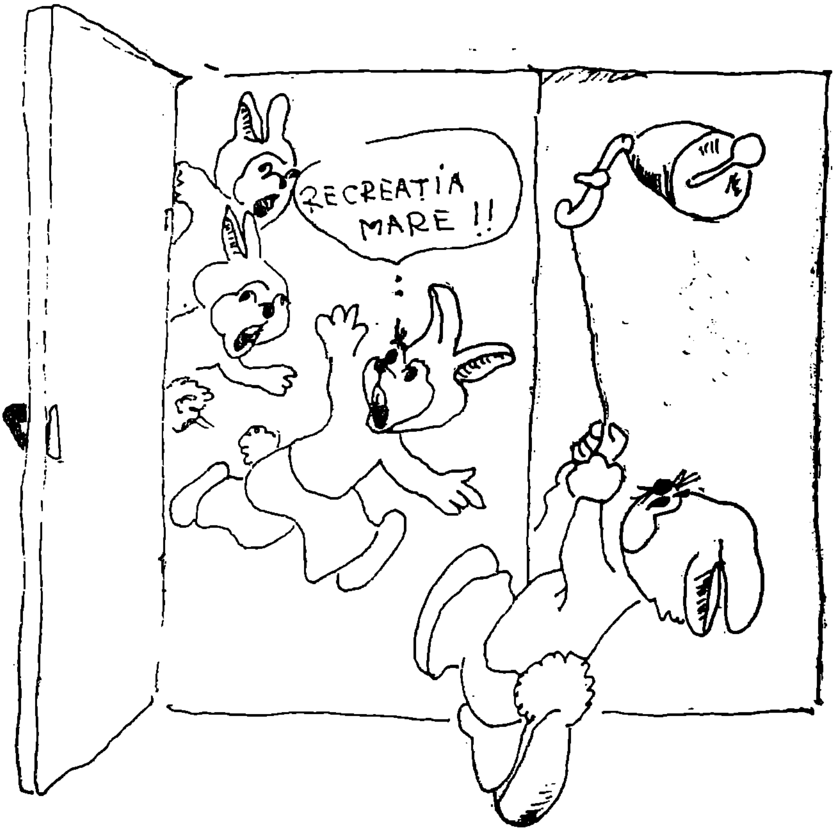
Cîți lei costă cantitatea de lapte din fiecare cisternă dacă în prima se află 245 l, în cea de-a doua 342 l, iar în a treia 250 l?

Răspuns : Cantitățile de lapte costă, respectiv, 735 lei, 1 026 lei. 750 lei.

VIII.B.16. Patru centre de croitorie au achiziționat stofă în valoare de 722 400 lei.

Cu cîți lei a contribuit fiecare centru dacă primele două au achiziționat cîte 250 m stofă fiecare, al treilea 320 m stofă, iar al patrulea 384 m?

Răspuns : Cele patru centre au contribuit, respectiv, cu 150 000 lei, 150 000 lei, 192 000 lei, 230 400 lei.



VIII.C. Probleme rezolvate prin metoda comparației

Explicăm aplicarea acestei metode prin problema următoare:

Pentru a face compot, o familie cumpără săptămînal 3 kg mere și 5 kg struguri care s-au plătit cu 53 de lei, iar alta 3 kg mere și 7 kg de struguri de aceeași calitate pentru care s-au plătit 67 lei.

Cîți lei costă un kilogram de mere și un kilogram de struguri?

Răspuns : Comparăm cele două situații :

3 kg (mere) . . . . . 5 kg (struguri) . . . . .53 lei (costul total)

3 kg (mere) . . . . . 7 kg (struguri) . . . . .67 lei (costul total)

Diferența dintre costurile cantităților de fructe cumpărate de cele două familii este datorată celor 2 kg de struguri cumpărate în plus de a doua familie.

Așadar, 2 kg struguri costă 67 lei — 53 lei = 14 lei. Rezultă că un kilogram de struguri costă de 14 lei : 2, deci 7 lei.

Pentru a afla prețul unui kilogram de mere este suficient să reducem problema la una din următoarele situații :

a) O familie cumpără 3 kg mere și 5 kg struguri cu prețul de 7 lei pentru un kilogram de struguri, plătind în total 53 lei.

Cît costă un kilogram de mere?

Costul celor 5 kg de struguri este 5 × 7 lei = 35 lei. Costul celor 3 kg de mere este 53 lei — 35 lei = 18 lei. Costul unui kilogram de mere este 18 lei : 3 = 6 lei.

b) O familie cumpără 3 kg mere și 7 kg struguri cu prețul de 7 lei pentru un kilogram de struguri, plătind în total 67 lei. Cît costă un kilogram de mere?

Costul celor 7 kg de struguri este 7 × 7 lei = 49 lei. Costul celor 3 kg de mere este 67 lei — 49 lei = 18 lei. Prețul unui kilogram de mere este 18 lei : 3 = 6 lei.

VIII.C.1. 17 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 210 kg, iar 21 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 410 kg.

Cîte kilograme are un sac cu făină? Dar un sac în care sînt cartofi?

Răspuns : Un sac cu făină cîntărește 50 kg, iar un sac în care sînt cartofi, 30 kg.

VIII.C.2. În gospodăria unui cooperator, 6 vaci și 15 oi consumă zilnic 180 kg de fîn. În gospodăria vecinului 3 vaci și 15 oi consumă cu 30 kg fîn mai puțin.

Cîte kilograme de fîn consumă o vacă și cîte kilograme consumă o oaie? Se presupune că fiecare fel de animal consumă zilnic o aceeași cantitate de fîn.

Răspuns : O vacă se hrănește, zilnic, cu 10 kg fîn, iar o oaie cu 8 kg.

VIII.C.3. Pentru 6 bluze și 2 pulovere s-au plătit 690 lei.

Cît costă o bluză și un pulovăr dacă 7 pulovere și 6 bluze de același fel valorează cu 600 lei mai mult?

Răspuns : O bluză costă 75 lei, iar un pulovăr costă 120 lei.

158

VIII.C.4. O școală cumpără pentru laboratorul de chimie 12 dulapuri mici, iar altă școală cumpără 7 dulapuri la fel și plătește cu 500 lei mai puțin.

Ce sumă plătește prima școală pentru cele 12 dulapuri cumpărate?

Răspuns : Cele 12 dulapuri costă 1 200 lei.

VIII.C.5. La un cămin de copii s-au cumpărat 54 m de pînză pentru cearceafuri.

Cît costă un metru de pînză dacă 63 m de pînză costă cu 252 de lei mai mult decît 54 m de pînză?

Răspuns : Un metru de pînză costă 28 lei.

VIII.C.6. În prima zi s-au vîndut într-un magazin 84 l de ulei. În a doua zi s-au vîndut 192 l și s-au încasat cu 1 836 lei mai mult decît în prima zi.

Cîți lei s-au încasat în total din vînzarea uleiului în cele două zile?

Răspuns : Costul unui litru de ulei este 1 836 lei : $(192 - 84) = 17$ lei. Deci, cum s-au vîndut $84\,l + 192\,l = 276$ litri de ulei, s-au încasat, în total, 276×17 lei $= 4\,692$ lei.

VIII.C.7. Un tren a transportat 27 de vagoane cu făină, iar alt tren 20 de vagoane. În primul tren au fost cu 1 155 q mai multă făină decît în al doilea tren.

Ce cantitate de făină a transportat fiecare tren, știind că vagoanele au aceeași capacitate?

Răspuns : Fiecare vagon are o capacitate de 1155 q : $(27 - 20) = 165$ q de făină. Astfel, primul tren a transportat $27 \cdot 165$ q $= 4\,455$ q, iar al doilea tren $20 \cdot 165$ q $= 3\,300$ q.

VIII.C.8. O stațiune de mașini și tractoare a primit o dată 1 260 l de motorină și altă dată 1 080 l, în butoaie de aceeași capacitate.

Aflați cîte butoaie a primit stațiunea dacă în primul transport au fost cu 3 butoaie mai mult decît în al doilea.

Răspuns : Deoarece un butoi are capacitatea de $(1\,260\,l - 1\,080\,l) : 3 = 180\,l : 3 = 60\,l$ motorină, în total s-au adus $(1\,260\,l + 1\,080\,l) : 60\,l = 39$ (butoaie).

VIII.C.9. Dintr-o mină o brigadă a scos 2 100 de vagonete de cărbune, iar altă brigadă 1 620 de vagonete.

Știind că prima brigadă a avut cu 16 muncitori mai mulți decît a doua brigadă, aflați numărul de muncitori din fiecare brigadă. (Muncitorii au realizat fiecare aceeași normă).

Răspuns : Cei 16 muncitori din prima brigadă au scos $2\,100 - 1\,620 = 480$ de vagonete, deci norma unui muncitor este de 480 vagonete : $16 = 30$ vagonete. Rezultă că prima brigadă are 70 de muncitori, iar a doua 54 muncitori pentru că $2\,100 : 30 = 70$, iar $1\,620 : 30 = 54$.

159

VIII.D. Probleme rezolvate prin metoda mersului invers

Prin această metodă se rezolvă unele probleme în care datele depind unele de altele succesiv. Analizînd raportul în care se află acestea, începînd cu ultima, se ajunge la răspunsul problemei. Ordinea rezolvării este deci inversă decît cea în care se succed datele problemei.

VIII.D.1. Dintr-o sumă de bani Ionel cheltuiește $\frac{1}{8}$ pentru o carte, $\frac{1}{7}$ din rest pentru o cutie cu creioane colorate și $\frac{1}{3}$ din noul rest pentru o căciuliță. I-au rămas 44 lei.

Cîți lei a avut?

Răspuns: Dacă au rămas 44 lei înseamnă că ei reprezintă $\frac{2}{3}$ din restul rămas după cumpărarea creioanelor colorate, deci $\frac{1}{3}$ reprezintă 22 lei, adică tocmai prețul căciuliței.

Suma rămasă după cumpărarea cutiei cu creioane este de 22 lei + + 44 lei = 66 lei și reprezintă $\frac{6}{7}$ din suma rămasă după cumpărarea cărții, deci $\frac{1}{7}$ înseamnă 11 lei, adică tocmai prețul cutiei de creioane.

Suma rămasă după cumpărarea cărții este de 11 lei + 66 lei = 77 lei, ce reprezintă $\frac{7}{8}$ din suma avută inițial, deci $\frac{1}{8}$ înseamnă 11 lei, adică tocmai prețul cărții, deci suma avută inițial de Ionel este de 88 lei.

VIII.D.2. Care sînt numerele care corespund fiecărei litere dacă:

1) a este de două ori mai mare decît b;
2) b este mai mare decît c cu 25;
3) c este mai mic decît d cu 40;
4) d este mai mare decît e de 3 ori;
5) 1 000 este mai mare decît e de 4 ori?

Răspuns: Rezultă $a = 1\,470$; $b = 735$; $c = 710$; $d = 750$; $e = 250$.

VIII.D.3. Se dau patru numere care satisfac condițiile:

a) primul este mai mic de 5 ori decît al doilea;
b) al doilea este de 15 ori mai mare decît al treilea;
c) al treilea este de 4 ori mai mic decît al patrulea;
d) al patrulea este de 16 ori mai mic decît 1 280.

Să se afle cele patru numere.

Răspuns: Cele patru numere sînt 60; 300; 20; 80.

160

SECȚIUNEA A II-A

CLASA A V-A

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

Noțiuni teoretice

În acest capitol vor fi folosite frecvent următoarele cunoștințe:

a) Șirul de numere naturale este infinit. Scriem:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, 16,\ 17, \ldots, 113,\ 114,\ 115,\ 116, \ldots$$

b) Adunarea numerelor naturale este o operație:

1) comutativă:

$$a + b = b + a,\ (\forall)\ a,\ b \in \mathbb{N}$$

2) asociativă:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c,\ (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N},$$

adică parantezele pot fi omise;

3) cu element neutru; acesta este numărul natural *zero*:

$$a + 0 = a,\ 0 + a = a,\ (\forall)\ a \in \mathbb{N}.$$

c) Scăderea de numere naturale nu este în general, o operație:

1) comutativă:

$$a - b \neq b - a;$$

2) asociativă:

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

adică parantezele au prioritate.

3) cu element neutru:

$$a - 0 = a$$

dar:

$$0 - a \neq a.$$

d) Într-un exercițiu în care avem numai adunări și scăderi nu aplicăm nici comutativitatea și nici asociativitatea; calculul se realizează în ordinea impusă de exercițiu și paranteze.

Dacă într-un exercițiu avem paranteze, prioritate au acestea.

În calcularea numărului $(a - b) - c$ pot fi omise parantezele și putem scrie: $a - b - c$.

e) Înmulțirea numerelor naturale este o operație:

1) comutativă:

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (\forall)\ a,\ b \in \mathbb{N};$$

2) asociativă:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c, \quad (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N},$$

adică pot fi omise parantezele;

3) cu element neutru; acesta este numărul natural 1:

$$a \cdot 1 = a,\ 1 \cdot a = a, \quad (\forall)\ a \in \mathbb{N};$$

4) cu proprietatea că:

$$a \cdot 0 = 0, \quad (\forall)\ a \in \mathbb{N};$$

(se spune că 0 „absoarbe" orice element);

5) distributivă față de adunare:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c); \end{aligned}\right. \quad (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$$

6) distributivă față de scădere:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b - c) &= (a \cdot b) - (a \cdot c), \\ (a - b) \cdot c &= (a \cdot c) - (b \cdot c) \end{aligned}\right. \quad (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$$

7) În loc de:

$$(a \cdot b) + (c \cdot d)$$

scriem:

$$a \cdot b + c \cdot d,$$

adică omitem parantezele şi ţinem seama că într-un astfel de exerciţiu efectuăm mai întîi înmulţirile şi apoi adunările.

Asemănător, în loc de:

$$(a \cdot b) - (c \cdot d)$$

vom scrie:

$$a \cdot b - c \cdot d$$

De reţinut că într-un exerciţiu cu adunări, scăderi şi înmulţiri, prioritate au înmulţirile şi apoi adunările şi scăderile, în ordinea scrierii lor.

f) În general, împărţirea de numere naturale:

1) nu este o operaţie comutativă:

$$a : b \neq b : a;$$

2) nu este o operaţie asociativă:

$$(a : b) : c \neq a : (b : c);$$

3) nu este o operaţie cu elementul neutru numărul 1:

$$a : 1 = a$$

dar $1 : a \neq a$.

g) Într-un exerciţiu în care avem numai înmulţiri şi împărţiri nu aplicăm nici comutativitatea şi nici asociativitatea; calculele se realizează în ordinea impusă de exerciţiu, iar parantezele au prioritate.

În exerciţiul $(a : b) : c$ pot fi omise parantezele: $a : b : c$.

În exerciţiul $a : (b : c)$ nu pot fi omise parantezele.

h) În loc de:

$$(a : b) + (c : d)$$

scriem:

$$a : b + c : d,$$

adică omitem parantezele şi ţinem seama că într-un astfel de exerciţiu efectuăm mai întîi împărţirile şi apoi adunările.

Asemănător, în loc de $(a : b) - (c : d)$ vom scrie: $a : b - c : d$.

De reținut că într-un exercițiu cu adunări, scăderi, înmulțiri și împărțiri, prioritate au înmulțirile sau împărțirile și apoi adunările sau scăderile.

i) $a^0 = 1$, dacă a este diferit de 0;

j) $a^1 = a$;

k) $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$,

unde n este număr natural diferit de 0 și de 1.

l) Cu puteri cu exponent număr natural se folosesc următoarele formule:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \text{ pentru } n \geqslant m;$$

$$(a^n)^m = a^{nm}; \ (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

m) În orice exercițiu unde apar paranteze și diverse operații, prioritate au parantezele.

n) În sistemul de numerație zecimal (cu baza 10), un număr, de exemplu, $\overline{abcd}$, se scrie:

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

o) În sistemul de numerație binar (cu baza 2) un număr, de exemplu $\overline{abcde}$ se scrie în baza 10:

$$\overline{abcde_2} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e;$$

Cifrele a, b, c, d, e în baza doi sînt una din cifrele 1 sau 0.

Operații în baze de numerație

Folosirea diverselor baze de numerație are, după cum am văzut, tradiții străvechi, fiind motivată de necesități sau avantaje concrete în practica socio-economică sau cultural-științifică.

Cu numerele naturale și, în general, cu numere reale scrise în astfel de baze se fac operații aritmetice, întrucît introducerea lor este legată de diverse aplicații numerice.

Schimbarea bazei

O primă operație este trecerea dintr-o bază oarecare n *în baza* **10** *și invers*, deci o operație de *conversiune*.

Bineînțeles, putem concepe — și uneori este necesar — conversiunea unui număr N, scris într-o bază n, într-o altă bază m. Dar, de obicei, aceasta se face prin intermediul conversiunii în baza 10 și apoi în baza m. Aceasta din cauza scrierii poziționale, care avantajează această bază zecimală prin folosirea cifrelor 1, 2, ..., 9 și a lui 0 cu semnificațiile de unități de primul ordin.

Vom da două exemple ilustrative:

1) *Să se scrie numărul* 235_6 *în baza* **10**.

Vom avea:

$$235_6 = (2 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5)_{10} = 2 \times 36 + 3 \times 6 + 5 = 95_{10}.$$

2) *Să se scrie numărul* 218_{10} *în baza* **6**.

Vom împărți $218 : 6 = 36 \times 6 + 2$, apoi $36 : 6 = 6^2$, deci:

$$218_{10} = 6^3 + 2 = 1 \times 6^3 + 0 \times 6^2 + 0 \times 6 + 2 = 1\,002_6$$

Operația de împărțiri succesive se poate pune sub forma de algoritm aritmetic, astfel:

a)
$$\begin{array}{rrl} 6) & 218 & \\ 6) & \overline{36} & \text{rest } 2 \\ 6) & \overline{6} & \text{rest } 0 \\ 6) & \overline{1} & \text{rest } 0 \\ & \overline{0} & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrl} 10) & 218 & \\ 10) & \overline{21} & \text{rest } 8 \\ 10) & \overline{2} & \text{rest } 1 \\ & \overline{0} & \text{rest } 2 \end{array}$$

mergîndu-se pînă se ajunge la un număr inferior bazei, care va constitui ultimul rest și, ca atare, prima cifră a numărului supus conversiunii.

De altfel, algoritmul se poate folosi și în baza 10 ca verificare, după modelul b) de mai sus.

Determinarea bazei

***O a doua operație este găsirea bazei în care a fost scrisă o relație numerică, unde cunoaștem semnificațiile simbolurilor în baza* 10**.

Vom da alte două exemple ilustrative:

3) ***Primind semnale radio din spațiul cosmic, s-a înregistrat relația*: $54 + 7 = 63$. *Este ea adevărată și în ce bază?***

R. Fie n baza. Cum relația nu conține simboluri noi, vom atribui cifrelor semnificațiile din baza 10 și vom avea:

$$5n + 4 + 7 = 6n + 3,$$

de unde $n = 8$.

Relația este adevărată în baza 8.

4) *La un examen, un elev a scris pe tablă relația de egalitate 225 — — 85 = 190 și comisia a considerat-o corectă. A avut motive?*

R. În baza 10 desigur că nu, dar poate într-o altă bază n, da. Verificarea se face scriind ecuația:

$$2n^2 + 2n + 5 - 8n - 5 = n^2 + 9n + 0$$

care conduce la $n^2 - 15n = 0$, de unde $n \in \{0, 15\}$. În baza 15 relația este corectă.

Odată stabiliți, algoritmii de trecere de la o bază la alta și, în particular la cea zecimală și invers, precum și recunoașterea relațiilor numerice în diferite baze, aritmetica în diverse baze implică algoritmizarea operațiilor fundamentale de *adunare* și *scădere*.

Întrucît am introdus mai înainte baza 12, vom exemplifica operațiile respective în această bază, care are anumite rădăcini în practică, dar vom observa că și alte baze sînt folosite și astăzi în practică. De exemplu, baza 7 este folosită curent în evaluarea săptămînilor: spunem 9 săptămîni și 5 zile, ceea ce în baza 7 se scrie;

$$9 \times 7 + 5 = (7 + 2) \times 7 + 5 = 1 \times 7^2 + 2 \times 7 + 5 = 125_7.$$

Folosim și baza 24 în evaluarea orelor unei zile. Astfel, 4 zile și 3 ore se vor scrie $4 \times 24 + 3 = 43_{24}$.

Adunarea în baza 12

În baza 12 am introdus simbolurile $\alpha = 10_{10}$ și $\beta = 11_{10}$. Vom prezenta adunarea și scăderea prin două exemple.

5) *Să se efectueze adunarea* $\overline{28\alpha 5} + \overline{1\beta 69}$, *numerele fiind scrise în baza* **12**.

R. Vom nota pentru un moment $12 = n$, operația putînd fi pusă atunci sub forma:

$$(2n^3 + 8n^2 + \alpha n + 5) + (n^3 + \beta n^2 + 6n + 9) =$$
$$=(2n^3 + 8n^2 + 10n + 5) + (n^3 + 11n^2 + 6n + 9) =$$
$$= (3n^3 + 19n^2 + 16n + 14)_{10} = 3n^3 + (12n^2 + 7n^2) +$$
$$+ (12n + 4n) + (12 + 2) = (3n^3 + n^3 + 7n^2 + n^2 + 4n + n + 2) =$$
$$= (4n^3 + 8n^2 + 5n + 2)_{10} = 4852_{12}$$

Operația se poate reface printr-un algoritm care se aplică numai numeralelor de primul ordin, așa cum facem în baza 10. Urmărind calculele de mai sus putem scrie, succesiv:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 28\alpha 5 \\ \underline{1\beta 69} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 28\alpha 5 \\ \underline{1\beta 69} \\ 52 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 28\alpha 5 \\ \underline{16\beta 9} \\ 852 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ 28\alpha 5 \\ \underline{1\beta 69} \\ 4852 \end{array}$$

Cifra 1, pusă deasupra simbolurilor grafice, indică adunarea unei unităţi de ordinul respectiv, exact ca în cazul adunării în baza zecimală. O scriem aici pentru a atrage atenţia asupra operaţiei, dar în general nu se marchează decît mnemotehnic, la fel ca în cazul adunării în sistemul zecimal.

Scăderea în baza 12

6) *Să se efectueze scăderea* $\overline{23\alpha6} - \overline{6\beta8}$ *în baza* 12.

R. Pentru a deduce uşor algoritmul, vom nota, din nou, $n = 12$, $\alpha = 10_{10}$, $\beta = 11_{10}$ şi vom scrie:

$$(2n^3 + 3n^2 + \alpha n + 6) - (6n^2 + \beta n + 8) =$$

$$=(2n^3 + 3n^2 + 10n + 6) - (6n^2 + 11n + 8) =$$

$$=2n^3 + (3n^2 - 6n^2) + (10n - 11n) + (6 - 8) =$$

$$=n^3 + (n^3 + 2n^2 - 6n^2) + (n^2 + 9n - 11n) + (n + 6 - 8) =$$

$$=n^3 + (12n^2 + 2n^2 - 6n^2) + (12n + 9n - 11n) + (12 + 6 - 8) =$$

$$=(n^3 + 6n^2 + 10n + 10)_{10} = \overline{(16\alpha\alpha_{12})}_{12}$$

Operaţia care s-a efectuat *împrumutînd* de la ordinul superior o unitate atunci cînd descăzutul întrecea pe scăzător la unitatea respectivă, de exemplu $6 - 8 \to n + 6 - 8 = 12 + 6 - 8 = 10$, conduc la algoritmul analog celui de la adunare, aplicat numai numeralelor de primul ordin, aşa cum procedăm şi în baza 10. De aceea, vom putea scrie:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 23\alpha6\ - \\ \underline{6\beta8} \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 23\alpha6\ - \\ \underline{6\beta8} \\ \alpha\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 23\alpha6\ - \\ \underline{6\beta8} \\ 6\alpha\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 23\alpha6\ - \\ \underline{6\beta8} \\ 16\alpha\alpha \end{array}$$

Cifra 1 pusă deasupra simbolurilor grafice ale descăzutului indică scăderea unei unităţi de ordinul respectiv pentru efectuarea operaţiei la ordinul precedent, cu o unitate mai mic. Marcarea se face numai mnemotehnic, după o oarecare experienţă.

A treia operaţie fundamentală care se poate extinde uşor la orice bază de numeraţie şi care este utilă în aplicaţii, este *înmulţirea* numerelor naturale. Vom da următorul exemplu orientativ, din care se va putea deduce algoritmul:

7) *Să se efectueze înmulţirea* $\overline{1\alpha43} \times \overline{\beta5}$ *în baza* 12.

R. Notînd, ca şi în cazurile precedente, $12 = n$, $\alpha = 10_{10}$, $\beta = 11_{10}$, vom traduce numerele în polinoame în n cu coeficienţi numerale de primul ordin (cifre) în baza 12. Vom scrie deci, succesiv:

$$(n^3 + \alpha n^2 + 4n + 3)(\beta n + 5) = [\beta n^4 + (5 + \alpha\beta)n^3 +$$

$$+ (4\beta + 5\alpha)n^2 + (3\beta + 20)n + 15]_{10} = (11n^4 + 115n^3 + 94n^2 +$$

$$+ 53n + 15)_{10} = (n^5 + 9n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n + 3)_{12} = 193263_{12}.$$

Să construim algoritmul cifric pe baza operațiilor efectuate asupra coeficienților în înmulțirea polinomială:

$$\begin{array}{r} 1\alpha 43\ \times \\ \beta 5 \\ \hline 9393 \\ 185\alpha 9 \\ \hline 193263 \end{array}$$

Vom detalia pentru a se reține înmulțirea și transferul cifrelor de la un rang la următorul.

Înmulțirea cu 5 se face cifră cu cifră, succesiv. Fiindcă $3 \times 5 = 15$, iar $15 = 12 + 3$, se reține 3 ca ultimă cifră a produsului, iar 1 se adaugă produsului următor de ordinul lui 12, adică $4 \times 5 + 1 = 21 = 12 + 9$. Se reține 9 ca a doua cifră de ordinul lui 12^2 și se păstrează o unitate de ordinul lui 12^3. Aceasta se va adăuga lui 5 și vom avea $5\alpha + 1 = 50 + 1 = 51 = 4 \times 12 + 3$. Se reține 3 la produs și se transferă 4 la ordinul lui 12^3, unde vom avea $1 \times 5 + 4 = 9$, care este ultima cifră de ordinul lui 12^3. Deci $(1\alpha 43 \times 5)_{12} = 9393_{12}$.

La fel se procedează și la înmulțirea cu $\beta = 11_{10}$, cu grija de a deplasa produsul cu un pas spre stînga fiindcă:

$$1\alpha 43 \times \beta n = (n^3 + \alpha n^2 + 4n + 3)\beta n = \beta n^4 + \alpha\beta n^3 + 4\beta n^2 + 3\beta n.$$

Scris în baza 12, acest produs va fi $185\alpha 9 \times 10 = 185\alpha 90$, fiindcă $12_{10} = 10_{12}$ și din aceste motive se deplasează la stînga cu un pas.

Această observație merită să fie reținută: *înmulțirea cu* 12_{10} *în baza* 12 *revine la adăugarea unui zero la sfîrșitul deînmulțitului.* Vom preciza aceste tehnici de calcul prin exemplul următor, în care presupunem toate numerele scrise în baza 12:

8) *Să se efectueze înmulțirile următoare*:

151 $\times$ *12*   *151* $\times$ *10*   *347* $\times$ *13*

1β*3* $\times$ *220*   *208* $\times$ *320*

S.M.P. Book 1, p. 13

R. Avem schemele:

$$\begin{array}{r} 151\ \times \\ 12 \\ \hline 2\alpha 2 \\ 151 \\ \hline 17\beta 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 151\ \times \\ 10 \\ \hline 000 \\ 151 \\ \hline 1510 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 347\ \times \\ 13 \\ \hline \alpha 19 \\ 347 \\ \hline 4289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\beta 3\ \times \\ 220 \\ \hline 000 \\ 3\alpha 6 \\ 3\alpha 6 \\ \hline 42460 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\beta 3\ \times \\ 220 \\ \hline 3\alpha 6 \\ 3\alpha 6 \\ \hline 42460 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 208\ \times \\ 302 \\ \hline 414 \\ 000 \\ 620 \\ \hline 62414 \end{array}$$

Analogia cu operațiile în baza 10 este evidentă cu condiția de a lua în considerație și înmulțirile cu zero pentru a nu se pierde pozițiile corecte ale produselor parțiale. Observăm că zero, ca ultimă cifră, se transferă la produs cu condiția de a scrie 220 deplasat la dreapta.

Înmulțirea cu 12 și puterile sale se face ca înmulțirea cu 10 și puterile acestuia în baza 10; deci:

$$N \times 12^p = \underbrace{\overline{N00\ldots0}}_{0 \text{ de } p \text{ ori}}$$

Exerciții și probleme

I.1. Scrieți numerele naturale omise în fiecare din situațiile următoare:

a) 23, 24, 25, ..., 29, 30;

b) 98, 99, ..., 104, 105, 106;

c) 23 455, 23 456, ..., 23 460;

R. Numerele omise sînt: a) 26, 27, 28; b) 100, 101, 102, 103; c) 23 457, 23 458, 23 459.

I.2[PP]. Aflați cel mai mic număr natural de cinci cifre care nu este mai mic decît: a) 32 156; b) 13 264; c) 34 421; d) 34 442.

R. a) Afirmația pentru numere naturale „care nu este mai mic decît" se mai poate traduce și astfel: „este mai mare decît sau egal cu". În cazul nostru avem numere de cinci cifre care îndeplinesc afirmația „nu este mai mic decît 32 156", foarte multe.

Exemplu: 32 159, 40 196, 99 999, 32 157, 32 156 etc.

Dar dintre acestea, cel mai mic este 32 156.

Observație. Dacă s-ar fi cerut, în plus, și condiția ca să fie diferit de 32156, atunci cel mai mic ar fi fost numărul 32157. Pentru celelalte cazuri avem:

b) 13 264; c) 34 421; d) 34 442.

I.3[PP]. Aflați cel mai mic număr natural cu cifre care nu se repetă în așa fel încît să aibă: a) o singură cifră; b) două cifre; c) trei cifre; d) patru cifre; e) cinci cifre.

R. a) 0; b) Este greșit 12. Numărul cerut este 10. c) Nu este 123 și nici 120. Este numărul 102; d) 1 023; e) 10 234.

I.4[M]. Aflați cel mai mic număr natural de cinci cifre și care îndeplinește următoarele două condiții: a) Nu este mai mic decît 34 442; b) Nu are cifre care să se repete.

R. Folosim cele învățate la problemele anterioare. Numărul natural cel mai mic, de cinci cifre și care nu este mai mic decît 34 442 este chiar 34 442 (vezi I.2 d), iar, în plus, conform condiției b), este 34 501.

I.5. Găsiți numerele naturale x care îndeplinesc condiția:

a) $x < 7$; b) $x < 1$; c) $x > 3$ și x are o singură cifră; d) $x \leqslant 7$; e) $x \leqslant 1$; f) $x \geqslant 3$ și x are o singură cifră; g) $x \geqslant 97$ și x are două cifre care nu se repetă; h) x are două cifre și $x \leqslant 15$; i) x are două cifre care se repetă și $x \leqslant 44$; j) x are trei cifre toate egale și $x \leqslant 223$.

R. Avem: a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; b) 0; c) 4, 5, 6, 7, 8, 9; d) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; e) 0, 1; f) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; g) 97, 98; h) 10, 11, 12, 13, 14, 15; i) 11; 22, 33, 44; j) 111, 222.

I.6. a) Adunați numărul 45 cu un alt număr natural în așa fel încît să obțineți numărul 45;

b) Adunați numărul 13 cu un alt număr natural în așa fel încît să obțineți consecutivul său;

c) Adunați numărul zero cu un număr natural în așa fel încît să obțineți tot numărul zero.

R. a) $45 + 0 = 45$; b) $13 + 1 = 14$; c) $0 + 0 = 0$.

I.7. Scrieți numărul 20 folosind adunarea de două numere naturale. Scrierea este unică?

R. Scrierea nu este unică. Exemplu:

$$20 = 0 + 20 = 1 + 19 = 2 + 18 = 3 + 17 = \ldots = 10 + 10,$$

I.8. Scrieți numărul 5 cu ajutorul a trei numere naturale diferite folosind operația de adunare.

R. $5 = 0 + 2 + 3 = 0 + 1 + 4$, etc.

I.9. Există un număr natural c astfel încît: a) $3 + c = 8$? b) $6 + c = 12$? c) $c + 20 = 30$? d) $c + 0 = 4$? e) $c + 0 = 0$? f) $c + 7 = 6$? g) $c + 3 = 2$? h) $428 + c = 428$?

R. a) Da, există. Acesta este $c = 8 - 3 = 5$ și este număr natural;

b) Da, $c = 6$; c) Da, $c = 10$; d) Da, $c = 4$; e) Da, $c = 0$; f) Nu există, căci $c = 6 - 7$ nu este număr natural; g) Nu, $c = 2 - 3$ nu este număr natural; h) Da, $c = 0$

I.10. a) Pentru care număr natural x avem $0 - x = x$?

b) Dacă a și b sînt numere naturale, în ce situații avem:

$$a - b = b - a?$$

R. a) Pentru numărul natural $x = 0$ avem: $0 - 0 = 0$.

b) Numai dacă $a = b$ avem $a - a = a - a$ sau $b - b = b - b$. Exemple: $5 - 5 = 5 - 5$; $234 - 234 = 234 - 234$. Dați alte exemple.

I.11^{PP}. Găsiți numărul natural x astfel încît: a) $x - 4 = 2$; b) $x - 4 = 5$; c) $x - 29 = 35$; d) $x - 412 = 215$; e) $1 + x = 3$; f) $5 + x = 7$; g) $5 + x = 2$; h) $17 + x = 3$; i) $7 - x = 2$; j) $17 - x = 10$; k) $200 - x = 121$; l) $2 - x = 3$; m) $12 - x = 3$; n) $301 - x = 429$.

R. a) $x = 2 + 4 = 6$; b) $x = 9$; c) $x = 64$; d) $x = 627$; e) $x = 3 - 1 = 2$; f) $x = 2$; g) $x = 2 - 5$, x nu este număr natural, căci descăzutul 2 este mai mic decît scăzătorul 5; h) x nu este număr natural; i) $x = 7 - 2 = 5$; j) $x = 7$; k) $x = 79$; l) $x = 2 - 3$, x nu este număr natural căci descăzutul este mai mic decît scăzătorul; m) $x = 12 - 3 = 9$; n) x nu este număr natural.

I.12. Înlocuiți steluța cu cifră:

a)
$$\begin{array}{r} 8* - \\ 24 \\ \hline 62 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 85 + \\ 2* \\ \hline 107 \end{array}$$
c)
$$\begin{array}{r} 97 - \\ 4* \\ \hline 52 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 42 - \\ 1* \\ \hline 23 \end{array}$$
e)
$$\begin{array}{r} 42 - \\ 1* \\ \hline 27 \end{array}$$
f)
$$\begin{array}{r} 83 - \\ 2* \\ \hline 55 \end{array}$$

R. a) Să notăm steluța x. Exercițiul devine:

$$\begin{array}{r} 8x - \\ 24 \\ \hline 62 \end{array}$$

Conform regulii de la operația de scădere avem: $x - 4 = 2$. Acest exercițiu este I.11^{PP} a), deci $x = 2 + 4 = 6$. Așadar am obținut:

$$\begin{array}{r} 86 - \\ 24 \\ \hline 62 \end{array}$$

b) Avem:

$$\begin{array}{r} 85 + \\ 2x \\ \hline 107 \end{array}$$

Deci $5 + x = 7$, adică exercițiul I.11^{PP} f) și deci $x = 2$; așadar am obținut:

$$\begin{array}{r} 85 + \\ 22 \\ \hline 107 \end{array}$$

c) Avem exercițiul I.11^{PP} i), adică $7 - x = 2$, deci $x = 5$.
d) Folosind litera x exercițiul devine:

$$\begin{array}{r} 42 - \\ 1x \\ \hline 23 \end{array}$$

Deci $2 - x = 3$ adică exercițiul I.11^{PP}. l) pentru care x nu este număr natural. Dar regula de la scădere permite „împrumutul" la cifra următoare deci vom avea $12 - x = 3$ adică exercițiul I.11^{PP}. m) și deci $x = 9$.

e) Avem $2 - x = 7$ adică $x = 2 - 7$ care nu este număr natural. Conform regulii, ne „împrumutăm" și obținem $12 - x = 7$, adică $x = 5$

13 — c. 850

şi exerciţiul devine:

$$\begin{array}{r} 42 - \\ 15 \\ \hline 27 \end{array} \qquad \text{f)} \quad \begin{array}{r} 83 - \\ 28 \\ \hline 55 \end{array}$$

I.13^{M}. Să se înlocuiască steluţele cu cifre:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{r} 1{*}6 + \\ 1{*} \\ \hline {*}02 \end{array} \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{r} 3{*}45 + \\ {*}73{*} \\ \hline 92{*}4 \end{array}$$

R. a) Desigur, mintal, rezultatul este următorul:

$$\begin{array}{r} 186 + \\ 16 \\ \hline 202 \end{array}$$

Dar într-o lucrare scrisă trebuie redactată modalitatea găsirii rezultatului.

Pentru comoditatea scrierii să notăm exerciţiul astfel:

$$\begin{array}{r} \overline{1a6} + \\ \overline{1b} \\ \hline \overline{c02} \end{array}$$

Se observă că steluţele care ţin locul unor cifre diferite, în general, au fost înlocuite cu litere. După regula de la adunarea de numere naturale ar trebui să avem:

$$6 + b = 2$$

Dar din cunoştinţele despre numere naturale rezultă că această afirmaţie nu este adevărată. Trebuie să avem deci:

$$6 + b = 12.$$

Rezultă că $b = 6$ şi este unic.

Acum trecem la cifrele de la zeci, unde „am ţinut minte" cifra de transport 1 de la numărul 12.

Ar trebui să avem $a + 1 + 1 = 0$ adică $a + 2 = 0$.

De asemenea, afirmaţia nu este adevărată, adică este falsă. Trebuie să avem $a + 2 = 10$. Rezultă că $a = 8$ şi este unic.

Trecem la cifrele de la sute, unde „am ţinut minte" cifra de transport 1 de la 10. Ar trebui să avem $1 + 1 = c$.

Este posibil şi obţinem că $c = 2$ şi din nou este unic. Aşadar, problema are un singur rezultat. Se mai spune că problema are o singură soluţie.

b) Să notăm, tot aşa, steluţele cu litere:

$$\begin{array}{r} \overline{3a45} + \\ \overline{b73c} \\ \hline \overline{92d4} \end{array}$$

Deci $5 + c = 14$ de unde $c = 9$ şi este unic. Apoi $4 + 3 + 1 = d$, deci $d = 8$ şi este unic. Din nou, $a + 7 = 12$ de unde $a = 5$, unic.

În sfîrşit, $3 + b + 1 = 9$ sau $4 + b = 9$, de unde $b = 5$.

Aşadar, avem un singur rezultat (o singură soluţie):

$$\begin{array}{r} 3545 + \\ 5739 \\ \hline 9284 \end{array}$$

Se observă că $a = b = 5$.

I.14^{M}. Înlocuiţi steluţele cu cifre:

a) $\begin{array}{r} 2{*}0 - \\ {*}99 \\ \hline 41 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 7054 - \\ {*}{*}{*}{*} \\ \hline 6438 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 7{*}9 - \\ 254 \\ \hline {*}1{*} \end{array}$

R. a) Folosim litere:

$$\begin{array}{r} \overline{2x0} - \\ \overline{y99} \\ \hline 41 \end{array}$$

Mai comod pentru rezolvare este să aplicăm „proba scăderii". Obţinem următorul exerciţiu:

$$\begin{array}{r} \overline{y99} + \\ 41 \\ \hline \overline{2x0} \end{array}$$

Deci $9 + 1 = 10$. Avem pe 1 cifră de transport pentru zeci.

Apoi $9 + 4 + 1 = 14$ deci $x = 4$ unic şi avem pe 1 cifră de transport pentru sute. Deci $y + 1 = 2$ de unde $y = 2 - 1 = 1$, unic.

Aşadar:

$$\begin{array}{r} 240 - \\ 199 \\ \hline 41 \end{array}$$

singura soluţie.

b) Avem:

$$\begin{array}{r} 7054 - \\ \overline{xyzu} \\ \hline 6438 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 6438 + \\ \overline{xytu} \\ \hline 7054 \end{array}$$

Obținem, pe rînd, pentru unități, $8 + u = 4$, $u = 4 - 8$, u nu este număr natural. Trebuie să avem $8 + u = 14$ adică $u = 14 - 8 = 6$ (unic) cu 1 cifră de transport la zeci.

Pentru zeci:

$$3 + 1 + t = 5,\ t + 4 = 5,\ t = 5 - 4 = 1$$

(unic).

Pentru sute:

$$4 + y = 0,\ y = 0 - 4,$$

y nu este număr natural. Trebuie să avem $4 + y = 10$ adică $y = 10 - 4 = 6$ (unic), cu 1 cifra de transport la mii.

Pentru mii:

$$6 + x + 1 = 7,\ 7 + x = 7,\ x = 7 - 7 = 0$$

(unic). Deci:

$$\begin{array}{r} 7054\ - \\ 0616 \\ \hline 6438 \end{array}$$

singura soluție.

Cum un număr natural nu se scrie cu cifra din față zero, avem:

$$\begin{array}{r} 7054\ - \\ 616 \\ \hline 6438 \end{array}$$

c) $\begin{array}{r} 769\ - \\ 254 \\ \hline 515 \end{array}$

I.15PP. a) Găsiți numerele naturale $x \leqslant 4$ astfel încît $0 + x = x$;
b) Găsiți numerele naturale $x \leqslant 3$ astfel încît $x - 0 = x$;
c) Găsiți numerele naturale $x \geqslant 21$ și $x < 24$ astfel încît $x - x = 0$;
d) Găsiți numerele naturale x astfel încît $x + x = x$;
e) Găsiți numerele naturale x astfel încît $x - x = x$.

R. a) x este orice număr natural mai mic sau egal cu 4: 0, 1, 2, 3, 4.
b) $x = x + 0$. Vezi punctul a).
c) $x = x + 0$ Vezi punctul a). Deci x este unul din numerele 21, 22, 23.

d) $x = x - x = 0$, e) $x - x = 0$ deci $x = 0$.

I.16PO. a) Găsiți numerele naturale x și y astfel încît $x \leqslant 4$ și $y \leqslant 9$ și:

$$\begin{array}{r} 24x- \\ yx \\ \hline 210 \end{array}$$

b) Găsiţi numerele naturale x şi y astfel încît $x \leqslant 2$ şi $y < 8$ şi:

$$\begin{array}{r} \overline{6yx4}\ - \\ \underline{\overline{2x3}} \\ 6501 \end{array}$$

R. a) Transformăm, folosind ,,proba scăderii'', în următorul exerciţiu :

$$\begin{array}{r} 210\ + \\ \underline{\overline{yx}} \\ \overline{24x} \end{array}$$

Pentru unităţi avem :

$$0 + x = x, \quad x \leqslant 4.$$

Nu avem soluţie unică (vezi I.15^{PP}. a)) În cazul nostru, x este unul din numerele naturale 0, 1, 2, 3, 4.

Deci avem 5 soluţii. Nu avem cifră de transport.

Pentru zeci obţinem $1 + y = 4$, $y = 4 - 1$, $y = 3$ unic. Este clar că $3 \leqslant 9$. Deci avem 5 situaţii :

$$\begin{array}{r} 240\ - \\ \underline{30} \\ 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 241\ - \\ \underline{31} \\ 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 242\ - \\ \underline{32} \\ 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 243\ - \\ \underline{33} \\ 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 244\ - \\ \underline{34} \\ 210 \end{array}$$

b) x este unul din numerele 0, 1, 2 iar $y = 7$.

I.17^{PO}. Găsiţi numerele naturale x şi y astfel încît :

a) $x + y = 3$;

b) $x - y = 3$, $x \leqslant 10$ şi $y > 5$;

c) $x + y = 2$;

d) $x - y = 4$, $x \leqslant 13$ şi $y > 6$.

R. a) Avem $x = 3 - y$. Trebuie ca $y \leqslant 3$.
Dacă $y = 0$, avem $x = 3 - 0 = 3$.
Dacă $y = 1$, avem $x = 3 - 1 = 2$.
Dacă $y = 2$, avem $x = 3 - 2 = 1$.
Dacă $y = 3$, avem $x = 3 - 3 = 0$.

Aşadar, sînt patru situaţii, deci problema nu are soluţie unică.

b) Avem $x = y + 3$. Trebuie ca $y > 5$ şi $x \leqslant 10$.
Dacă $y = 6$, avem $x = 6 + 3 = 9 \leqslant 10$.
Dacă $y = 7$, avem $x = 7 + 3 = 10 \leqslant 10$.

Aşadar sînt două situaţii căci dacă $y = 8$ am avea $x = 8 + 3 = 11$.

c) Avem soluţiile $y = 0$ şi $x = 2$, $y = 1$ şi $x = 1$, $y = 2$ şi $x = 0$;

d) Avem soluţiile $y = 7$ şi $x = 11$, $y = 8$ şi $x = 12$, $y = 9$ şi $x = 13$.

I.18. La următoarele exerciții folosiți paranteze pentru a indica ordinea calculului:

a) $2+3+5$; b) $5+6-3$; c) $51-21-14$; d) $14-5+9$; e) $18-2-6-5$; f) $4+3+2-7$.

R. a) Putem scrie $(2+3)+5$ sau $2+(3+5)$ sau $(2+5)+3$ sau $(5+2)+3$ etc. b) Putem scrie $(5+6)-3$ sau $5+(6-3)$; c) Scriem $(51-21)-14$. Este greșit să scriem $51-(21-14)$; d) Scriem $(14-5)+9$. Este greșit să scriem $14-(5+9)$. e) Scriem $[(18-2)-6]-5$; f) Scriem $[(4+3)+2]-7$ sau $[4+(3+2)]-7$.

I.19. Indicați la care din exercițiile următoare, și în ce mod putem elimina parantezele pentru a fi calculul corect:

a) $(2+3)+7$; b) $7-(3+2)$; c) $(20+3)-9$; d) $(12+3)+(7-2)$; e) $(49-13)-(6-2)$; f) $(2+3+5)+(8-8)-9$.

R. a) Putem scrie $2+3+7$; b) Nu putem elimina parantezele. c) Scriem $20+3-9$; d) Scriem $12+3+7-2$; e) Scriem $49-13-(6-2)$; f) Scriem $2+3+5+8-8-9$.

I.20. Calculați:

a) $2+6+8+4$; b) $10+20+30+30+40+50$;
c) $23-13+10$; d) $32+45-0+77$;
e) $25-(43-40)$; f) $409+1-(2+400)$;

R. a) Rezultatul este 20. Se pot folosi comutativitatea și asociatiactivtea: $(2+8)+(6+4)$;

b) Avem $(10+50)+(20+40)+(30+30)=60+60+60=180$;

În continuare, găsim rezultatele:

c) 20; d) $77+77=154$; e) $25-3=22$; f) $410-402=8$.

I.21. Calculați:

a) $45+90+17+35+10+13$;
b) $140-(260-240+180-180-20)$;
c) $(145+120+55-40-80)-(325+28-100-225+12)$;
d) $299-(25+30+75)-(111-12)$.

R. Avem rezultatele: a) $(45+35)+(90+10)+(17+13)=210$; b) $140-(200-180-20)=140-0=140$; c) $(320-40-80)-(353-100-225+12)=200-40=160$; d) $299-130-99=70$.

I.22. Scrieți numărul 100 folosind o singură cifră de cinci ori și numai operația de scădere.

R. Putem scrie: $111-11=100$.

I.23. Scrieți numărul 20 folosind adunarea de numere naturale și 5 dintre cifrele 1; 3; 5; 7, nu neapărat toate.

R. Scriem $11+1+1+7=20$ sau $11+1+3+5=20$.

I.24. Spuneți cîte operații de adunare sînt în următoarele exerciții:

a) $2+3+4$; b) $5+1+4+6$ c) $6+6+6+6$; d) $3+3+3+3+3$; e) $4+4+4+4+4+4+4+4$; f) $5+5+\ldots+5$, unde avem 10 numere egale cu 5.

Eventual, dacă este comod, indicați cu paranteze.

R. a) Avem două operații: $(2+3)+4=5+4=9$; b) trei: $[(5+1)+4)]+6$ sau $(5+1)+(4+6)=6+10=16$; c) trei; d) patru; e) șase; f) nouă.

I.25. Se știe că o înmulțire este o „adunare repetată". În următoarele exerciții spuneți de cîte ori apare primul număr natural ca termen în suma respectivă și cîte operații de adunare avem:

a) $4 \cdot 3$; b) $6 \cdot 2$; c) $3 \cdot 8$; d) $4 \cdot 4$; e) $(2+5) \cdot 3$; f) $(6+1) \cdot 2$; g) $(3 \cdot 2) \cdot 5$.

R. De atîtea ori cît arată al doilea număr natural (înmulțitorul).

a) de 3 ori (două adunări: $4+4+4=(4+4)+4$); b) de 2 ori (o adunare); c) de 8 ori (7 adunări); d) de 4 ori (3 adunări); e) de 3 ori (două adunări); f) de două ori (o adunare); g) de 5 ori (4 adunări).

I.26. Calculați cît mai comod:

a) $717 \cdot 5 \cdot 2$; b) $9\,192 \cdot 2 \cdot 5$; c) $2 \cdot 5 \cdot 4\,109$; d) $5 \cdot 9\,145 \cdot 2$; e) $2 \cdot 7\,999 \cdot 5$; f) $5 \cdot 9\,009 \cdot 2$; g) $5 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 2$; h) $2 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 5$; i) $2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 5$; j) $5 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 8$; k) $2 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 7$; l) $4 \cdot 17 \cdot 5$; m) $5 \cdot 233 \cdot 4$; n) $8 \cdot 32 \cdot 7 \cdot 5$; o) $4 \cdot 15 \cdot 81 \cdot 5$.

R. a) Înmulțirea este operație asociativă:

$$717 \cdot 5 \cdot 2 = 717 \cdot (5 \cdot 2) = 717 \cdot 10 = 7\,170;$$

b) $9\,192 \cdot 10 = 91\,920$; c) $41\,090$; d) Înmulțirea este operație comutativă:

$$5 \cdot 9\,145 \cdot 2 = 9\,145 \cdot 5 \cdot 2,$$

și este operație asociativă:

$$9\,145 \cdot (5 \cdot 2) = 91\,450.$$

În continuare:

e) $79\,990$; f) $90\,090$; g) $5 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 20 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 20 = (5 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 20) = 10 \cdot 60 = 600$; h) 570; i) $1\,200$; j) $1\,360$; k) $1\,190$; l) $4 \cdot 17 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 17 = 20 \cdot 17 = 340$; m) $4\,660$; n) $8\,960$; o) $24\,300$.

I.27. Găsiți numărul natural x astfel încît:

a) $x \cdot 0 = 0$ și $x < 4$;

b) $x \cdot 0 = 0$ și $x \leqslant 3$;

c) $x \cdot 1 = x$ și $x \geqslant 20$ și $x < 23$;

d) $1 \cdot x = x$ și $x \geqslant 4$ și $x < 6$;

e) $1 \cdot x = x$ și $x \leqslant 4$;

f) $x \cdot 0 = 0$ și $x > 7$ și $x \leqslant 12$;

g) $0 \cdot x = 0$ și $x > 10$ și $x \leqslant 12$;

h) $x \cdot 0 = x$.

R. a) Înmulțind orice număr natural x cu numărul zero obținem tot numărul zero. În cazul nostru, x este unul din numerele naturale: 0, 1, 2, 3; b) 0, 1, 2, 3; c) Deoarece 1 este elementul neutru al operației de înmulțire cu numere naturale înseamnă că în cazul nostru x este unul din numerele 20, 21, 22; d) 4 și 5; e) 0, 1, 2, 3, 4; f) 8, 9, 10, 11, 12; g) 11 și 12; h) numai numărul 0.

I.28. La următoarele exerciţii folosiţi parantezele pentru a indica ordinea calculelor:

a) $3 \cdot 5 \cdot 2$; b) $2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 6$; c) $5 \cdot 9 + 5 \cdot 7$; d) $6 \cdot 3 + 6 \cdot 8$; e) $9 \cdot 3 + 7 \cdot 3$; f) $8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 6$; g) $9 \cdot 3 + 2 \cdot 7$; h) $4 \cdot 8 + 3 \cdot 11$; i) $9 \cdot 8 + 2$; j) $3 + 2 \cdot 5$; k) $8 - 2 \cdot 3$; l) $14 - 2 \cdot 3 + 5$; m) $26 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5$; n) $1 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 8$.

R. Avem: a) $(3 \cdot 5) \cdot 2$ sau $3 \cdot (5 \cdot 2)$ sau $(3 \cdot 2) \cdot 5$ etc; b) $(2 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 6)$ sau $[(2 \cdot 3) \cdot 9] \cdot 6$ etc; c) $(5 \cdot 9) + (5 \cdot 7)$; d) $(6 \cdot 3) + (6 \cdot 8)$; e) $(9 \cdot 3) + (7 \cdot 3)$; f) $[(8 \cdot 3) + (8 \cdot 5)] + (8 \cdot 6)$ etc.; g) $(9 \cdot 3) + (2 \cdot 7)$; h) $(4 \cdot 8) + (3 \cdot 11)$; i) $(9 \cdot 8) + 2$; j) $3 + (2 \cdot 5)$; k) $8 - (2 \cdot 3)$; l) $[14 - (2 \cdot 3)] + 5$; m) $[26 - (4 \cdot 3)] - (2 \cdot 5)$; n) $\{[1 + (4 \cdot 3)] - (2 \cdot 6) + 8\}$.

I.29. Scrieţi fără paranteze exerciţiile următoare în aşa fel încît rezultatele să nu se modifice:

a) $(2 \cdot 3) \cdot 7$; b) $4 \cdot (5 \cdot 6)$; c) $2 \cdot (3 \cdot 8) \cdot 7$; d) $40 + (3 \cdot 8)$; e) $(4 \cdot 5) + 9$; f) $(2 \cdot 9) - 13$; g) $7 - (2 \cdot 3)$; h) $(14 \cdot 3) + (7 \cdot 4)$; i) $(2 \cdot 12) - (3 \cdot 4)$; j) $[(2 \cdot 3) + 8] + (9 \cdot 3)$; k) $2 + [3 + (4 \cdot 5)] - (6 \cdot 2)$; l) $(2 + 3) \cdot 5$; m) $(6 - 2) \cdot 4$; n) $6 - (3 + 2)$; p) $20 + (5 + 6) \cdot 7$.

R. a) $2 \cdot 3 \cdot 7$; b) $4 \cdot 5 \cdot 6$; c) $2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7$; d) $40 + 3 \cdot 8$; e) $4 \cdot 5 + 9$; f) $2 \cdot 9 - 13$; g) $7 - 2 \cdot 3$; h) $14 \cdot 3 + 7 \cdot 4$; i) $2 \cdot 12 - 3 \cdot 4$; j) $2 \cdot 3 + 8 + 9 \cdot 3$; k) $2 + 3 + 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2$; l) $(2 + 3) \cdot 5 = (2 \cdot 5) + (3 \cdot 5) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; m) $6 \cdot 4 - 2 \cdot 4$; n) nu se poate; p) $20 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7$.

I.30. Calculaţi, folosind parantezele pentru a indica ordinea operaţiilor:

a) $2 + 5 \cdot 3$; b) $5 + 2 \cdot 3$; c) $15 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5$; d) $2 \cdot 7 + 3$; e) $4 \cdot 5 + 3 \cdot 9$; f) $10 - 2 \cdot 3$; g) $42 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6$; h) $15 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5$; i) $17 - 2 \cdot 6 + 5 + 4 \cdot 9$; j) $13 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

R. a) $2 + 5 \cdot 3 = 2 + (5 \cdot 3) = 2 + 15 = 17$; b) 11; c) $15 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 15 + (4 \cdot 3) + (2 \cdot 5) = 15 + 12 + 10 = (15 + 12) + 10 = 27 + 10 = 37$; d) $2 \cdot 7 + 3 = (2 \cdot 7) + 3 = 14 + 3 = 17$; e) 47; f) $10 - 2 \cdot 3 = 10 - (2 \cdot 3) = 10 - 6 = 4$; g) $42 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 42 - (3 \cdot 5) + (2 \cdot 6) = 42 - 15 + 12 = (42 - 15) + 12 = 27 + 12 = 39$; h) 17; i) 46; j) 41.

I.31. Calculaţi: a) $4 + 4 \cdot 3$; b) $2 + 7 \cdot 4$; c) $15 - 2 \cdot 6$; d) $3 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 2$; e) $3 + 5 \cdot 8 - 2 \cdot 5$; f) $5 \cdot 2 + 7 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5$; g) $6 + 5 \cdot 3 + 4 + 8 \cdot 9 - 10 \cdot 3$; h) $2 + 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 - 5 + 5 \cdot 6$.

R. a) Nu se calculează aşa: $4 + 4 = 8$; $8 \cdot 3 = 24$. Este rezultat greşit. Dacă s-a uitat ordinea operaţiilor, se vor pune înmulţirile în paranteză şi apoi se va calcula întîi ce există în paranteză. Deci $4 + 4 \cdot 3 = 4 + (4 \cdot 3) = 4 + 12 = 16$. b) Asemănător: $2 + 7 \cdot 4 = 2 + (7 \cdot 4) = 2 + 28 = 30$; c) $15 - 2 \cdot 6 = 15 - (2 \cdot 6) = 15 - 12 = 3$; d) $3 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 3 + (4 \cdot 5) + (7 \cdot 2) = 3 + 20 + 14 = 23 + 14 = 37$; e) $3 + 5 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 3 + 40 - 10 = 43 - 10 = 33$; f) Pentru comoditate se scrie exercițiul, fiecare rînd sub fiecare rînd, astfel:

$$5 \cdot 2 + 7 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 =$$
$$= 10 + 7 + 12 - 10 =$$
$$= 17 + 12 - 10 =$$
$$= 29 - 10 =$$
$$= 19.$$

g) $6 + 5 \cdot 3 + 4 + 8 \cdot 9 - 10 \cdot 3 =$
$= 6 + 15 + 4 + 72 - 30 =$
$= 21 + 4 + 72 - 30 =$
$= 25 + 72 - 30 =$
$= 97 - 30 =$
$= 67.$

h) 46.

I.32. Calculați în două moduri:
a) $2 \cdot (5 + 4)$; b) $3 \cdot (2 + 5)$; c) $(10 + 8) \cdot 4$; d) $15 \cdot (4 + 8)$; e) $(30 - 10) \cdot 8$; f) $(25 - 15) \cdot 4$; g) $6 \cdot (30 - 20 + 10)$; h) $(25 - 5 + 4) \cdot 3$; i) $(8 + 6 + 5 - 11) \cdot 3$; j) $121 \cdot (5 - 2 + 3)$.

R. a). I. Paranteza are prioritate: $2 \cdot (5 + 4) = 2 \cdot 9 = 18$.

II. Folosim faptul că înmulțirea este distributivă față de adunarea sau scădere:

$2 \cdot (5 + 4) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18$.

b) 21.; c) 72; d) 180; e) 160; f) 40; g). $6 \cdot (30 - 20 + 10) = 6 \cdot (10 + 10) = 6 \cdot 20 = 120$ sau $6 \cdot (30 - 20 + 10) = 6 \cdot 30 - 6 \cdot 20 + 6 \cdot 10 = 180 - 120 + 60 = 120$ · h) 72; i) 24; j) 726.

I.33. Calculați mai comod sau chiar în minte: a) $13 \cdot (3 + 7)$; b) $131 \cdot (2 + 8)$; c) $423 \cdot (12 + 88)$; d) $(1\,235 + 765) \cdot 13$; e) $25 \cdot (4 + 8)$; f) $4 \cdot (25 + 50)$; g) $8 \cdot (25 + 50)$; h) $(10 + 4) \cdot 25$; i) $(20 - 4) \cdot 25$; j) $143 \cdot (11 + 7 + 2)$; k) $(83 - 33 + 25) \cdot 4$.

R. a) Este mai comod să nu folosim distributivitatea, căci $13 \cdot (3 + 7) = 13 \cdot 10 = 130$; b) $131 \cdot (2 + 8) = 131 \cdot 10 = 1\,310$; c) 4 2300; d) 26 000; e) Folosim faptul că înmulțirea este distributivă față de adunare sau scădere:

$$25 \cdot (4 + 8) = 25 \cdot 4 + 25 \cdot 8 = 100 + 200 = 300;$$

Avem, în continuare:

f) $4 \cdot (25 + 50) = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 50 = 100 + 200 = 300$; g) 600; h) 350; i) 400; j) 2 860; k) 300.

I.34. Calculați:

a) $(32 - 23)(105 - 95)(125 - 25)$;

b) $(38 - 26) \cdot 4 + (36 - 12) : 2$;

c) $21 \cdot 5 + (20 \cdot 20 - 30 \cdot 10)$.

R. a) $9 \cdot 10 \cdot 100 = 9\,000$; b) $12 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 12 \cdot 4 + 12 \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$; c) $105 + 100 = 205$.

I.35[PP]. Calculaţi suma primelor şapte numere naturale diferite de zero.

R. Avem:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = (1 + 7) + (2+6)+(3 + 5) + + 4 = 28.$$

I.36. Scrieţi numărul 100 folosind: toate cifrele diferite de zero (o singură dată fiecare), adunarea şi înmulţirea.

R. Dacă observăm că în problema anterioară suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ este 28 am folosit toate cifrele diferite de zero cu excepţia lui 8 şi 9, că $8 \cdot 9 = 72$ şi că $28 + 72 = 100$, atunci avem:

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9.$$

I.37. Găsiţi numărul natural x, astfel încît:

a) $1 : x = x$; b) $x : 1 = 1$; c) $x : 1 = 0$; d) $x : x = x$; e) $x : x = 1$ şi $x \geqslant 2$ şi $x < 5$; f) $0 : x = 0$ şi $x \leqslant 3$; g) $0 : x = 0$ şi $x > 12$ şi $x \leqslant 15$; h) $x : 1 = x$ şi $x \geqslant 20$ şi $x \leqslant 23$; i) $x : 1 = x$ şi $x \geqslant 18$ şi $x \leqslant 19$.

R. a) $x = 1$; b) „Proba" împărţirii arată că $x = 1 \cdot 1 = 1$; c) $x = 0 \cdot 1 = 0$; d) $x = 1$; e) $x = 1 \cdot x = x$.

Această afirmaţie este adevărată pentru orice număr natural x. În cazul nostru, x este unul din următoarele numere: 2, 3, 4.

f) 1, 2, 3; g) 12, 13, 14, 15; h) 20, 21, 22, 23; i) 18, 19.

I.38. În următoarele egalităţi găsiţi numerele naturale cu rol de împărţitor, la „împărţirea cu rest":

a) $8 = 1 \cdot 5 + 3$; b) $10 = 2 \cdot 4 + 2$; c) $18 = 3 \cdot 5 + 3$; d) $2 \cdot 10 + 2 = 22$; e) $13 = 3 \cdot 4 + 1$; f) $30 = 4 \cdot 7 + 2$, g) $10 \cdot 3 + 1 = 31$; h) $20 \cdot 5 + 0 = 100$; i) $3 \cdot 4 + 4 = 16$.

R. a) Se ştie că dacă d este număr natural şi i număr natural diferit de zero, există numărul natural c şi numărul natural r astfel încît:

$$d = i \cdot c + r$$

şi $r < i$.

Deoarece restul, r, trebuie să fie mai mic decît împărţitorul, i, în egalitatea:

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

restul este 3, împărţitorul nu poate fi 1 ci numărul 5; b) Împărţitorul este 4; c) Împărţitorul este 5; d) Împărţitorul este 10; e) Restul este 1, iar împărţitorul poate fi sau 3 sau 4; f) Sau 4 sau 7; g) Sau 10 sau 3; h) Sau 20 sau 5; i) Nici unul.

I.39. Scrieţi ca un produs de două numere naturale următoarele adunări şi scăderi:

a) $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$; b) $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$; c) $10 \cdot 7 + 10 \cdot 5$ d) $23 \cdot 5 + 13 \cdot 5$; e) $17 \cdot 8 + 8 \cdot 13$; f) $36 \cdot 15 - 36 \cdot 9$; g) $2 \cdot 15 + 3 \cdot 15 -$

$-15 \cdot 4$; h) $2 \cdot 17 - 2 \cdot 1$; i) $3 \cdot 15 + 1 \cdot 15$; j) $43 \cdot 5 + 43$; k) $27 \cdot 17 + 27$; l) $13 \cdot 17 + 43 \cdot 17 - 17$; m) $41 \cdot 12 + 12 \cdot 2 - 12 + 12 \cdot 3$; n) $5 \cdot 7 + 40$; o) $28 \cdot 3 - 6 + 28 \cdot 9$; p) $12 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7$.

R. a) Se constată că numărul 4 este factor comun deci putem scrie:

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 5;$$

Avem, în continuare:

b) $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 7$; c) $10 \cdot (7 + 5) = 10 \cdot 12$; d) $5 \cdot 36$; e) $8 \cdot 30$; f) $36 \cdot (15 - 9) = 36 \cdot 6$; g) $15 \cdot (2 + 3 - 4) = 15 \cdot 1$; h) $2 \cdot 16$; i) $15 \cdot 4$; j) Se observă că putem să mai scriem $43 \cdot 5 + 43 = 43 \cdot 5 + 43 \cdot 1 = 43 \cdot 6$; k) $27 \cdot 17 + 27 \cdot 1 = 27 \cdot 18$; l) $17 \cdot (13 + 43 - 1) = 17 \cdot 55$; m) $12 \cdot 45$; n) $5 \cdot (7 + 8) = 5 \cdot 15$; o) $3 \cdot (28 - 2 + 28 \cdot 3)$; p) $6 \cdot (2 + 5 + 7)$.

I.40. Calculați mai comod:

a) $425 \cdot 8 + 425 \cdot 2$; b) $1\,509 \cdot 2 + 1509 \cdot 8$; c) $31\,296 \cdot 18 + 31\,296 \cdot 2$; d) $17\,231 \cdot 6 + 17\,231 \cdot 2 + 17\,231 \cdot 2$; e) $25\,348 \cdot 3 + 25\,348 \cdot 5 + 25\,348 \cdot 2$; f) $4\,256 \cdot 9 + 4\,256 \cdot 1$; g) $6\,293 \cdot 9 + 6\,293$; h) $3\,287 \cdot 9 + 3\,287$; i) $3\,481 \cdot 9 + 3\,481$; j) $249 + 249 \cdot 9$; k) $8\,932 \cdot 7 + 8\,932 \cdot 2 + 8\,932$; l) $456 \cdot 99 + 456$; m) $3\,487 \cdot 99 + 3\,487$; n) $1\,249 \cdot 99 + 1\,249$; o) $628 \cdot 12 - 628 \cdot 2$; p) $1\,329 \cdot 101 - 1\,329$; r) $9134 \cdot 1\,015 - 9134 \cdot 12 - 9134 \cdot 2 - 9134$.

R. a) Constatăm că numărul 425 este factor comun în fiecare din cei doi termeni. Scriem, succesiv:

$$425 \cdot 8 + 425 \cdot 2 = 425 \cdot (8 + 2) = 425 \cdot 10 = 4\,250;$$

b) Asemănător, $1\,509 \cdot 2 + 1\,509 \cdot 8 = 1\,509 \cdot (2 + 8) = 1\,509 \cdot 10 = 15\,090$; c) $31\,296 \cdot 18 + 31\,296 \cdot 2 = 31\,296 \cdot (18 + 2) = 31\,296 \cdot 20 = 625\,920$; d) $172\,310$; e) $253\,480$; f) $425\,60$; g) mai putem scrie: $6\,293 \cdot 9 + 6\,293 = 6\,293 \cdot 9 + 6\,293 \cdot 1 = 6\,293 \cdot (9 + 1) = 62\,930$; h) $3\,287 \cdot 9 + 3\,287 = 3\,287 \cdot (9 + 1) = 32\,870$; i) $34\,810$; j) $2\,490$; k) $89\,320$; l) $456 \cdot (99 + 1) = 45\,600$; m) $348\,700$; n) $124\,900$; o) $628 \cdot 12 - 628 \cdot 2 = 628 \cdot (12 - 2) = 6\,280$; p) $132\,900$; r) $9\,134\,000$.

I.41. Calculați:

$$2\,543 \cdot 3\,143 + 3\,143 \cdot 348 - 2\,891 \cdot 3\,143.$$

R. Avem un factor comun și obținem numărul 0, ca rezultat.

I.42. Calculați:

a) $4 + 10 : 2$; b) $10 + 10 : 2$; c) $24 + 24 : 4$; d) $20 - 10 : 2$; e) $30 - 30 : 3$; f) $42 - 42 : 6$; g) $24 - 24 : 4$; h) $2 - 6 : 3$; i) $300 - 300 : 300$; j) $2 + 2 \cdot 2 + 2 : 2$; k) $10 - 20 : 10 + 20 \cdot 10$; l) $180 + 180 : 18 - 180 : 10 + 180 : 90$; m) $150 + 150 : 15 - 150 : 10 + 150 : 50$;

R. Avem: a) $4 + 10 : 2 = 4 + (10 : 2) = 4 + 5 = 9$; b) $10 + 10 : 2 = 10 + 5 = 15$; c) 30; d) $20 - 10 : 2 = 20 - 5 = 15$; e) 20; f) 35; g) 18;

h) $2 - 6 : 3 = 2 - 2 = 0$; i) 299; j) 7; k) 208; l) $180 + 180 : 18 - 180 : 10 + 180 : 90 = 180 + 10 - 18 + 2 = 190 - 18 + 2 = 172 + 2 = 174$; m) 148.

I.43. Calculați:

a) $2 + 4 \cdot (2 + 4 \cdot 2)$; b) $2 + 4 : (1 + 6 : 2)$; c) $10 - 2 : (2 - 4 : 4)$; d) $20 - 6 \cdot (4 - 4 : 4)$; e) $30 - 30 : (4 + 13 \cdot 2)$; f) $15 - 8 : (2 + 3 \cdot 2)$; g) $20 + 4 : (3 - 6 : 3)$; h) $40 - 100 : (1 + 3 \cdot 33)$.

R. Avem: a) $2 + 4 \cdot (2 + 4 \cdot 2) = 2 + 4 \cdot (2 + 8) = 2 + 4 \cdot 10 = 2 + 40 = 42$; b) $2 + 4 : (1 + 6 : 2) = 2 + 4 : (1 + 3) = 2 + 4 : 4 = 2 + 1 = 3$; c) 8; d) 2; e) 29; f) 14; g) 24; h) 39.

I.44. Calculați:

$$\text{a) } 4 + 2 \cdot (2 + 3 \cdot 5);\quad \text{b) } (4 + 2) \cdot (2 + 3 \cdot 5).$$

Ce observați?

R. Avem:

a) $4 + 2 \cdot (2 + 3 \cdot 5) = 4 + 2 \cdot (2 + 15) = 4 + 2 \cdot 17 = 4 + 34 = 38$;

b) $(4 + 2) \cdot (2 + 3 \cdot 5) = 6 \cdot (2 + 15) = 6 \cdot 17 = 102$.

Se observă că numerele sînt aceleași, dar la exercițiul b) a fost așezată o paranteză în plus; rezultatul este altul.

I.45. Un elev a avut să rezolve următorul exercițiu:

$$6 + 6 : 2 - 2 \cdot 2.$$

Redactarea lui a fost următoarea:

$6 + 6 : 2 - 2 \cdot 2 = 12 : 2 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2.$

Ce a greșit el? Rezolvați corect.

R. După modul de redactare se observă că a apărut numărul 12 obținut din „adunarea $6 + 6$”. El nu a respectat faptul că au prioritate împărțirile sau înmulțirile.

Rezolvarea corectă este:

$6 + 6 : 2 - 2 \cdot 2 = 6 + 3 - 4 = 9 - 4 = 5.$

I.46. Un elev a rezolvat următorul exercițiu:

$$12 - 6 : 2 + 4 \cdot 2$$

astfel:

$12 - 6 : 2 + 4 \cdot 2 = 6 : 2 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11.$

Unde este greșeala? Găsiți rezultatul corect.

R. A efectuat scăderea înaintea împărțirii. Rezultatul este 17.

I.47. Calculați:

a) $2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 2)]$;
b) $3 + 3 \cdot [3 + 3 \cdot (3 + 3 \cdot 3)]$;
c) $4 + 4 \cdot [4 + 4 \cdot (4 + 4 \cdot 4)]$;
d) $2 + 2 \cdot \{2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 2)]\}$;
e) $3 + 3 \cdot \{3 + 3 \cdot [3 + 3 \cdot (3 + 3 \cdot 3)]\}$;
f) $8 - 7 : \{6 - 5 : [4 - 3 : (2 - 2 : 2)]\}$;
g) $6 - 5 : [4 - 3 : (2 - 2 : 2)]$.

R. Avem a) $2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 2)] = 2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 + 4)] = 2 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 6) = 2 + 2 \cdot (2 + 12) = 2 + 2 \cdot 14 = 2 +$

$+ 28 = 30$; b) 120; c) 340; d) 62; e) 363; f) $8 - 7 : \{6 - 5 : [4 - 3 : (2 - 2 : 2)]\} = 8 - 7 : \{6 - 5 : [4 - 3 : (2 - 1)]\} = 8 - 7 : \{6 - 5 : [4 - 3 : 1]\} = 8 - 7 : \{6 - 5 : [4 - 3]\} = 8 - 7 : \{6 - 5 : 1\} = 8 - 7 : \{6 - 5\} = 8 - 7 : 1 = 8 - 7 = 1$; g) 1.

I.48. Scrieți numărul 100 folosind:

a) numai cifra 5 de 5 ori, înmulțirea și scăderea; b) numai cifra 3 de 5 ori, înmulțirea, adunarea și împărțirea; c) numai cifra 5 de 5 ori, adunarea și înmulțirea.

R. Avem: a) $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$; b) $3 \cdot 33 + 3 : 3$; c) $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.

I.49PP, PO. **Scrieți numărul 45 folosind adunarea a patru numere naturale, diferite între ele și diferite de 2, în așa fel încît efectuînd cu fiecare și cu numărul 2 una din operațiile: adunare, scădere, înmulțire, împărțire să se obțină numărul 10.**

R. „Cheia" problemei constă în răspunsul la întrebare: ce număr natural trebuie să înmulțim cu 2 ca să obținem numărul 10? Aceste este 5. Deci unul din cele patru numere cerute este 5. Următoarea „cheie", care ar fi putut să fie prima, este răspunsul la întrebarea: ce număr natural trebuie să adunăm cu 2 ca să obținem numărul 10? Acesta este 8. Deci alt număr cerut este 8. Este clar că putem continua astfel pentru operația de scădere și obținem numărul 12; la fel pentru operația de împărțire și obținem numărul al patrulea, 20.

Deci numerele cerute sînt: 5; 8; 12 și 20. Avem $45 = 5 + 8 + 12 + 20$.

I.50PO. **Scrieți numărul 100 folosind adunarea a patru numere naturale diferite în așa fel încît efectuînd cu fiecare și cu numărul 4 una din operațiile: adunare, scădere, înmulțire, împărțire să obțineți numărul 16.**

R. Avem scrierea $100 = 4 + 12 + 20 + 64$. Raționamentul este analog celui din problema precedentă.

I.51. **Precizați numărul de operații de înmulțire în următoarele exerciții:**

a) $2 \cdot 3 \cdot 4$; b) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$; c) $2 \cdot 2$; d) $2 \cdot 2 \cdot 2$; e) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; f) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; g) $7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7$ unde avem 10 numere egale cu 7.

R. a) Două: $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$; b) trei; c) una; d) două; e) trei; f) patru; g) nouă.

I.52. În următoarele situații precizați de cîte ori apare numărul doi, dacă scriem puterile sub formă de produs de factori:

a) 2^3; b) 2^2; c) 2^7; d) 2^1; e) 2^{10}; f) 2^6; g) 2^{100}.

R. a) de 3 ori: $2 \cdot 2 \cdot 2$; b) de 2 ori: $2 \cdot 2$; c) de 7 ori; d) o dată; e) de 10 ori; f) de 6 ori; g) de 100 ori.

I.53. În următoarele puteri precizați cîte operații de înmulțire ale aceluiași factor avem:

a) 3^2; b) 9^3; c) 2^2; d) 7^4; e) 10^{10}; f) 2^{42}; g) 3^1; h) 4^0. i) 3^x; j) 4^y.

R. a) Deoarece $3^2 = 3 \cdot 3$ avem o singură înmulțire;

b) $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$ deci două înmulțiri; c) una; d) trei; e) nouă; f) 41; g) nici una; h) nici una; i) $x - 1$; j) $y - 1$.

I.54. Un elev a avut de calculat următoarele puteri: a) 2^3; b) 3^2; c) 9^2; d) 3^4.

El a dat următoarele rezultate: a) 6; b) 6; c) 18; d) 12. Unde a greşit? Scrieţi rezultatele corect.

R. a) A confundat rolul exponentului 3. Trebuie scris: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; b) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; c) 81; d) 81.

I.55. Scrieţi cu ajutorul produselor de puteri, ţinînd seamă de paranteze:

a) $(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$; b) $(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3)$; c) $(5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$; d) $(2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3)$; e) $7 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7)$; f) $(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4)$; g) $(5 \cdot 5) \cdot 5$; h) $(5 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)$; i) $(5 \cdot 5) \cdot 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$.

R. a) $2^2 \cdot 2^4$; b) $3^3 \cdot 3^3$; c) $5^2 \cdot 5^4$; d) $2^2 \cdot 3^2$; e) $7 \cdot 7^3$; f) $4^4 \cdot 4^3$; g) $5^2 \cdot 5$; h) $5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^3$; i) $5^2 \cdot 5^1 \cdot 3^4$.

I.56. Scrieţi, folosind o singură putere:

a) $2^2 \cdot 2^3$; b) $2^3 \cdot 2^4$; c) $3^2 \cdot 3^5$; d) $2^4 \cdot 2^6$; e) $8^{10} \cdot 8^2$; f) $3 \cdot 3^6$; g) $9^5 \cdot 9$; h) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^4$; i) $11^4 \cdot 11^2 \cdot 11^6$; j) $2^9 \cdot 2 \cdot 2^6 \cdot 2^3$; k) $2^7 \cdot 2^0 \cdot 2^4 \cdot 2^{20} \cdot 2$; l) $2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$; m) $2^3 \cdot 3^5$; n) $2 \cdot 3^2$; o) $2^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^2$ unde avem 10 factori egali cu 2^2. p) $a^3 \cdot a^2 \cdot a^5 \cdot a^6$.

R. Aplicăm formula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Obţinem:

a) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$; b) 2^7; c) 3^7; d) 2^{10}; e) 8^{12}; f) 3^7; g) 9^6; h) 10^{12}; i) 11^{12}; j) 2^{19}; k) 2^{32}; l) 2^{12}; m) nu se poate; n) nu se poate; o) 2^{20}; p) a^{16}.

I.57. Scrieţi ca un produs de două puteri cu exponent număr natural şi bază tot număr natural: a) 10^5; b) 15^3; c) 7^6; d) 17^4; e) 23^5; f) 5^9; g) 41^{10}; h) 6^2.

R. Avem:

a) $10^5 = 10 \cdot 10^4 = 10^3 \cdot 10^2 = 10^0 \cdot 10^5$; scrierea nu este unică;
b) $15^3 = 15 \cdot 15^2$; c) $7^6 = 7 \cdot 7^5 = 7^2 \cdot 7^4$ etc.; d) $17^2 \cdot 17^2$ etc.; e) $23^2 \cdot 23^3$ etc.; f) $5^2 \cdot 5^7$; $5^4 \cdot 5^5$ etc.; g) $41^4 \cdot 41^6$ etc.; h) $6 \cdot 6$; $6^0 \cdot 6^2$.

I.58. Scrieţi ţinînd seamă de comutativitate, în toate modurile posibile sub formă de produse de puteri cu exponenţi numere naturale următoarele puteri:

a) 2^3; b) 2^4; c) 3^5.

R. Avem:

a) $2^3 = 2^0 \cdot 2^3 = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 = 2^1 \cdot 2^2 = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2$;

b) $2^4 = 2^0 \cdot 2^4 = 2^0 \cdot 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 2^0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;

c) $3^5 = 3^0 \cdot 3^5 = 3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^4 = 3^1 \cdot 3^4 = 3^0 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3^0 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 3^0 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

I.59. Scrieţi, folosind cît mai puţine puteri:

a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2$; b) $3^4 \cdot 2^5 \cdot 3^4$; c) $2^2 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^7$; d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4 \cdot 3^7$; e) $5^3 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 5^4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^3$; f) $5^7 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2$; g) $11^3 \cdot 13^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 11^4 \cdot 2^2 \cdot 2^3$; h) $a^2 \cdot 2^3 \cdot a^7 \cdot 2^7$; i) $a^3 \cdot 3^2 \cdot a^5 \cdot a^6 \cdot 3^2$; j) $a^3 \cdot 2^2 \cdot b^3$; k) $a^3 \cdot b^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b \cdot 2$.

R. Avem : a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^4 = 2^5 \cdot 3^4$; b) $3^8 \cdot 2^5$; c) $2^7 \cdot 3^9$; d) $2^6 \cdot 3^{14}$; e) $5^{10} \cdot 2^4 \cdot 7^3$; f) $5^9 \cdot 2^6 \cdot 7$; g) $11^8 \cdot 13^4 \cdot 2^5$; Dacă $a = 0$ rezultatul este numărul 0; dacă $a \neq 2$ avem $a^9 \cdot 2^{10}$; dacă $a = 2$ avem $2^9 \cdot 2^{10} = 2^{19}$; i) cînd $a = 0$ avem 0; cînd $a = 3$ avem 3^{18}; cînd $a \neq 3$ avem $a^{14} \cdot 3^4$; j) cînd $a = b = 0$ avem 0; cînd $a = b = 2$ avem 2^8; cînd $a = 2$, $b \neq 2$, $b \neq 0$ avem $2^5 \cdot b^3$; cînd $b = 2$, $a \neq 2$, $a \neq 0$ avem $a^3 \cdot 2^5$, etc.; k) pentru $a \neq 2$, $b \neq 2$, $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ avem $a^8 \cdot b^7 \cdot 2$, etc.

I.60. Scrieţi, folosind o singură putere :

a) $(3^2)^3$; b) $(4^2)^3$; c) $(4^3)^3$; d) $(6^3)^4$; e) $(10^3)^4$; f) $2^3 \cdot (2^4)^3$; g) $3^2 \cdot (3^3)^2 \cdot 3^4$; h) $(2^5)^3 \cdot (2^3)^5$; i) $5^2 \cdot (5^3)^2 \cdot (5^4)^7$; j) $((3^2)^2)^3$; k) $((2^5)^3)^4$; l) $((3^4)^2)^3 \cdot (3^2)^3 \cdot 3^5$; m) $7^2 \cdot (7^3)^2 \cdot 7^4 \cdot (7^2)^3$; n) 2^{3^2}; o) $2^{5^2} \cdot 2^{2^5}$; p) $(a^3)^2 \cdot ((a^2)^5)^{10}$.

R. Folosim formula : $(a^m)^n = a^{mn}$. Avem : a) $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$; b) $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$; c) 4^9; d) 6^{12}; e) 10^{12}; f) $2^3 \cdot (2^4)^3 = 2^3 \cdot 2^{12} = 2^{3+12} = 2^{15}$ (s-a folosit şi formula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$); g) 3^{12}; h) 2^{30}; i) 5^{36}; j) $((3^2)^2)^3 = (3^2)^6 = 3^{12}$; k) 2^{60}; l) 3^{35}; m) 7^{18}; n) 2^9; o) $2^{25} \cdot 2^{32} = 2^{57}$; p) a^{106}.

I.61. Scrieţi ca puteri cu baza 2 : a) 4^5; b) 16^{20}; c) 128^3; d) 32^{52}; e) 64^{64}; f) 8^{31}; g) 16^{13}; h) 4^{40}; i) 4^0.

R. Avem : a) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$; b) $(2^4)^{20} = 2^{80}$; c) $128^3 = (2^7)^3 = 2^{21}$; d) 2^{260}; e) 2^{384}; f) 2^{93}; g) 2^{52}; h) 2^{80}; i) 2^0.

I.62. Scrieţi, folosind cît mai puţine puteri :

a) $4^2 \cdot 2^2 \cdot 4^3$; b) $(2^2)^3 \cdot 4^3$; c) $25^3 \cdot 5^4 \cdot 25^2$; d) $8^3 \cdot 2^5 \cdot 2^5$; e) $(3^2)^3 \cdot 27 \cdot 3^4 \cdot 81$; f) $81 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 4^3 \cdot 81^2$; g) $125^2 \cdot 5^2 \cdot 125$; h) $(2 \cdot 3)^2 \cdot 6^8$; i) $(3 \cdot 5)^2 \cdot 15^3 \cdot 15$; j) $(2 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 \cdot 25 \cdot 27$; k) $(2^2 \cdot 5^2) \cdot 100^3$; l) $1\,000^3 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 2$; m) $(2^2 \cdot 5)^3 \cdot 10^5 \cdot 10$.

R. Avem : a) $4^2 \cdot 2^2 \cdot 4^3 = 4^5 \cdot 2^2 = (2^2)^5 \cdot 2^2 = 2^{10} \cdot 2^2 = 2^{12}$; b) $(2^2)^3 \cdot 4^3 = 4^3 \cdot 4^3 = 4^6$; c) $25^3 \cdot 5^4 \cdot 25^2 = 25^5 \cdot 5^4 = (5^2)^5 \cdot 5^4 = 5^{10} \cdot 5^4 = 5^{14}$; d) 2^{19}; e) 3^{17}; f) $3^{13} \cdot 2^9$; g) 5^{11}; h) $(2 \cdot 3)^2 \cdot 6^3 = 6^2 \cdot 6^3 = 6^5$; i) 15^6; j) $2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^4$; k) 100^4; l) $1\,000^4$; m) $2^{12} \cdot 5^9$.

I.63. Calculaţi, punînd rezultatul ca o putere cu exponentul 1 :

a) $2^3 \cdot 2^2$; b) $(2^3)^2$; c) $(2^2)^3$; d) $(2 \cdot 5)^0$; e) $2^{40} : 2^{38}$; f) $1^{2\,093}$; g) 10^4; h) 10^8; i) $(4 \cdot 5)^{46} : 20^{44}$; j) $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$; k) $(2^4)^{10} : (2^{10})^4$; l) $1^{400} : 1^{800} : 1^{1\,200}$; m) $((1^2)^2)^2$; n) $(((7^0)^0)^0)^0$; o) 0^{45}; p) $((0^2)^2)^2$; r) $2^0 \cdot 2^2$; s) $0^2 : 2^0$; t) $1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^1$; u) $(10 \cdot 100 \cdot 1\,000 \cdot 10\,000)^0$.

R. Avem : a) 32 ; b) 64 ; c) 64 ; d) 1 ; e) 4 ; f) 1 ; g) 10 000 ; h) 100 000 000 ; i) $20^{46} : 20^{44} = 20^2 = 400$; j) 64 ; k) 1 ; l) 1 ; m) 1 ; n) 1 ; o) 0 ; p) 0 ; r) 4 ; s) 0 ; t) 120 ; u) 1.

I.64. Scrieţi folosind puterile cu exponent număr natural ale lui 10, următoarele numere :

a) 32 000; b) 620 000 ; c) 1 500 000; d) $2\,300 \cdot 10^3$; e) 100 000 ; f) 4 301 000 ; g) $25\,000 \cdot 10^8 \cdot 420$; h) 3 300 000 ; i) 29 miliarde ; j) 23 milioane 43 mii ; k) o sută douăzeci de milioane.

R. Avem : a) $32 \cdot 1\,000 = 32 \cdot 10^3$; b) $62 \cdot 10\,000 = 62 \cdot 10^4$; c) $15 \cdot 10^5$; d) $23 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 23 \cdot 10^5$; e) 10^5; f) $4\,301 \cdot 10^3$; g) $25 \cdot$

$\cdot 42 \cdot 10^{12}$; h) $33 \cdot 10^5$; i) $29 \cdot 10^9$; j) $23\,043 \cdot 10^3$; k) $12 \cdot 10^7$.

I.65. Calculați:

a) $(2+3)^2$; b) $2+3^2$;

c) Ce observați la calculele anterioare?

d) Care este mai mare:

$$(15-3)^2 \text{ sau } 15-3^2?$$

R. Avem: a) $(2+3)^2 = 5^2 = 25$; b) $2+3^2 = 2+9 = 11$; c) Rezultatele sînt diferite. Este foarte important dacă exercițiul cu puteri și adunări nu are paanteze. Puterea de exponent număr natural diferit de zero și unu fiind „o înmulțire repetată", are prioritate față de adunare sau scădere. Avem, în continuare:

$$\text{d) } (15-3)^2 = 12^2 = 12 \cdot 12 = 144;\ 15-3^2 = 15-9 = 6$$

deci $(15-3)^2 > 15-3^2$.

I.66. Un elev a avut de rezolvat exercițiul $(2+3)^2$ și a dat următoarea redactare:

$$(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Ce a greșit elevul?

R. Redactarea corectă este:

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25$$

pentru că are prioritate operația din paranteză.

I.67. Dacă la exercițiul $2^3 + 2^2$ s-ar da următoarea redactare:

$$2^3 + 2^2 = 2^5 = 32,$$

unde este greșeala?

R. În redactarea respectivă s-a folosit probabil formula: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Trebuie reținut că, în general, $a^m + a^n \neq a^{m+n}$ pentru orice număr natural $a \neq 0$.

Calculul corect este:

$$2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12.$$

I.68. Calculați:

a) $3+2^3$; b) $10-2^3$; c) $2+2^2$; d) $10^0+10+10^2+10^3$; e) $10+2\cdot 5+2^5$; f) 2^3+3^2 ; g) 3^3+3^2; h) $1+1^{30}\cdot 1^{50}$; i) $2-40^{30}:40^{30}$; j) $2+2\cdot 2^3$; k) $2^2+2^3+2^4+2^5$; l) $3\cdot(3^2+3^3)$; m) $3\cdot 3^2+3\cdot 3^3$; n) $2\cdot 3^4+5\cdot 7^2$; o) $200-2^4\cdot 5+3^{40}:3^{38}$; p) $1+2\cdot 3^4$; r) $(2^3\cdot 3^3):2^2$; s) $(3^2\cdot 4^2):3$.

R. Avem: a) $3+2^3 = 3+8 = 11$; b) 2; c) 6; d) 1 111; e) 52; f) 17; g) 36; h) 2; i) 1; j) 18; k) 60; l) 108; m) 108; m) 407; o) 129; p) 163; r) 54; s) 48.

I.69. Calculați folosind (eventual) scoaterea unui factor comun:

a) $2^3\cdot 34-2^3\cdot 33$; b) $2^2\cdot 35+2^2\cdot 15$; c) $10^3\cdot 191-10^3\cdot 92+1\,000$; d) $10^3\cdot 191-10^2\cdot 910$; e) $10^3\cdot 291-10^2\cdot 910$; f) $12^2\cdot 493-144\cdot 492$; g) $13^2\cdot 253-169\cdot 252$; h) $11^2\cdot 392-11^2\cdot 390-121$; i) $9^2\cdot 419-81\cdot 418-81$.

R. Avem: a) 8; b) 200; c) $10^3\cdot(191-92+1) = 1\,000\cdot 100 = 100\,000 = 10^5$; d) $10^3\cdot 191-10^2\cdot 91\cdot 10 = 10^3\cdot 191-10^3\cdot$

$\cdot\, 91 = 10^3 \cdot (191 - 91) = 10^3 \cdot 100 = 10^5$; e) 200 000; f) 144; g) 169; h) 121; i) 0.

I.70. Calculați:

a) $(4 \cdot 6 \cdot 25)^2$; b) $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10)^3$; c) $25^2 \cdot 4^2$; d) $25^3 \cdot 8^3$; e) $(2^3 \cdot 5^3)^3$; f) $(2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10)^3$; g) $25^4 \cdot 8^4$; h) $(2^2 \cdot 5^2)^3$; i) $(25 \cdot 9 \cdot 4)^3$; j) $(8 \cdot 2^2 \cdot 25)^3$.

R. Avem: a) $(4 \cdot 6 \cdot 25)^2 = (4 \cdot 25 \cdot 6)^2 = [(4 \cdot 25) \cdot 6]^2 = [100 \cdot 6]^2 = 600^2 = 360\,000$;
b) $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10)^3 = (3 \cdot 10 \cdot 10)^3 = (3 \cdot 100)^3 = 27 \cdot 1\,000\,000 = 27\,000\,000$; c) $100^2 = 10\,000$; d) $200^3 = 8\,000\,000$; e) $(2^3 \cdot 5^3)^3 = [(2 \cdot 5)^3]^3 = [10^3]^3 = 10^9 = 1\,000\,000\,000$; f) 343 000 000; g) 1 600 000 000; h) 1 000 000; i) 729 000 000; j) 512 000 000.

I.71. Calculați:

a) $[3^3 \cdot 10^4 : (2 \cdot 27) \cdot 2^2 \cdot 15 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 35 \cdot 100$;
b) $[2^3 \cdot 10^5 : (2 \cdot 8) \cdot 3^2 \cdot 15 - 83\,700] : 27 \cdot 50 - 45 \cdot 1\,000$.

R. a) Avem, succesiv:

$[27 \cdot 10\,000 : 54 \cdot 4 \cdot 15 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 3\,500 =$
$= [270\,000 : 54 \cdot 4 \cdot 15 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 3\,500 =$
$= [5\,000 \cdot 4 \cdot 15 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 3\,500 =$
$= [20\,000 \cdot 15 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 3\,500 = [300\,000 - 93\,900] : 45 \cdot 50 - 3\,500 = 206\,100 : 45 \cdot 50 - 3\,500 = 4\,580 \cdot 50 - 3\,500 =$
$= 229\,000 - 3\,500 = 225\,500$; b) 12 300 000.

I.72. Calculați:

a) $[(120 \cdot 625) \cdot (2^3 \cdot 10)] : (2 \cdot 5^2 : 25)$;
b) $6 + 2[(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$.

R. Avem a) $3 \cdot 10^6$; b) 56.

I.73. Calculați:

$$3^2 + (4 \cdot 6)^2 + 2^5 \cdot 5^2 - 1.$$

R. Avem $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $(4 \cdot 6)^2 = 4^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = 16 \cdot 36 = 576$; $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ deci:

$$3^2 + (4 \cdot 6)^2 + 2^5 \cdot 5^2 - 1 = 1\,384.$$

I.74^M. Calculați:

$$[1 + 2 \cdot 2^{49} + 2^{94} : 2^{14} + (3^2)^{100}] : (1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200}).$$

R. Avem, succesiv:

$$[1 + 2 \cdot 2^{49} + 2^{94} : 2^{14} + (3^2)^{100}] : (1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200}) =$$
$$= [1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200}] : (1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200}) = 1.$$

Observăm că cele două paranteze sînt egale. Nu trebuie să mai realizăm nici un calcul, în afară de o împărțire- Rezultatul este numărul 1.

I.75[PP]. În fiecare din perechile de numere ce urmează indicați numărul cel mare:

a) 3^4; 3^2; b) 5^2; 5^7; c) 20^{13}; 20^{11}; d) $(2^2)^3$; $(2^2)^4$; e) 3^9; $(3^3)^3$; f) $(2^2)^3$; $(2^3)^2$; g) 3^2; 2^3; h) $4 \cdot 5^2$; $3 \cdot 5^2$; i) $9 \cdot 3^2$; $9 \cdot 9$; j) $(2^5)^7$; $(2^3)^7$; k) $(2^3)^{23}$; $(3^2)^{23}$;

R. Numerele mai mari sînt: a) 3^4; b) 5^7; c) 20^{13}; d) $(2^2)^4$; e) sînt egale; f) sînt egale;

Observație. Dintre două numere naturale scrise ca puteri cu aceeași bază este mai mare cel cu exponentul număr natural mai mare (baza diferită de zero și unu). În continuare: g) 3^2; h) $4 \cdot 5^2$; i) egale; j) $(2^5)^7$; k)$(3^2)^{23}$.

I.76[M]. Care număr este mai mare: a) 10^{20} sau 20^{10}? b) 2^{69} sau 3^{46}?

R. a) Scriem primul număr astfel: $10^{20} = (2 \cdot 5)^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20}$.

Scriem numărul al doilea astfel:

$$20^{10} = (2 \cdot 2 \cdot 5)^{10} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10} = 2^{20} \cdot 5^{10}$$

Se observă că $2^{20} \cdot 5^{20} > 2^{20} \cdot 5^{10}$. Deci este mai mare 10^{20}.

b) Scriem primul număr astfel: $2^{69} = 2^{3 \cdot 23} = (2^3)^{23} = 8^{23}$.

Scriem al doilea număr astfel:

$$3^{46} = 3^{2 \cdot 23} = (3^2)^{23} = 9^{23}.$$

Deoarece $9^{23} > 8^{23}$ rezultă că numărul mai mare este 3^{46}.

I.77[PO]. Indicați numărul cel mai mare din următoarele perechi de numere:

a) x^2; 3^2, unde x este număr natural;

b) x^2; x^3, unde x este număr natural diferit de zero și unu;

c) x^2; x^4 unde x este număr natural;

d) a^2; b^3 unde a și b sînt numere naturale mai mici ca 4.

R. a) Dacă x este 0, 1 sau 2 atunci $3^2 > x^2$; dacă $x = 3$ atunci $x^2 = 3^2$; dacă $x > 3$ atunci $x^2 > 3^2$; b) x^3; c) Dacă $x = 0$ sau $x = 1$ avem $x^2 = x^4$; dacă $x \geqslant 2$ atunci $x^4 > x^2$; d) Dacă $a = b = 0$ sau $a = b = 1$ avem $a^2 = b^3$; dacă $a > 1$ și $b > 1$ și $a = b$ avem $a^2 < b^3$; dacă $a = 0$ și $b \geqslant 1$ avem $a^2 < b^3$; dacă $a \geqslant 1$ și $b = 0$ avem $a^2 > b^3$, dacă $a = 1$ și $b \geqslant 2$ avem $a^2 < b^3$; dacă $a = 2$ și $b = 1$ avem $a^2 > b^3$; dacă $a > 2$ și $b \geqslant 1$ avem $a^2 > b^3$; dacă $a = 2$ și $b = 3$ avem $a^2 < b^3$.

I.78. Folosind modelul:

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

scrieți următoarele numere:

a) 312; b) 14 950; c) 62; d) 3 120; e) 72 300; f) 1 200; g) 1 005; h) 100 056; i) $75 \cdot 4$; j) $32 + 196$; k) 25^3; l) $2\,901 \cdot 100$; m) $7\,000 - 99$.

R. Avem scrierile: a) $312 = 300 + 10 + 2 = 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2$; b) $14\,950 = 10\,000 + 4\,000 + 900 + 50 = 1 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 0$; c) $6 \cdot 10 + 2$; d) $3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 0$; e) $7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$; f) $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2$; g) $1 \cdot 10^3 + 5$; h) $1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10 + 6$; i) $75 \cdot 4 = 300 = 3 \cdot 10^2$; j) $32 + 196 = 228 =$

$= 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$; $k = 25^3 = 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$; l) $2 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^2$; m) $6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 1$.

I.79. Folosind modelul:

$$\overline{abc}_{(2)} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

scrieţi următoarele numere naturale:

a) $111_{(2)}$; b) $11110_{(2)}$; c) $101_{(2)}$; d) $11_{(2)}$; e) $10_{(2)}$; f) $1110_{(2)}$; g) $101010_{(2)}$; h) $10111_{(2)}$.

R. Avem: a) $111_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$; b) $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2$; c) $1 \cdot 2^2 + 1$; d) $1 \cdot 2 + 1$; e) $1 \cdot 2$; f) $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2$; g) $2^5 + 2^3 + 2$; h) $2^4 + 2^2 + 2 + 1$.

I.80. Scrieţi după modelul:

$$3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2 = 3\,572$$

următoarele numere:

a) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$; b) $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1$; c) $1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1$; d) $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$; e) $10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9$; f) $10^4 + 3 \cdot 10 + 2$; g) $7 \cdot 10^5 + 9$; h) $3 \cdot 10 + 2$; i) $9 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^3$; j) $2 \cdot 10^5 + 10 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10 + 5$; k) $4 \cdot 10^2 + 19 \cdot 10 + 7$.

R. Avem: a) 232 157; b) 341; c) 12 151; d) 30 257; e) 1 209; f) 10 032; g 700 009; h) 32; i) 909 000; j) Numărul nu se poate scrie sub forma indicată; printre cifrele cu care scriem numerele în baza 10 nu se găseşte 10 şi nu se găseşte nici 21.

Vom proceda, pentru a scrie totuşi numărul sub forma indicată, în modul următor: $10 \cdot 10^4 = 10^5$, $21 \cdot 10 = 20 \cdot 10 + 10 = 2 \cdot 10^2 + 10$ şi scriem numărul $2 \cdot 10^5 + 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 10 + 5 = 3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 10 + 5 = 3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 10^3 + 10 + 5 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 10 + 5 = 304\,015$.

k) Asemănător, numărul nu se poate scrie sub forma indicată căci 19 nu este cifră în sistemul de numeraţie cu baza 10. Aceeaşi observaţie putem face ca mai sus.

I.81. Se dau numerele:

a) $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1$; b) $2^3 + 2^2 + 2$; c) $2^5 + 2^3 + 2 + 1$; d) $2^6 + 2$; e) $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1$; f) $2^{10} + 1$; g) $2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$; h) $2^5 + 2$.

Scrieţi-le folosind modelul:

$$2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 1111_{(2)}.$$

R. Avem: a) $1101_{(2)}$; b) $1110_{(2)}$; c) $101011_{(2)}$; d) $1000010_{(2)}$; e) $11111011_{(2)}$; f) $10000000001_{(2)}$; g) nu se poate scrie folosind modelul indicat; în baza de numeraţie 2 nu avem ca cifre decît pe 0 şi 1. Putem scrie numărul altfel: $2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 11011_{(2)}$.; h) $100\,010_{(2)}$.

I.82. Scrieţi în baza 10 următoarele numere:

a $110_{(2)}$; b) $101_{(2)}$; c) $11_{(2)}$; d) $1_{(2)}$; e) $1001_{(2)}$; f) $11011_{(2)}$; g) $101111_{(2)}$; h) $10000001_{(2)}$; i) $1111101_{(2)}$; j) $1111111_{(2)}$.

R. Avem: a) $110_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 = 4 + 2 = 6$; b) $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$; c) $11_2 = 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3$; d) $1_{(2)} = 1$; e) $1001_{(2)} = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$;

f) $11011_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 27$; g) $101111_{(2)} = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 47$; h) 129; i) 125; j) 127.

I.83. Există x astfel încît $\overline{32x} \cdot 52 = 16\,744$?

R. Pentru a găsi numărul $\overline{32x}$ efectuăm împărţirea 16 744 : 52 şi se obţine 322.

Deci $x = 2$.

I.84^{M}. Un elev a scris toate numerele naturale strict mai mari decît 0 şi mai mici decît 100. Aflaţi:

a) De cîte ori a fost folosită cifra 0;

b) De cîte ori a fost folosită cifra 1;

c) De cîte ori a fost folosită cifra 3.

R. a) Pentru rezolvarea problemei nu este nevoie să scriem toate numerele din problemă.

Gîndim că cifra 0 este folosită numai la numerele scrise cu două cifre unde ultima este 0. Acestea sînt: 10; 20; ...; 90. Deci cifra 0 este folosită de 9 ori.

b) În setul primelor zece numere naturale nenule se foloseşte cifra 1 de două ori (la numerele 1 şi 10).

În setul următoarelor zece numere naturale se foloseşte cifra 1 de 9 ori pe poziţia zecilor şi încă odată la numărul 11, deci de 10 ori.

În continuare, se mai foloseşte încă de opt ori cifra 1 pe poziţia unităţilor la numerele: 21; 31; ...; 91. Deci cifra 1 se foloseşte de $2 + 10 + 8 = 20$ ori.

c) Asemănător judecăm şi pentru cifra 3 şi găsim că se foloseşte de 20 de ori.

I.85^{PO}. Pentru paginarea unei cărţi s-au folosit de 1 212 ori cifrele cu care se scriu numerele naturale în sistemul de numeraţie zecimal. Cîte pagini are cartea?

R. Pe fiecare pagină, după cum se ştie, este scris un număr natural în sistemul de numeraţie zecimal, începînd cu numărul natural 1.

Primele 9 numere naturale: 1, 2, ..., 9 sînt scrise pe primele 9 pagini, deci s-au folosit 9 cifre.

Pentru următoarele 90 de numere naturale, adică 10; 11; ...; 98; 99, care corespund la 90 pagini s-au folosit cifre, $90 \cdot 2$ adică 180 cifre. Deci pentru $(9 + 90)$ pagini adică 99 pagini s-au folosit $9 + 180$, adică 189 cifre.

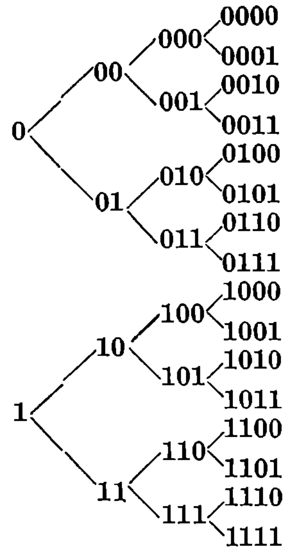
Au mai rămas 1 212—189 adică 1 023 semne cu care s-au numerotat următoarele pagini, dar cu numere scrise cu cîte trei cifre sau mai multe. Cum $1\,023 : 3 = 341$, înseamnă că paginile care au fost numerotate cu trei cifre, sînt în număr de 341.

Deci în total cartea are $9 + 90 + 341 = 440$ de pagini.

I.86^{PO}. Găsiţi toate numerele din sistemul de numeraţie zecimal care se scriu în sistemul de numeraţie binar cu: a) o sigură cifră; b) patru cifre; c) trei cifre; d) cinci cifre; e) două cifre.

R. a) În sistemul de numeraţie binar singurele cifre sînt 1 şi 0. Deci numerele 1 şi 0 sînt şi în sistemul de numeraţie zecimal.

b) Pentru a nu pierde nici un număr de patru cifre scris în sistemul de numerație binar folosim următoarea schemă:



Vom alege din schemă numerele de patru cifre, adică numai pe acelea care nu au prima cifră din stînga 0. Acestea sînt: 1000_2, 1001_2, 1010_2, 1011_2, 1100_2, 1101_2; 1110_2; 1111_2.

Transformîndu-le, pe rînd, în baza zece, vom avea:

$$1000_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 2^3 = 8;$$

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 + 0 + 1 = 8 + 1 = 9;$$

$$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 + 1 \cdot 2 + 0 = 8 + 2 = 10;$$

$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 + 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11;$$

$$1100_2 = 2^3 + 2^2 + 0 + 0 = 8 + 4 = 12;$$

$$1101_2 = 2^3 + 2^2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13;$$

$$1110_2 = 2^3 + 2^2 + 2 = 14;$$

$$1111_2 = 15.$$

c) Numerele cu trei cifre din sistemul binar sînt 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, care scrise în sistemul de numerație zecimal devin: 4, 5, 6, 7.

d) Avem numerele 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31.

Exercițiul e) îl lăsăm pe seama cititorului.

I.87^{PO}. Aflați toate numerele de telefon de 6 cifre, mai mici decît 200 000 știind că: în nici un număr nu figurează aceeași cifră de două sau mai multe ori; suma cifrelor luate ca simple unități este 15; dacă la fiecare număr adunăm răsturnatul său (numărul scris cu aceleași cifre scrise în ordine inversă), în toate cazurile obținem același număr de 6 cifre format din aceeași cifră.

R. Observăm că $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, deci numerele sînt formate cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Numerele fiind mai mici decît 200 000, prima cifră este în mod obligatoriu 1.

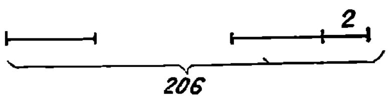
Mai observăm că $1 + 4 = 5$, $0 + 5 = 5$, $2 + 3 = 5$; atunci ultima cifră este 4. Cifrele 0, 2, 3, 5 se permută pe locurile 2, 3, 4, 5. Obținem soluțiile:

$$1)\ \begin{array}{r} 102354\,+ \\ 453201 \\ \hline 555555 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 103254\,+ \\ 452301 \\ \hline 555555 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 120534\,+ \\ 435021 \\ \hline 555555 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 125034 \\ 430521 \\ \hline 555555 \end{array}$$

5) 130 524; 6) 135 024; 7) 152 304; 8) 153 204.

I.88^{PP}. Să se scrie fiecare din numerele 206 și 103 ca o sumă de două numere naturale dintre care unul să fie mai mare cu doi decît celălalt.

R. De fapt avem următoarea problemă: Să se afle două numere naturale știind că suma lor este 206, iar unul este mai mare ca celălalt cu 2. Acest tip de problemă se poate ilustra cu metoda grafică:



Deci $206 - 2 = 204$ reprezintă două numere naturale egale. Rezultă că unul din ele este $204 : 2 = 102$.

Așadar, un număr este 102 iar celălalt este $102 + 2 = 104$.

Acum problema se poate rezolva:

$$206 = 102 + 104.$$

Numărul 103 nu se poate scrie după cum cere problema căci $103 - 2 = 101$ iar $101 : 2$ nu este număr natural.

I.89. a) Scrieți numărul 87 ca o sumă de două numere naturale dintre care unul să fie cu 3 mai mare decît celălalt.

b) Scrieți numărul 663 ca o sumă de trei numere naturale astfel încît fiecare să difere cu 2 decît celălalt.

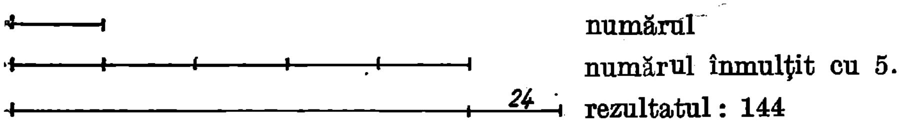
R. a) Avem scrierea: $87 = 42 + 45$.

b) Problema este analoagă cu următoarea: suma a trei numere naturale este 663, al doilea este cu 2 mai mare ca primul, iar al treilea este cu 2 mai mare ca al doilea. Obținem $663 = 219 + 221 + 223$.

I.90. Un număr îl înmulțim cu 5 și adăugăm la rezultat 24. Găsiți numerele în cazul cînd rezultatul este:

a) 144 b) 44.

R. a) Reprezentăm numerele prin următoarea diagramă:



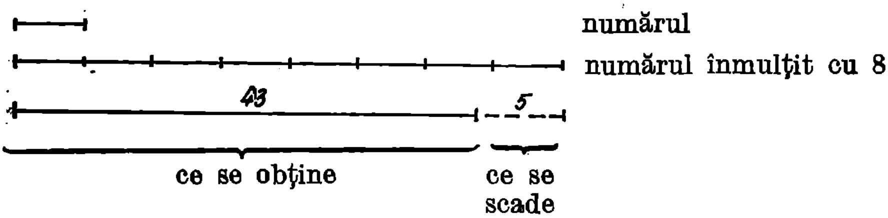
Metoda grafică alăturată ne convinge că numărul înmulţit cu 5 este 144 — 24, adică 120.

Aşadar, numărul este 120 : 5, adică 24.

b) 4.

I.91. Un număr se înmulţeşte cu 8, iar din rezultat se scade 5. Găsiţi numărul ştiind că în final se obţine rezultatul: a) 43; b) 19; c) 403.

R. a) Avem schema grafică:



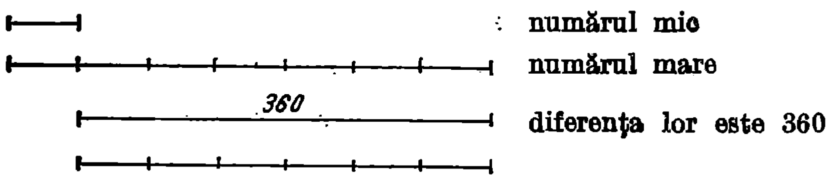
Metoda figurată ne conduce către următoarea strategie de rezolvare: numărul înmulţit cu 8 este mai mare cu 5 decît rezultatul final care este 43, adică 43 + 5 = 48, deci numărul cerut este 48 : 8, adică 6.

Verificare: Avem 6 · 8 = 48 şi 48 — 5 = 43.

b) 3; c) 51.

I.92. Un număr este de 7 ori mai mare decît altul. Găsiţi cele două numere ştiind că diferenţa dintre ele este: a) 360; b) 30; c) 1 200.

R. a) Avem schema:



360 este de 6 ori numărul mic deci numărul mic este 360 : 6, adică 60. Rezultă că numărul mare este 7 · 60 = 420. Deci numerele sînt: 60 şi 420.

Verificare: Avem 420 — 60 = 360.

b) Numerele sînt: 5 şi 35;

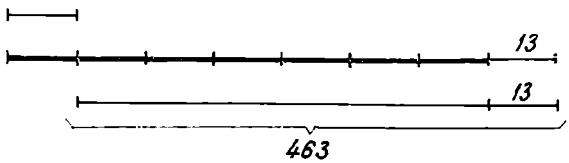
c) Numerele sînt 200 şi 1 400.

I.93[re]**.** Cîtul a două numere naturale este 7, iar restul 13. Aflaţi cele două numere în cazul cînd diferenţa lor este:

a) 463; b) 271; c) 283; d) 613.

R. a) Deoarece cîtul este 7 înseamnă că între ele nu avem relația „egal".

Folosind cunoștințele despre împărțirea cu rest putem spune că numărul cel mai mare (deîmpărțitul) este egal cu cel mai mic (împărțitorul) înmulțit cu 7 și la care adăugăm restul 13. Metoda grafică ne permite să prezentăm problema ca în figură:



Se observă că diferența lor este un număr care se obține din adunarea lui 13 cu un număr rezultat din numărul mic înmulțit cu 6. Această observație permite următoarele calcule:

$$463 - 13 = 450;$$
$$450 : 6 = 75.$$

75 este numărul cel mic. Numărul cel mare este:

$$75 \cdot 7 + 13 = 525 + 13 = 538$$

Deci numerele sînt: 538 și 75.

Verificare: Avem $538 - 75 = 463$.

Împărțind 538 la 75 obținem, în adevăr, cîtul 7 și restul 13.

Avem, în continuare:

b) 314 și 43; c) 328 și 45; d) 713 și 100.

I.94^{PO}. O persoană a cumpărat 8 kg mere de calitatea I și 10 kg mere de calitatea a doua. Un kilogram de mere de calitatea I costă cu doi lei mai mult decît un kilogram de calitatea a doua. Suma cheltuită pe mere împreună cu 20 lei care i-au mai rămas persoanei în buzunar este de 126 lei, Calculați prețul merelor din fiecare calitate.

R. Merele au costat 126 lei-—-20 lei = 106 lei. Dacă un kilogram din calitatea I costă cu 2 lei mai mult înseamnă că pe cele 8 kg de mere de calitatea I s-au dat cu 8 lei · 2 = 16 lei mai mult decît dacă aceste 8 kg ar fi fost și ele de calitatea a doua. În această situație am fi avut problema: s-au cumpărat 8 kg + 10 kg = 18 kg de calitatea a doua și s-au cheltuit 106 lei — 16 lei = 90 lei; care este prețul merelor de calitatea a doua?

Este ușor de constatat că acesta este: 90 lei : 18 = 5 lei.

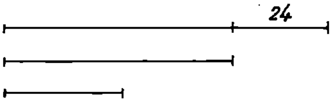
Așadar, merele de calitatea a doua au prețul de 5 lei, iar cele din calitatea întîi 5 lei + 2 lei = 7 lei.

Observație: Pe parcursul rezolvării problemei date a fost formulată o altă problemă mai simplă.

I.95$^{M;O}$. La un concurs sportiv s-au acordat trei premii în valoare totală de 252 lei.

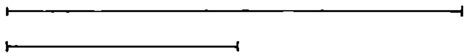
Aflați ce sumă a primit fiecare, știind că sportivul situat pe locul întîi a primit cu 24 lei mai mult al doilea, iar acesta primește jumătate din suma primită de primul și al treilea la un loc.

R. Ca la orice concurs, ordinea premiilor este: primul, al doilea și al treilea. Se înțelege și din text, dar este firesc, ca și sumele de bani reprezentînd contravaloarea premiilor să fie exprimate prin trei numere în ordine descrescătoare, ca în figura a):



a)

Al doilea primește, așadar, jumătate din cît primește primul și a treilea la un loc (vezi figura b).



b)

Se observă deci că suma acordată pentru cele trei premii de 252 lei este formată din trei premii egale cu premiul celui de al doilea. Așadar, valoarea celui de-al doilea premiu se află prin împărțirea 252 lei : 3 = 84 lei.

Acum aflăm premiul întîi:

$$84 \text{ lei} + 24 \text{ lei} = 108 \text{ lei}.$$

Premiul trei se poate afla și prin calculul:

$$252 \text{ lei} - (108 \text{ lei} + 84 \text{ lei}),$$

adică 60 lei.

I.96^{PO}. Găsiți numărul de cărți al căror cost este 4 lei și numărul de cărți al căror cost este 10 lei cumpărate cu 200 lei, astfel ca în total să fie 32 bucăți.

(C. Ionescu — Țiu, G.M., 12/1969)

R. *Soluția I.* Presupunem că s-ar cumpăra numai cărți de 10 lei. Ele ar costa 10 lei · 32 adică 320 lei. Dar, conform enunțului problemei, cărțile care s-au cumpărat, în realitate, au costat numai 200 lei, deci dacă s-ar cumpăra numai din cele de 10 lei am plăti o diferență de 320 lei — 200 lei = 120 lei mai mult.

Dar această diferență provine numai din faptul că s-au cumpărat și cărți de 4 lei mai ieftine decît cele de 10 lei cu 10 lei — 4 lei, adică cu 6 lei fiecare. Deci, în realitate, cărți de 4 lei s-au cumpărat în număr de 120 : 6, adică 20.

Din celelalte s-au cumpărat:

$$32 - 20 = 12.$$

Soluția a II-a. Presupunem că s-ar fi cumpărat numai cărți de 4 lei; atunci ele ar fi costat numai 32 · 4 lei = 128 lei, deci o economie de 200 lei — 128 lei, adică de 72 lei. Aceasta a fost provenită din diferența de 10 lei — 4 lei = 6 lei la fiecare carte cu prețul de 10 lei. Rezultă că, în total, au fost 72 : 6 adică 12 cărți de 10 lei, iar de 4 lei au fost 32 — 12 = 20 bucăți.

Proba: Avem 12 · 10 lei + 20 · 4 lei = 120 lei + 80 lei = 200 lei.

I.97[PO]. Într-o clasă se organizează o echipă de fotbal. Trei jucători din echipă au numele Ionescu, patru din ei au numele Georgescu, doi, Stănescu şi doi, Marinescu. Patru jucători au prenumele Dumitru, trei, Emil, iar alţi trei, Petre. Nu sînt doi jucători care să aibă acelaşi nume şi acelaşi prenume. Centrul înaintaş are prenumele Alexandru, iar portarul se numeşte Marinescu Emil.

Găsiţi numele şi prenumele la fiecare din ceilalţi jucători.

R. Sigur avem Marinescu Emil. Avem patru nume: Ionescu, Georgescu, Stănescu şi Marinescu şi patru prenume: Dumitru, Emil, Petre şi Alexandru.

Importantă este informaţia cu privire la faptul că nu sînt jucători care să aibă acelaşi nume şi acelaşi prenume. Deci este necesar să realizăm perechile corespunzătoare:

Ionescu Dumitru, Ionescu Emil, Ionescu Petre (numele Ionescu este epuizat); Georgescu Dumitru, Georgescu Emil, Georgescu Petre, Georgescu Alexandru (numele Georgescu este epuizat); Stănescu Dumitru, Stănescu Petre (numele Stănescu esre epuizat): Marinescu Emil a fost dat din ipoteză. A mai rămas Marinescu Dumitru.

Verificaţi folosind schema de mai jos:

Ionescu →	Dumitru
Ionescu →	Emil
Ionescu →	Petre
Georgescu →	Dumitru
Georgescu →	Emil
Georgescu →	Petre
Georgescu →	Alexandru
Stănescu →	Dumitru
Stănescu →	Petre
Marinescu →	Emil
Marinescu →	Dumitru

Soluţia nu este unică. Cititorul este sfătuit să găsească şi altele.

TESTUL Nr. 1[1]

Calculaţi:

1) $11\,909 + 80\,799$; 2) $12\,509 - 9\,199$; 3) $8\,756 \cdot 903$; 4) $7\,906\,668 : 8\,756$; 5) $125 - (25 + 70 - 50 - 15)$; 6) $20 + 5 \cdot 2$; 7) $84 - 8 \cdot 7 + 3 \cdot 7 - 4$; 8) $52 + 90 \cdot 3 \cdot 2 : 9 - 22$; 9) $1\,500 + 7\,500 : 25 - 5$; 10) $20 + 4 : (3 - 6 : 3)$; 11) $1 + 0 \cdot 9$; 12) $2 + 1 \cdot 9$; 13) $3 + 12 \cdot 9$; 14) $4 + 123 \cdot 9$; 15) $5 + 1\,234 \cdot 9$; 16) 9^3; 17) 3^9; 18) $3^4 \cdot 3^5$; 19) $3^{12} : 3^3$; 20) $2^5 \cdot 5^2$.

Notă. Fiecare exerciţiu este notat cu cîte 1 punct; timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL Nr. 2

1. Calculaţi:

a) (1p) $4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5$; b) (1p) $134 \cdot 15 + 134 \cdot 50 + 35 \cdot 134$; c) (1p) $200 - 2^5 \cdot 5 + 3^{29} : 3^{27}$.

2. (4p) Găsiţi numărul care îndeplineşte condiţia:

a) este cu 429 mai mare decît 3 801;

b) este cu 32 ori mai mic decît 3 808;

[1] Răspunsurile testelor se găsesc la pagina 338.

c) este de 32 ori mai mic decît 1 664;

d) este de 200 ori mai mare decît 400.

3. (2p) Care este cel mai mic număr natural de 4 cifre care are cifra sutelor 5?

4. (2p) Găsiţi numărul natural cu 50 mai mic decît dublul lui 420.

5. (1p) Calculaţi dublul produsului dintre numerele 725 şi 309.

6. (2p) Calculaţi produsul dintre pătratul numărului 40 şi cubul numărului 20.

7. (1p) Transformaţi în sistemul de numeraţie cu baza zece numărul 1101_2.

8. (2p) Care este mai mare: 110111_2 sau 60?

9. (3p) Un număr se înmulţeşte cu 5, la rezultat se adună 4 283 şi se obţine 4 458. Găsiţi numărul.

Notă. Timp de lucru: 60 minute.

TESTUL Nr. 3

1. (2p) Găsiţi cel mai mic număr natural de trei cifre în care se repetă toate cifrele şi este mai mic ca dublul lui 156.

2. (1p) Există numărul natural x, astfel încît:

$$\overline{4x9x} + 3\,245 = 7\,537?$$

3. (3p) Găsiţi numerele naturale x, y, z astfel încît $x + y + z = 3$.

4[M]. (3p) Aflaţi cîte numere naturale strict mai mici de 315 există, astfel încît, dacă înmulţim pe fiecare din ele cu 2 obţinem un număr natural mai mare decît 315.

5. (4p) Suma a două numere este 150. Diferenţa lor este cît numărul mic. Aflaţi cele două numere.

6. (3p) Diferenţa a două numere este 43. Dacă le împărţim obţinem cîtul 9 şi restul 3. Aflaţi numerele.

7. (4p) Suma a trei numere este 75. Primul este jumătate din al treilea. Dacă împărţim pe al doilea la al treilea obţinem cîtul 2 şi restul 5. Aflaţi cele trei numere.

Notă. Timpul de lucru: două ore.

CAPITOLUL II

UNITĂŢI DE MĂSURĂ ŞI ELEMENTE DE GEOMETRIE

Noţiuni introductive

În acest capitol vor fi folosite, printre altele, şi următoarele cunoştinţe :

a) 1 cm = 10 mm;
1 dm = 10 cm = 100 mm;
1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm;
1 dam = 10 m = 100 dm = 1 000 cm = 10 000 mm;
1 hm = 10 dam = 100 m = 1 000 dm = 10 000 cm = 10^5 mm;
1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m = 10 000 dm = = 10^5 cm = 10^6 mm.

b) Perimetrul unui triunghi sau al unui dreptunghi sau al unui pătrat este suma măsurilor tuturor laturilor.

c) Perimetrul dreptunghiului se mai poate calcula astfel :

$$2\,L + 2l \text{ sau } 2 \cdot (L + l),$$

unde L este măsura lungimii, iar l este măsura lăţimii.

d) Perimetrul pătratului se calculează astfel :

$$4 \cdot l$$

unde l este măsura laturii sale.

e) Semiperimetrul dreptunghiului este jumătate din perimetrul său.

f) Semiperimetrul dreptunghiului se mai poate calcula astfel : $L + l$.

g) 1 cg = 10 mg;
1 dg = 10 cg = 100 mg;
1 g = 10 dg = 100 cg = 1 000 mg;
1 dag = 10 g = 100 dg = 1 000 cg = 10 000 mg;
1 hg = 10 dag = 100 g = 1 000 dg = 10 000 cg = 10^5 mg;
1 kg = 10 hg = 100 dag = 1 000 g = 10 000 dg = 10^5 cg = 10^6 mg;
1 q = 100 kg = 1 000 hg = 10 000 dag = 10^5 g = 10^6 dg = = 10^7 cg = 10^8 mg;
1 t = 10 q = 1 000 kg = 10^4 hg = 10^5 dag = 10^6 g = 10^7 dg = = 10^8 cg = 10^9 mg.

h) 1 minut = 60 secunde;
o oră = 60 minute = 3 600 secunde;
o zi = 24 ore = 1 440 minute = 86 400 secunde.

II.1. Transformați în milimetri :

a) 25 dam ; b) 31 km ; c) 43 m 20 000 dm 5 mm ; d) 20 cm ; e) 200 dm ; f) 5 m ; g) 30 mm ; h) 7 cm ; i) 6 dam ; j) 7 hm ; k) 2 km ; l) 20 hm ; m) 310 dam ; n) 140 m ; o) 150 dm ; p) 1301 cm ; r) 42 hm 25 m ; s) 13 km 200 dam 3 dm.

R. Avem : a) 25 dam $=$ (25·10 000) mm $=$ 250 000 mm ; b) 31 km $=$ $=$ (31 · 1 000 000) mm $=$ 31 000 000 mm $=$ $31 \cdot 10^6$ mm ; c) 43 m 20 000 dm 5 mm $=$(43·1 000) mm$+$(20 000·100) mm $+$ 5 mm$=$(43 000 $+$ 2 000 000 $+$ $+$ 5) mm $=$ 2 043 005 mm ; d) 200 mm ; e) 20 000 mm ; f) 5 000 mm ; g) 30 mm ; h) 70 mm ; i) 60 000 mm ; j) $7 \cdot 10^5$ mm ; k) $2 \cdot 10^6$ mm ; l) $2 \cdot 10^6$ mm ; m) $31 \cdot 10^5$ mm ; n) $14 \cdot 10^4$ mm ; o) 15 000 mm ; p) 13 010 mm ; r) $4\,225 \cdot 10^3$ mm ; s) 15 000 300 mm.

II.2. Transformați în metri :

a) 23 km ; b) 42 000 cm ; c) 23 hm și 50 dm ; d) 29 hm ; e) 32 dam ; f) 45 m ; g) 450 dm ; h) 4 500 cm ; i) 450 000 cm ; j) 32 000 mm ; k) 27 km și 30 dam ; l) 4 hm 3 dam 500 cm ; m) 2 000 m 3 000 dm și 1 000 mm ; n) 5 km 3 hm 2 dam 7 m.

R. Avem : a) 23 km $=$ (23·1 000) m $=$ 23 000 m ; b) 42 000 cm $=$ $=$ (42 000 : 100) m $=$ 420 m ; c) 23 hm 50 dm$=$(23 · 100) m$+$(50 : 10) m$=$ $=$ (2 300 $+$ 5) m $=$ 2 305 m ; d) 2 900 m ; e) 320 m ; f) 45 m ; g) 45 m ; h) 45 m ; i) 4 500 m ; j) 32 m ; k) 27 300 m ; l) 435 m ; m) 2 301 m ; n) 5 327 m.

II.3. Transformați în metri, exprimînd rezultatul numai printr-un număr natural :

a) 3 km ; b) 2 hm ; c) 500 dm d) 23 000 cm ; e) 420 cm ; f) 2 km ; g) 3 dam ; h) 40 hm ; i) 300 dam ; j) 400 dm ; k) 201 000 cm ; l) 22 000 mm ; m) 4 000 mm ; n) 400 mm ; o) 72 m ; p) 72 dm ; r) 720 cm ; s) 7 200 dm 42 000 mm.

R. Avem : a) 3 km$=$(3 · 1 000) m$=$3 000 m ; b) 2 hm $=$ (2 · 100) m $=$ $=$200 m ; c) 500 dm$=$(500 : 10) m$=$50 m ; d) 23 000 cm$=$(23 000 : 100) m$=$ $=$ 230 m ; e) 420 cm $=$ (420 : 100) m nu se exprimă prin număr natural ; f) 2 000 m ; g) 30 m ; h) 4 000 m ; i) 3 000 m ; j) 40 m ; k) 2 010 m ; l) 22 m ; m) 4 m ; n) nu se exprimă prin număr natural ; o) 72 m ; p) nu se exprimă prin număr natural ; r) idem ; s) 762 m.

II.4. Găsiți numărul de șorțulețe ce se pot confecționa din 7 m și 50 cm de pînză știind că : la un șorțuleț sînt necesari 7 dm și 5 cm.

Dar dacă sînt necesari numai 7 dm? Dar dacă sînt necesari 65 cm?

R. 7 m și 50 cm înseamnă 700 cm $+$ 50 cm adică 750 cm, 7 dm și 5 cm înseamnă 70 cm $+$ 5 cm $=$ 75 cm.

Deci obținem 750 : 75 $=$ 10 șorțulețe.

În cazul cînd se folosesc 7 dm adică 70 cm, împărțirea este cu rest :

$$\begin{array}{l} 750 : 70 = 10 \\ \underline{70} \\ 50 \\ \underline{0} \\ 50 \end{array}$$

Deci obţinem tot 10 şorţuleţe dar mai rămîne o bucată de 50 cm.

În ultima situaţie obţinem 11 şorţuleţe şi, ca rest, o bucată de 35 cm.

II.5$^{\mathrm{PP}}$. Un croitor are o bucată de stofă de 60 m din care taie în fiecare zi cîte o bucată de 6 m.

În cîte zile realizează croitorul tăieturile respective?

R. Sîntem tentaţi ca, la prima vedere, să spunem că tăieturile se relizează în 10 zile pentru că $60 : 6 = 10$.

O analiză mai atentă ne conduce la faptul că se realizează 10 bucăţi de cîte 6 m ($6 \cdot 10 = 60$), dar aceste bucăţi se obţin numai prin 9 tăieturi.

Aşadar, croitorul realizează tăieturile numai în 9 zile.

Comentariu. O altă problemă de aceeaşi natură care poate „păcăli" rezolvitorul este următoarea: un gard se realizează din 10 panouri care trebuie susţinute de stîlpi. Dacă se cere numărul de stîlpi necesari, un răspuns grăbit ar fi: 10 stîlpi. Cercetăm cu atenţie schiţa din desen

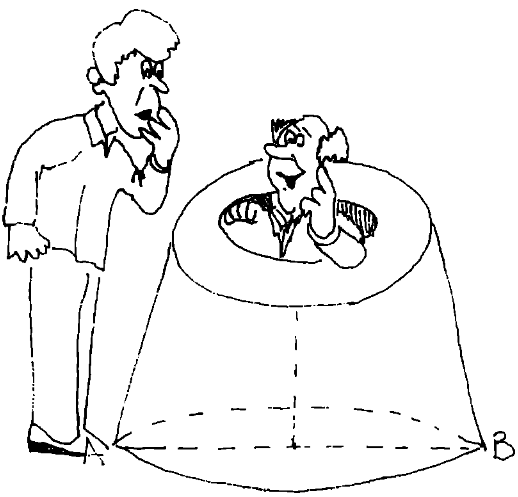
şi constatăm că sînt 11 stîlpi, datorită capetelor.

II.6. Un croitor are o bucată de stofă de 70 m din care taie în fiecare zi cîte două bucăţi de cîte 7 m. În cîte zile realizează croitorul tăieturile respective?

R. Tăieturile sînt realizate în patru zile.

II.7. a) Un melc trebuie să urce o stîncă înaltă de 14 metri. Ziua urcă 6 m, iar noaptea alunecă (în jos) 4 metri. În cîte zile va ajunge deasupra? b) Dar dacă stînca are 16 metri?

R. a) Este clar că pe o perioadă de o zi şi o noapte el urcă cîte 6 m — 4 m adică cîte 2 m. Este clar, de asemenea, că ultima dată urcă o porţiune de maxim 6 m şi nu mai alunecă în jos căci a ajuns în vîrful stîncii. Pentru aceasta să realizăm o schiţă de desen ca în figură.



Se constată că se scurge o perioadă de timp formată din 4 zile (o zi şi o noapte) şi încă o zi. Deci: cinci zile.

b) şase zile.

II.8. Aflați în metri, folosind numere naturale, perimetrul unui pătrat la care măsura laturii este:

a) 250 dm; b) 42 hm; c) 500 mm; d) 83 m; e) 4 dam; f) 52 hm; g) 3 km; h) 1 200 dm; i) 250 mm; j) 250 cm; k) 250 dm; l) 3 km și 2 m; m) 25 hm și 150 cm.

R. Se știe că perimetrul pătratului se calculează astfel: $P = 4 \cdot$ lungimea laturii.

Putem calcula perimetrul ori folosind unitățile date și, în final, transformînd rezultatul în metri, ori transformînd de la început, dacă este posibil în metri, folosind numere naturale, și apoi executînd calculul.

Avem:

a) $P = 4 \cdot 250$ dm $= 1\,000$ dm $= 100$ m;

b) 42 hm $= 4\,200$ m și $P = 4 \cdot 4\,200$ m $= 16\,800$ m;

c) $P = 4 \cdot 500$ mm $= 2\,000$ mm $= 2$ m;

d) 332 m; e) 160 m; f) 20 800 m; g) 12 000 m; h) 480 m; i) 1 m; j) 10 m; k) 100 m; l) 12 008 m; m) 10 006 m.

II.9. Aflați în milimetri perimetrul unui dreptunghi știind că lungimea (L) și lățimea (l) au următoarele măsuri:

a) $L = 23$ dam, $l = 15$ cm; b) $L = 10$ km, $l = 42$ hm; c) $L = 20$ m, $l = 15$ m; d) $L = 7$ m, $l = 20$ dm; e) $L = 8$ dm, $l = 8$ cm; f) $L = 18$ dam, $l = 170$ m; g) $L = 5$ hm, $l = 50$ m; h) $L = 1$ km, $l = 420$ m.

R. Perimetrul se calculează după formula:

$$P = 2 \cdot L + 2 \cdot l$$

sau:

$$P = 2 \cdot (L + l),$$

adică P este dublul semiperimetrului.

Putem calcula perimetrul ori folosind unitățile date și, în final, transformînd în milimetri, ori transformînd de la început în milimetri și apoi executînd calculul.

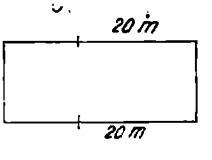
Avem:

a) $P = 2 \cdot 23$ dam $+ 2 \cdot 15$ cm $= 46$ dam$+30$ cm $= 460\,000$ mm$+ 300$ mm $= 460\,300$ mm;

b) $L = 10$ km $= 10\,000\,000$ mm; $l = 42$ hm $= 4\,200\,000$ mm;
$P = 2 \cdot (10\,000\,000$ mm $+ 4\,200\,000$ mm$) = 28\,400\,000$ mm;

c) 70 000 mm; d) 18 000 mm; e) 1 760 mm; f) 700 000 mm; g) 1 100 000 mm; h) 2 840 000 mm.

II.10[PP]. Lungimea unui teren în formă de dreptunghi este cu 20 m mai mare decît lățimea. Perimetrul terenului este de 100 m. Calculați dimensiunile terenului.



R. Urmărind desenul, vom constata că lungimea dreptunghiului este egală cu 20 m la care se adaugă lățimea lui. Așadar, tot perimetrul este format din patru segmente cu lungimea cît lățimea dreptunghiului și încă două de cîte 20 m.

Deci numărul $100 - 2 \cdot 20 = 100 - 40 = 60$ m* reprezintă patru lățimi.

Rezultă că lățimea este de $60 : 4 = 15$ m, iar lungimea de 15 m $+ 20$ m $= 35$ m.

Verificare. $2 \cdot 35 + 2 \cdot 15 = 70 + 30 = 100$ m.

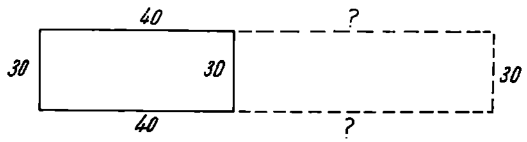
II.11. Lungimea unui teren în formă de dreptunghi este cu 32 m mai mare ca lățimea. Perimetrul terenului este de 124 m. Aflați dimensiunile terenului.

R. Dimensiunile sînt: 15 m; 47 m.

II.12. Lățimea unui teren în formă de dreptunghi este cu 30 m mai mică decît lungimea. Perimetrul terenului este de 100 m. Care sînt dimensiunile terenului?

R. Dimensiunile terenului sînt: 10 m; 40 m.

II.13$^{\text{pr}}$. Un dreptunghi are dimensiunile de 40 cm și 30 cm. Aflați numărul cu care trebuie să mărim lungimea dreptunghiului pentru ca dreptunghiul obținut să aibă perimetrul de 240 cm.



R. Urmărind desenul, constatăm că perimetrul dreptunghiului dat este:

$$2 \cdot 40 + 2 \cdot 30 = 80 + 60 = 140 \text{ cm}.$$

Noul dreptunghi nu are decît lungimea modificată față de primul. Această modificare intră de două ori în perimetrul noului dreptunghi care este dat de 240 cm. Diferența dintre perimetre este de 240 cm $-$ 140 cm $=$ 100 cm.

Deci mărim lungimea cu:

$$100 \text{ cm} : 2 = 50 \text{ cm}.$$

II.14. Un dreptunghi are lungimea de 43 cm, iar lățimea de 17 cm. Cu cît trebuie mărită lungimea dreptunghiului astfel încît să obținem un nou dreptunghi cu perimetrul de 240 cm?

R. Trebuie să mărim cu 60 cm.

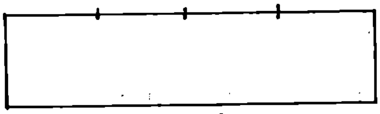
II.15. Cu cît trebuie mărită lățimea unui dreptunghi cu dimensiunile de 10 cm și 30 cm pentru ca noul dreptunghi să aibă perimetrul de 90 cm?

R. Trebuie să mărim cu 5 cm.

II.16$^{\text{po}}$. O latură a unui dreptunghi are măsura de 4 ori mai mare decît a celeilalte. Calculați măsurile laturilor în cazul cînd perimetrul dreptunghiului este: a) 650 cm; b) 100 m; c) 3 420 hm.

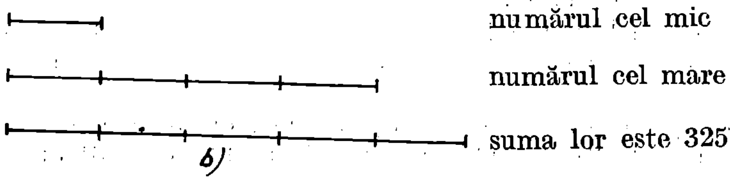
* Egalitatea este incorectă dar o adoptăm pentru simplifificarea scrierii: nu putem confunda un număr cu un etalon.

R. După cum știm, dreptunghiul are două cîte două laturile cu măsurile egale. Mai știm că dacă într-o problemă este dat perimetrul unui dreptunghi, putem găsi și semiperimetrul său, adică jumătate din perimetru. În cazul nostru, el este 650 cm : :2 = 325 cm. Acesta este suma măsurilor a două din laturile dreptunghiului. În acest moment problema se poate transforma în următoarea : un număr este de 4 ori mai mare decît altul; găsiți cele două numere în cazul cînd suma lor este 325.



a)

În figura b) avem ilustrată problema prin metoda grafică.



b)

Metoda ne conduce la următoarea observație : suma lor este formată din 5 numere mici. Deci numărul mic (care pentru noi reprezintă măsura lățimii) este 325 : 5, adică 65, iar numărul cel mare (care reprezintă măsura lățimii) este 65 · 4, adică 260.

Așadar, măsurile laturilor sînt : 65 cm ; 260 cm ; 65 cm ; 260 cm.

Verificare. 65 cm + 260 cm + 65 cm + 260 cm = 650 cm.

Avem, în continuare :

b) 10 m ; 40 m ; 10 m ; 40 m.

c) 342 hm, 1368 hm ; 342 hm ; 1368 hm.

II.17. Aflați, în metri, perimetrul unui triunghi cu laturile de :

a) 3 m, 4 m, 5 m ; b) 3 m, 40 dm, 5 m ; c) 300 cm ; 40 dm ; 5 000 mm ; d) de 5 ori mai mari ca la punctul a) ; e) de 10 ori mai mari ca la punctul a) ; f) 3 dam ; 4 dam ; 5 dam ; g) de 1 000 ori mai mari ca la punctul a) ; h) 3 km ; 4 km, 5 km.

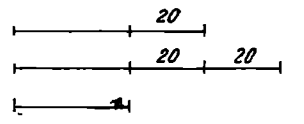
R. Avem : a) $P = 3\text{ m} + 4\text{ m} + 5\text{ m} = 12\text{ m}$; b) Deoarece $40\text{ dm} = 4\text{ m}$, rezultă $P = 12\text{ m}$; c) Deoarece $300\text{ cm} = 3\text{ m}$; $40\text{ dm} = 4\text{ m}$, iar $5\,000\text{ mm} = 5\text{ m}$, rezultă $P = 12\text{ m}$; d) $P = 5 \cdot 12\text{ m} = 60\text{ m}$; e) $P = 10 \cdot 12\text{ m} = 120\text{ m}$; f) $P = 120\text{ m}$; g) $P = 1\,000 \cdot 12\text{ m} = 12\,000\text{ m}$; h) $P = 12\text{ km} = 12\,000\text{ m}$.

II.18[ro]. Măsura unei laturi a unui triunghi este cu 20 cm mai mică și respectiv cu 20 cm mai mare decît măsurile celorlalte două laturi. Calculați măsurile celor trei laturi ale triunghiului știind că perimetrul triunghiului este de:

a) 510 cm ; b) 360 cm ; c) 960 cm ; d) 3 060 cm.

15 — c. 350

R. a) Folosim metoda grafică.



Se constată că una din laturi are măsura cea mai mică. Textul problemei poate fi tradus și astfel: una din laturi are măsura cea mai mică, alta are măsura cu 20 cm mai mare decît aceea cu măsura mică și ultima, adică cea cu măsura cea mai mare, are măsura cu 20 cm mai mare decît precedenta. Așa fiind, se observă că perimetrul este format din trei măsuri egale cu măsura celei mai mici plus 60 cm.

Deci latura cea mică are măsura de $(510 - 60) : 3 = 150$ cm, iar celelalte au 170 cm și 190 cm.

Avem, în continuare:

b) 100; 120, 140; c) 300; 320; 340; d) 1 000; 1 020; 1 040.

II.19. Transformați în grame, exprimînd rezultatul prin număr natural:

a) 25 dag; b) 31 kg; c) 4 q; d) 3t 2 kg; e) 251 000 cg; f) 250 cg; g) 4 q 2 000 mg; h) 2 dag; i) 25 hg; j) 41 kg; k) 25 q; l) 31 t; m) 20 dg; n) 400 cg; o) 140 000 mg; p) 17 g; r) 215 dg; s) 140 mg; ș) 4 kg 3 500 dg 10 000 mg; t) 3 t 3 000 mg.

R. Avem: a) 25 dag $= (25 \cdot 10)$g $= 250$ g; b) 31 kg $= (31 \cdot 1\,000)$g $=$ $= 31\,000$ g; c) 4 q$=(4 \cdot 100\,000)$g$=4 \cdot 10^5$ g; d) 3 t 2 kg $= (3 \cdot 1\,000\,000)$g$+$ $+ (2 \cdot 1\,000)$ g $= (3\,000\,000 + 2\,000)$ g $= 3\,002\,000$ g; e) 251 000 cg $=$ $= (251\,000 : 100)$g $= 2\,510$ g; f) 250 cg $= (250 : 100)$ g, nu se exprimă prin număr natural; g) 4 q 2 000 mg $= (4 \cdot 100\,000)$g $+ (2\,000 : 1\,000)$g $=$ $= 400\,002$ g; h) 20 g; i) 2 500 g; j) 41 000 g; k) 2 500 000 g; l) 31 000 000 g; m) 2 g; n) 4 g; o) 140 g; p) 17 g; r) nu se exprimă prin număr natural; s) idem; ș) 4 360 g; t) 3 000 003 g.

II.20. În exercițiile următoare, dați răspunsurile folosind puterile de exponent natural ale lui 10:

a) 451 km = ? m = ? cm = ? mm;

b) 25 dam = ? dm = ? mm;

c) 120 hm = ? m = ? dm = ? cm;

d) 25 kg = ? hg = ? dag = ? g = ? cg = ? mg;

e) 15 kg = ? dag = ? cg = ? mg;

f) 1204 t = ? kg = ? g;

g) 430 q = ? kg = ? dag = ? mg.

R. Avem: a) 451 km $= 451\,000$ m $= 45\,100\,000$ cm $= 451\,000\,000$ mm, deci 451 km $= 451 \cdot 10^3$ m $= 451 \cdot 10^5$ cm $= 451 \cdot 10^6$ mm; b) 25 dam $=$ $= 25 \cdot 10^2$ dm $= 25 \cdot 10^4$ mm; c) 120 hm $= 12 \cdot 10^3$ m $= 12 \cdot 10^4$ dm $=$ $= 12 \cdot 10^5$ cm; d) 25 kg $= 25 \cdot 10$ hg $= 25 \cdot 10^2$ dag $= 25 \cdot 10^3$ g $=$ $= 25 \cdot 10^5$ cg $= 25 \cdot 10^6$ mg; e) 15 kg $= 15 \cdot 10^2$ dag $= 15 \cdot 10^5$ cg $=$ $= 15 \cdot 10^3$ mg; f) 1 204 t $= 1\,204 \cdot 10^3$ kg $= 1\,204 \cdot 10^6$ g; g) 430 q $=$ $= 43 \cdot 10^3$ kg $= 43 \cdot 10^5$ dag $= 43 \cdot 10^9$ mg.

II.21. O porțiune de pășune, de formă dreptunghiulară cu dimensiunile 550 m și 400 m, este împrejmuită cu trei rînduri de sîrmă ghimpată ca să nu poată ieși animalele.

Cîte grame are 1 m de sîrmă ghimpată dacă pentru împrejmuire sînt necesare 798 kg sîrmă?

R. Aflăm cît este perimetrul pășunei. Fie P perimetrul și L, l lungimile laturilor dreptunghiului. Avem $P = 2 \cdot (L + l)$ deci $P = 2 \cdot (550 + 400)\text{m} = 1\,900$ m.

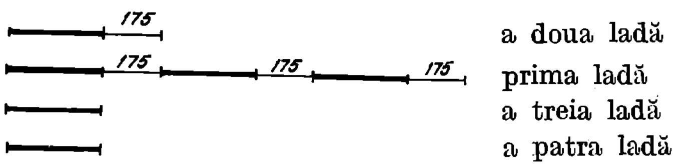
Aflăm cît este lungimea sîrmei. Aceasta este : $1\,900\,\text{m} \cdot 3 = 5\,700$ m.

Dacă 5 700 m de sîrmă au masa de 798 kg adică de 798 000 g, atunci 1 m de sîrmă va avea masa de 5 700 ori mai mică adică $798\,000\,\text{g} : 5\,700 = 140$ g.

Deci 1 m sîrmă are 140 grame.

II.22$^{\text{PO}}$. În patru lăzi pentru cereale se află 12 q 40 kg făină. În prima ladă este de trei ori mai multă făină decît în a doua. În a patra ladă se află tot atîta făină cît și în a treia. Aflați cantitatea de făină din fiecare ladă dacă în a treia ladă este mai puțină făină decît în a doua cu : a) 175 kg; b) 160 kg; c) 40 kg.

R. Folosim metoda grafică :



Constatăm că toată cantitatea de 12 q 40 kg, adică de 1 240 kg poate fi exprimată și astfel : de 6 ori cantitatea din lada a treia (sau a patra) adunată cu $4 \cdot 175$ kg.

Deci, de 6 ori cantitatea din lada a treia este 1 240 kg — 700 kg, adică 540 kg.

Așadar, cantitatea din lada a treia (sau a patra) este de 540 kg :6, adică 90 kg. Avem deci :

în lada a patra : 90 kg,

în lada a treia: 90 kg,

în lada a doua: 90 kg + 175 kg = 265 kg,

în prima ladă: $265\text{ kg} \cdot 3 = 795$ kg.

Verificare : $90 + 90 + 265 + 795 = 1\,240$.

b) Prima ladă are 780 kg, a doua ladă are 260 kg, iar celelalte au cîte 100 kg.

c) Cantitățile sînt : 660 kg; 220 kg; 180 kg; 180 kg.

II.23. Exprimați în minute : a) 24 ore; b) 2 zile; c) 4 ore 180 secunde; d) 14 ore 29 minute; e) 4 zile 5 minute 3 600 secunde; f) 5 ore; g) 5 zile; i) 105 zile 54 ore 295 minute 720 secunde.

R. Avem : a) 24 ore $= (24 \cdot 60)$ minute $= 1\,440$ minute; b) 2 zile $= (2 \cdot 24)$ ore $= (2 \cdot 24 \cdot 60)$ minute $= 2\,880$ minute; c) 4 ore 180 secunde =

$= (4 \cdot 60)$ minute $+ (180 : 60)$ minute $= 243$ minute; d) 869 minute; e) 5825 minute; f) 300 minute; g) 7200 minute; i) 154747 minute.

II.24. a) Un ceas pe perioada de o zi și 12 ore, a mers înainte cu 2 minute și 40 secunde. Cu cît va înainta în trei zile?

b) Un ceas întîrzie pe oră cu 2 minute și 4 secunde. Cu cît va întîrzia în 2 zile și 12 ore?

Observație. În ambele situații se presupune că ceasul a mers continuu.

R. a) O zi și 12 ore este jumătate din perioada de 3 zile. Deci ceasul va înainta cu un timp dublu: (2 minute și 40 secunde) $\cdot 2 = 4$ minute și 80 secunde $= 5$ minute și 20 secunde;

b) Ceasul va întîrzia cu 124 minute $= 2$ ore și 4 minute.

II.25. Un muncitor începe o lucrare la ora 8 dimineața și o termină la 12 h și 30 minute. La ce oră va fi gata lucrarea dacă la efectuarea ei participă 9 muncitori avînd aceeași normă? Dar dacă participă numai 6 muncitori?

R. De la 8 h la 12 h 30 minute sînt 4 ore și 30 minute; în total sînt $60 \cdot 4 + 30 = 270$ minute.

Deci un singur muncitor termină lucrarea în 270 minute. Un număr de 9 muncitori, lucrînd la fel, vor termina aceeași lucrare într-un timp de 9 ori mai mic, deci în 270 minute : $9 = 30$ minute. Dacă încep să lucreze cei nouă muncitori, toți, la ora 8, atunci lucrarea se termină la 8 h 30 min.

În situația a doua, lucrarea se termină la 8 h 45 minute.

II.26[M]**.** Într-o școală se află 370 elevi în clasele I—IV. Să se arate că printre elevii acestei școli se află neapărat cel puțin 2 elevi care-și serbează ziua de naștere în aceeași zi.

R. Cuvintele „cel puțin 2 elevi...” se mai traduc și astfel: „există măcar 2 elevi...”.

Aceasta înseamnă că proprietatea respectivă poate fi îndeplinită, tot atît de bine, nu numai de 2 elevi, ci și de 3 elevi, de 4 elevi, de 5 elevi și chiar ar putea fi posibil îndeplinită (teoretic) de toți cei 370 de elevi ai școlii, situație care nu se prea întîmplă însă în realitate.

Dar este posibil totuși ca în fiecare zi a anului să-și serbeze ziua de naștere cîte un singur elev. Cum anul are 365 de zile sau 366 de zile și școala are 370 de elevi, neapărat cel puțin 2 elevi își serbează ziua de naștere în aceeași zi.

II.27. Primul cosmonaut care a făcut primul zbor cosmic din istorie a fost Juri Gagarin. La data de 12 aprilie 1961 a efectuat la bordul navei *Vostok* un tur în jurul Pămîntului.

Prima aselenizare a unui echipaj uman a avut loc la 20 iulie 1969, cînd NEIL ARMSTRONG și EDWIN ALDRIN — lansați împreună cu MICHAEL COLLINS în 16 iulie 1969, la bordul navei cosmice *Apollo 11* — coboară pe solul selenar pentru 21 ore și 36 minute (dintre care 2 ore și 24 minute petrecute în afara navei).

Primul cosmonaut român, DUMITRU PRUNARIU, a efectuat un zbor de 7 zile 20 ore și 41 minute la bordul complexului orbital *Saliut 6 — Soiuz 40*, între 14 și 22 mai 1981.

Aflați cîți ani, cîte luni și cîte zile au trecut:

a) de la primul zbor cosmic pînă la prima aselenizare;

b) de la primul zbor cosmic pînă la zborul unui cosmonaut român.

Observație. Considerăm luna de 30 de zile.

R. a) Aflăm cîți ani, cîte luni și cîte zile au trecut de la primul zbor cosmic pînă la prima aselenizare, în perioada: 12 aprilie 1961—20 iulie 1969. În 1961, în luna aprilie, sînt 18 zile, pînă la sfîrșitul lunii; din 1961, pînă la sfîrșitul anului, sînt 8 luni; între 1961 și 1969 sînt 7 ani; în 1969, pînă în iulie sînt 6 luni; în 1969, în luna iulie, pînă la data aselenizării sînt 20 de zile. În total au trecut 7 ani și 14 luni $(8 + 6 = 14)$ și 28 zile $(18 + 20 = 38)$, adică 8 ani 3 luni și 8 zile.

b) Aflăm cîți ani, cîte luni și cîte zile au trecut de la primul zbor cosmic pînă la zborul unui cosmonaut român, în perioada: 12 aprilie 1961—14 mai 1981. În 1961, în luna aprilie, sînt 18 zile; în 1961, pînă la sfîrșitul anului, sînt 8 luni; între 1961 și 1981 sînt 19 ani; în anul 1981, pînă în luna mai, sînt 4 luni; în luna mai sînt 14 zile.

În total, au trecut 19 ani 12 luni 32 de zile adică 20 ani, 1 lună și 2 zile, de la primul zbor cosmic pînă la zborul cosmonautului român.

II.28. Cînd eu aveam 12 ani, fratele meu avea 2 ani. Acum avem împreună 56 ani. Cîți ani avem fiecare?

R. Constatăm că în problemă se vorbește la timpul trecut și la cel prezent. Faptul că este folosit cuvîntul „împreună" trebuie tradus din punct de vedere matematic prin cuvîntul „adunare" sau prin „sumă". În trecut, vîrsta celor doi împreună, adică suma celor două vîrste era: $12 + 2 = 14$. Perioada din trecut pînă în prezent a fost aceeași pentru fiecare persoană. Totuși, folosindu-se cuvîntul „împreună", vom considera dublul acestei perioade care, bineînțeles, adunîndu-se la cei 14 ani, se obține numărul 56.

Așadar, diferența $56 - 14 = 42$ reprezintă tocmai dublul perioadei scurse între trecut și prezent.

Rezultă că din trecut pînă în prezent au fost 42 ani : 2 = 21 ani. Deci vîrstele sînt: 12 ani + 21 ani = 33 ani și, respectiv, 2 ani + 21 ani = 23 ani.

Verificare. 33 ani + 23 ani = 56 ani.

II.29. Cînd eu aveam vîrsta de 10 ani, fratele meu avea 7 ani. Acum avem împreună 45 ani. Calculați vîrsta fiecăruia.

R. Cele două persoane au 24 de ani, respectiv 21 de ani.

II.30. Cînd eu aveam 5 ani, sora mea avea 9 ani. Acum avem împreună 40 de ani. Care este vîrsta fiecăruia?

R. Cele două persoane au 18 ani, respectiv 22 de ani.

II.31. Aflați vîrsta tatălui meu dacă cu 5 ani în urmă am fost de 6 ori mai tînăr decît tatăl meu iar acum am:

a) 12 ani; b) 11 ani; c) 10 ani.

R. a) Aflăm vîrsta de acum 5 ani a copilului. Ea era de 12 ani—5 ani=7 ani. Atunci vîrsta tatălui era de $6 \cdot 7$ ani adică de 42 de ani. Așadar, vîrsta de acum a tatălui este 42 ani + 5 ani = 47 ani.

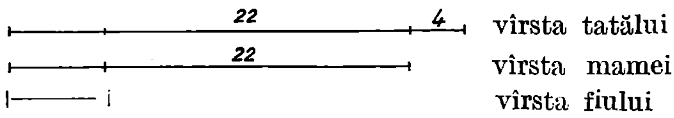
Avem, în continuare:

b) 41 ani; c) 35 ani.

II.32. Tatăl, mama și fiul au împreună 90 de ani. Aflați vîrsta fiecăruia dacă tatăl este mai în vîrstă decît mama cu 4 ani, iar mama este mai în vîrstă decît fiul cu :

a) 22 de ani ; b) 19 de ani, c) 25 de ani.

R. a) Folosim metoda grafică.



Constatăm că tatăl este mai în vîrstă ca fiul cu 22 ani + 4 ani, adică, 26 ani. Deci, de trei ori vîrsta fiului este : 90 — (26 + 22) adică 42 ani.

Vîrsta fiului este : 42 ani : 3 = 14 ani.

Vîrsta mamei este : 14 ani + 22 ani = 36 ani.

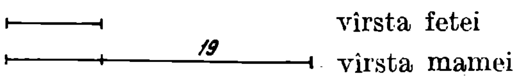
Vîrsta tatălui este : 36 ani + 4 ani = 40 ani.

Avem, în continuare :

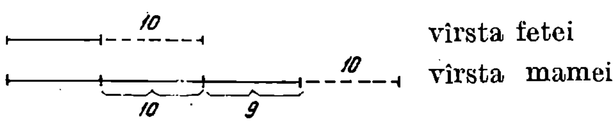
b) 16 ani ; 35 ani ; 39 ani ; c) 12 ani ; 37 ani ; 41 ani.

II.33[M]. Vîrsta unei fete este, în prezent, cu 19 ani mai mică decît vîrsta mamei sale. Peste 10 ani vîrsta mamei va fi de două ori mai mare decît vîrsta fiicei sale. Găsiți vîrsta pe care o are în prezent fiecare.

R. Apelăm la metoda grafică. Pentru prezent avem schema :



Pentru vitor, peste 10 ani, avem schema :



Datorită faptului că, peste 10 ani, vîrsta mamei va fi de două ori mai mare decît vîrsta fiicei constatăm, comparînd cele două figuri, că jumătate din această vîrstă (a mamei) este reprezentată de 10 + 9, adică 19 ani. De aici obținem că, peste 10 ani, vîrsta mamei va fi de 19 · 2, adică de 38 ani, iar vîrsta fetei (tot peste 10 ani) va fi de 19 ani. Putem acum să calculăm cele două vîrste, în prezent, scăzînd cîte 10 ani.

Deci mama are, în prezent, 38 ani — 10 ani = 28 ani, iar fiica, 19 ani — 10 ani = 9 ani.

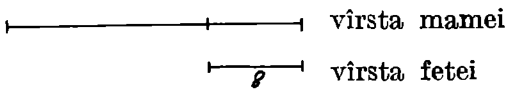
II.34. Vîrsta mamei este, acum, cu 22 de ani mai mare decît vîrsta fiicei sale.

Peste 10 ani vîrsta mamei va fi de două ori mai mare decît vîrsta fiicei sale. Găsiţi vîrsta pe care o are în prezent fiecare.

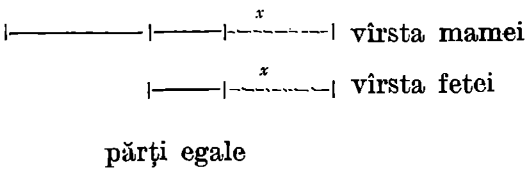
R. Mama are 34 de ani, iar fiica, 12 ani.

II.35[M;PO]**.** O fetiţă are acum 8 ani, iar mama sa, 38 de ani. Peste cîţi ani mama va avea o vîrstă de două ori mai mare decît fetiţa?

R. Folosim metoda grafică. În prezent avem schema:



Pentru viitor vom avea schema:



Pe desen s-a notat cu x numărul de ani care sînt ceruţi de problemă.

Se constată că în prezent diferenţa dintre vîrste este de 30 ani.

Se mai constată, datorită afirmaţiei că în viitor mama va avea o vîrstă de două ori mai mare, că jumătate din vîrsta mamei, din viitor, este formată din $(x + 8)$ ani, dar $x + 8 = 30$ deci $x = 22$ de ani.

Deci, peste 22 de ani se va întîmpla ce cere problema.

Verificare. Peste 22 de ani mama va avea 60 de ani, iar fiica 30 de ani, deci de două ori mai mult.

II.36. O fetiţă are acum 10 ani, iar mama sa, 30 de ani. Aflaţi peste cîţi ani fetiţa va avea o vîrstă de două ori mai mică decît mama sa.

R. Peste 10 ani, mama va avea 40 ani, iar fiica sa, 20 de ani.

II.37. În anul 1 932, nepotul a avut vîrsta cît au exprimat ultimele două cifre ale anului naşterii. Această coincidenţă i s-a întîmplat şi bunicului, adică şi el avea atunci atîţia ani cît exprimă ultimele două cifre ale anului naşterii sale. Cîţi ani avea fiecare?

R. Este exclus ca bunicul şi nepotul să aibă aceeaşi vîrstă. Mai întîi, să facem o încercare. Să presupunem că cineva s-a născut în anul 1920. Ultimele două cifre formează numărul 20. Persoana va avea 20 de ani, adică vîrsta cît exprimă ultimele două cifre ale anului naşterii, peste 20 de ani, deci în anul $1\,920 + 20$, deci în 1 940.

Această observaţie ne conduce la ideea că nepotul, în 1 932, avea 16 ani şi s-a născut în anul 1 916. Deci nepotul s-a născut în secolul XX, iar, firesc, bunicul în secolul XIX. Anul 1 932 îl scriem $1\,800 + 132$.

Bazîndu-ne pe aceeaşi observaţie, constatăm că $132 : 2 = 66$. Aşadar, bunicul este născut în 1 866 şi avea 66 de ani în 1 932.

TESTUL Nr. 4[1]

1. (4p) Transformaţi în metri:
a) 25 dam; b) 2 km; c) 2 000 cm; d) 29 hm.
2. (4p) Transformaţi în kilograme:
a) 21 t; b) 4 q; c) 2 000 g; d) 43 000 000 mg.
3. (4p) Transformaţi în centimetri:
a) 52 m; b) 2 hm; c) 192 dm; d) 1 400 mm.
4. (2p) Calculaţi perimetrul unui pătrat ştiind că măsura unei laturi, exprimată în decimetri, este de 250 dm.
5. (2p) Calculaţi perimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile de 45 m şi 30 m.
6. (2p) Calculaţi perimetrul unui triunghi, exprimîndu-l în metri, în cazul cînd măsurile laturilor sînt: 4 hm, 150 m şi respectiv 30 dam.
7. (2p) Transformaţi în minute:
a) 3 zile; b) 3 ore şi 29 minute.

Notă. Timp de lucru: 45 minute.

TESTUL Nr. 5

1. (2p) Transformaţi în decametri, exprimînd rezultatul prin numere naturale:
a) 12 km 42 dam 2 500 dm; b) 25 hm 42 m.
2. (3p) Transformaţi în milimetri, folosind eventual puteri de exponent număr natural ale lui 10: a) 25 dam; b) 3 m 2 500 cm; c) 4 km 2 hm 3 m 28 mm.
3. (3p) Transformaţi în tone, exprimînd rezultatul prin numere naturale:
a) 40 q; b) 2 t 3 500 q 2 000 g; c) 8 000 000 g.
4. (4p) Transformaţi în ore:
a) 420 minute; b) 43 200 secunde; c) 3 zile 300 minute; d) minutele lunii ianuarie.
5. (2p) Calculaţi perimetrul unei curţi dreptunghiulare cu dimensiunile de 1 hm 2 dam 1 m şi 6 dam 8 m.
6. (2p) Un avion a străbătut în 15 minute o distanţă de 55 km 800 m. Calculaţi cîţi metri a străbătut într-o secundă. Cît a străbătut într-un ceas?
7. (4p) În 4 hambare se află 10 tone 79 kg de secară. În al doilea hambar se află cu 1 q 12 kg mai puţin decît în primul, în al treilea se află cu 80 kg mai puţin decît în al doilea, iar în al patrulea cu 1 q 75 kg mai mult decît în al treilea. Calculaţi cantitatea de secară din fiecare hambar.

Notă. Timp de lucru: 90 minute.

TESTUL Nr. 6

1. (3p) Aflaţi cît cîntăreşte un tren de marfă compus din 40 de vagoane, dacă ansamblul locomotivei cîntăreşte 50 t, un vagon gol cîntăreşte 8 t 200 kg, iar marfa încărcată într-un vagon 12 t 600 kg.

[1] Răspunsurile la teste se găsesc la pagina 338.

2. (4p) Găsiţi dimensiunile unui dreptunghi, exprimate în metri prin numere naturale, cu perimetrul de 12 m.

3. (3p) Fiica are 12 ani. Peste 4 ani tatăl va fi de trei ori mai mare decît fiica. Aflaţi vîrsta tatălui.

4. (3p). Dacă frăţiorul este aşezat pe platanul unui cîntar, iar surioara pe celălalt platan, pe platanul surioarei mai punem 6 kg 400 g pentru a obţine echilibrul. Dacă amîndoi sînt aşezaţi pe acelaşi platan atunci, pentru a obţine echilibrul, trebuie să punem pe celălalt platan 20 kg. Aflaţi cît cîntăreşte fiecare copil.

5. (3 p). Cînd tatăl meu a avut 31 de ani, eu am avut 8 ani. Acum, tata este de două ori mai în vîrstă decît mine. Aflaţi cele două vîrste.

6. (4p) Un dreptunghi are lungimea de patru ori mai mare decît lăţimea. Un alt dreptunghi are lungimea de două ori mai mare decît lungimea dreptunghiului anterior, iar lăţimea de trei ori mai mare decît lăţimea dreptunghiului anterior.

Calculaţi măsurile laturilor dreptunghiurilor respective, ştiind că perimetrul celui de-al doilea dreptunghi este de 220 m.

Notă. Timp de lucru : 2 ore.

CAPITOLUL III

UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCULE

Mulțimi. Calcule cu ajutorul literelor. Propoziții. Ecuații. Inecuații.

§1. Mulțimi

În acest capitol vor fi folosite, printre altele, și următoarele cunoștințe:

a) Orice *mulțime* este formată din *elemente.*

b) Enumerarea elementelor în scris se face folosind acolade. Exemplu: $\{0; 2; 3\}$. Se citește: „mulțimea care are elementele 0, 2, 3".

c) Într-o mulțime orice element apare o singură dată.

d) O mulțime mai poate fi dată prin indicarea unei proprietăți caracteristice a tuturor elementelor sale. Exemplu:

$A = \{x | x$ este număr natural mai mic decît $3\}$. Se citește: „A este mulțimea formată din elemente notate, fiecare cu x, care au proprietatea că: x este număr natural mai mic decît 3".

e) Pentru a scrie că un element aparține unei mulțimi se folosește semnul „$\in$" care se citește „aparține".

f) Pentru a scrie că un element nu aparține unei mulțimi se folosește semnul „$\notin$" care se citește „nu aparține".

g) Pentru a scrie că o mulțime este o submulțime a unei mulțimi se folosește unul din semnele: „$\subseteq$" sau „$\subset$", care se citește „este inclusă" sau „este strict inclusă".

h) Două mulțimi sînt egale dacă au aceleași elemente.

i) Semnul pentru mulțimea vidă este Φ și nu $\{\Phi\}$.

j) $A \cup B = \{x | x \in A$ sau $x \in B\}$.

k) $A \cap B = \{x | x \in A$ și $x \in B\}$.

l) Dacă $A \cap B = \Phi$ mulțimile se numesc disjuncte.

m) $A - B = \{x | x \in A$ și $x \notin B\}$.

n) Valoarea logică a unei propoziții p este sau adevărul sau falsul. Se notează $v(p) = 1$, dacă p este adevărată, și $v(p) = 0$, dacă p este falsă.

o) O submulțime a mulțimii în care ia valori variabila unei propoziții cu variabilă (predicat), pentru care se obțin propoziții adevărate se numește mulțimea de adevăr sau mulțime de soluții.

p) Ecuațiile și inecuațiile sînt propoziții cu variabile.

III.1. Enumerați elementele următoarelor mulțimi : a) mulțimea formată din primele trei consoane ale alfabetului român ; b) mulțimea formată din patru orașe românești care au inițiala B ; c) mulțimea formată din zilele unei săptămîni ; d) mulțimea de numere naturale strict mai mici ca 10 ; e) mulțimea de numere naturale strict mai mari ca 3 și strict mai mici ca 7.

R. Mulțimile date sînt formate din elementele : a) b, c, d ; b) București, Buzău, Bacău, Buftea, sau București, Buzău, Brașov, Brăila ; c) luni, marți, miercuri, joi, vineri, sîmbătă, duminică ; d) 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; . . . ;8 ; 9 ; e) 4 ; 5 ; 6.

III.2. Arătați pentru fiecare din elementele 2 ; a ; 5 ; x în ce relație este el cu mulțimea $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

R. Avem relațiile $2 \in A$; $a \notin A$; $5 \in A$, $x \notin A$, dacă lui a și x nu le sînt atribuite oricare din valorile 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

III.3. Enumerați mulțimile scrise corect dintre cele care urmează :

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\}$, $B = \{a;\ b;\ a\}$, $C = \{\Delta;\ 5;\ a;\ 5\}$, $D = \{1;\ 1;\ 1\}$, $E = \{\Delta;\ 7;\ \square;\ 8;\ 10\}$.

De ce?

R. În scrierea elementelor unei mulțimi orice element apare scris o singură dată. Deci corect sînt scrise A și E.

III.4. Enumerați elementele mulțimilor : $A = \{x | x$ este literă cu care este scris cuvîntul ,,matematică''$\}$, $B = \{x | x$ este cifră cu care este scris numărul 234 002 539$\}$, $C = \{x | x$ este capitală a R.S.R.$\}$, $D = \{x | x$ este vocală care apare în cuvîntul ,,stadion''$\}$.

R. Rezultă $A = \{m;\ a;\ t;\ e;\ i;\ c;\ ă\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 0;\ 5;\ 9\}$, $C = \{$București$\}$, $D = \{a;\ i;\ o\}$.

III.5. Se dau mulțimile :

$A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{8\}$, $C = \{\Delta;\ 2\}$ $D = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul ,,mama''$\}$, $E = \{x | x$ satelit artificial al pămîntului, lansat înainte de 1 mai 1 800$\}$, $F = \{x | x$ este cifră cu care este scris 10 000$\}$.

Indicați mulțimile cu două elemente, apoi cu un singur element și apoi mulțimea vidă.

R. Mulțimile C, D și $F = \{1;\ 0\}$ sînt mulțimi cu două elemente ; B este mulțime cu un singur element, iar $E = \Phi$.

III.6. Se dau mulțimile :

$M_1 = \{$Iași, Cluj, Vaslui$\}$, $M_2 = \{$Iași, c, $m\}$, $M_3 = \{$Cluj, Iași, $v\}$, $M_4 = \{a$, m, pat, 8$\}$, $M_5 = \{a$, m, Iași$\}$, $M_6 = \{m$, cerc, a, pat$\}$, $M_7 = \{$Iași, Vaslui, Cluj$\}$.

a) Indicați mulțimile care au aceleași elemente ; b) Scrieți trei elemente care aparțin mulțimii M_4 și apoi trei care nu aparțin lui M_4 ; c) Scrieți două elemente ce aparțin mulțimii M_5 și care aparțin mulțimii M_6 ; d) Scrieți un element care aparține mulțimii M_5 dar nu aparține mulțimii M_1 ; e) Enumerați elementele mulțimii $\{x | x \in M_3$ și $x \notin M_5\}$; f) Scrieți elementele care aparțin mulțimii M_4 sau care aparțin mulțimii M_2.

R. Răspunsurile sînt : a) M_1 și M_7 ; b) $a \in M_4$, $m \in M_4$, pat $\in M_4$; Iași $\notin M_4$, $200 \notin M_4$, $t \notin M_4$; c) a ; m ; d) sau a sau m ; e) $\{$Cluj ; $v\}$; f) a, m, pat, 8, Iași, c.

III.7. Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x < 5\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x \leqslant 3\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x \leqslant 1\}$, $D = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x > 2$ și $x \leqslant 7\}$, $E = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x \geqslant 9\,009$ $x < 9\,012\}$, $F = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x > 2$ și $x \leqslant 2\}$, $G = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x \geqslant 9$ și $x \leqslant 13$ și x este scris cu două cifre$\}$, $H = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $x < 100$ și x este scris cu trei cifre$\}$.

R. Răpunsurile sînt: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$, $C = \{0; 1\}$, $D = \{3; 4; 5; 6; 7\}$, $E = \{9\,009; 9\,010; 9\,011\}$, $F = \Phi$, $G = \{10; 11; 12; 13\}$, $H = \Phi$.

III.8. Se dau mulțimile:

$A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1\}$, Φ, $C = \{2\}$, $D = \{1; 3\}$, $E = \{1; 4\}$, $F = \{2; 1\}$, $G = \{5\}$, $H = \{5; 1\}$, $L = \{3\}$.

Care dintre aceste mulțimi sînt submulțimi (părți) ale mulțimii A?

R. Părți ale mulțimii A sînt: A, B, Φ, C, D, F, L.

III.9. Scrieți toate submulțimile mulțimii:

a) $M = \{1; 2\}$; b) $P = \{5\}$; c) $S = \{1; m; 3\}$.

R. Avem: a) Φ, $\{1\}$, $\{2\}$, M; b) Φ, $\{5\}$; c) Φ, $\{1\}$, $\{m\}$, $\{3\}$, $\{1; m\}$, $\{1; 3\}$, $\{m; 3\}$, S.

III.10. Se numește *submulțime proprie* a unei mulțimi, o submulțime diferită de mulțimea vidă și de mulțimea însăși.

Scrieți submulțimile proprii ale mulțimii:

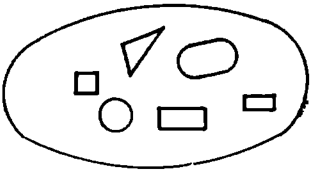
a) $\{3; 1; 7\}$; b) $\{1\}$; c) $\{1; 5\}$.

R. Avem: a) $\{3\}$, $\{1\}$, $\{7\}$, $\{3; 1\}$, $\{3; 7\}$, $\{1; 7\}$; b) singurele submulțimi ale mulțimii $\{1\}$ sînt: Φ și $\{1\}$. Deci, $\{1\}$ nu are submulțimi proprii.

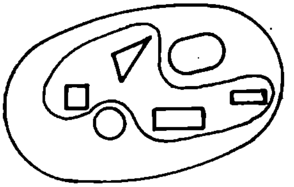
Submulțimile unei mulțimi care nu sînt proprii se mai numesc *submulțimi improprii*.

c) $\{1\}$, $\{5\}$.

III.11. În desenul alăturat, puneți în evidență, folosind o diagramă, mulțimea de figuri geometrice care nu sînt rotunde.



R. Avem figura:



III.12. Se dau mulțimile $A = \{2; 3; 4\}$ și $B = \{x; 2\}$. Găsiți x astfel ca $B \subseteq A$.

R. Sînt două situații: a) $x = 3$ și avem $B = \{3, 2\}$ sau: b) $x = 4$ și avem $B = \{4; 2\}$.

III.13PO. Găsiți mulțimea E știind că:

a) $\{1; 2; 3; 4\} \subseteq E$ și $\{3; 4; 5; 6\} \subseteq E$ și $E \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

b) $\{2; 5; 6\} \subseteq E$ și $\{5; 7\} \subseteq E$ și $E \subseteq \{2; 5; 6; 7\}$.

R. a) Relația $\{1; 2; 3; 4\} \subseteq E$ se mai traduce astfel: $1 \in E$, $2 \in E$, $3 \in E$, $4 \in E$.

Relația $\{3; 4; 5; 6\} \subseteq E$ se mai traduce astfel: $3 \in E$, $4 \in E$, $5 \in E$, $6 \in E$. Rezultă că printre elementele lui E se află: $1; 2; 3; 4; 5; 6$.

Ultima relație $E \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ne arată faptul că fiecare element ce aparține lui E, aparține mulțimii $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Constatăm că mulțimea $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ este formată din aceleași elemente pe care le-am găsit că aparțin mulțimii E. Așadar, avem $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Avem: b) $E = \{2; 5; 6; 7\}$.

III.14PO;PP. Se dau mulțimile $A = \{1; 5; 7; 3; 10; 6\}$ și $B = \{4; 7\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

$$C = \{x \mid x < y,\ x \in A,\ y \in B\},\ D = \{x \mid x \geqslant y,\ x \in A,\ y \in B\}.$$

R. Mulțimea C este formată din elemente x ce aparțin mulțimii A dar mai mici decît orice element y ce aparțin mulțimii B. Deoarece $1 < 4$, $1 < 7$, $3 < 4$, $3 < 7$ rezultă $C = \{1; 3\}$.

Mulțimea D este formată din elemente x ce aparțin mulțimii A dar sînt mai mari (sau egale) ca fiecare element y, ce aparțin mulțimii B.

Deoarece $7 \geqslant 4$, $7 \geqslant 7$, $10 \geqslant 4$, $10 \geqslant 7$ rezultă $D = \{7; 10\}$.

III.15PO. Se dau mulțimile $A = \{2; 10; 3; 11; 17\}$, $B = \{3; 12\}$, $C = \{1; 16; 2\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

$D = \{x \mid x < y,\ x \in A,\ y \in B\}$, $E = \{x \mid x \geqslant y,\ x \in A,\ y \in C\}$, $F = \{x \mid x \leqslant y,\ x \in B,\ y \in C\}$, $G = \{x \mid x = y,\ x \in A,\ y \in C\}$, $H = \{x \mid x \geqslant y,\ x \in A,\ y \in A\}$, $L = \{x \mid x \geqslant y,\ x \in B,\ y \in A\}$, $M = \{x \mid x \leqslant y,\ x \in C,\ y \in A\}$.

R. Avem: $D = \{2\}$, $E = \{17\}$, $F = \Phi$, $G = \{2\}$, $H = \{17\}$; $L = \Phi$, $M = \{1; 2\}$.

III.16. Scrieți mulțimea de litere cu care este scris cuvîntul „mama" în toate modurile posibile.

R. Avem scrierile $\{m; a\}$, $\{a; m\}$.

III.17. Scrieți în toate modurile mulțimea $\{m; n; p\}$.

R. Avem scrierile: $\{m; n; p\}$; $\{m; p; n\}$; $\{n; m; p\}$; $\{n; p; m\}$; $\{p; m; n\}$, $\{p; n; m\}$.

III.18. Se dau mulțimile: $A = \{2; 3\}$; $B = \{1; 5; 7\}$; $C = \{2; 4\}$; $D = \{3; 2\}$; $E = \{7; 5\}$; $F = \{7; 5; 1\}$; $G = \{5; 7\}$. Scrieți mulțimile egale.

R. Putem scrie: $A = D$, $B = F$, $E = G$.

III.19. Se dau mulțimile:

$A = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „arc"$\}$,
$B = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „rame"$\}$,
$C = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „cerc"$\}$,
$D = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „mare"$\}$,
$E = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „rac"$\}$,
$F = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „rece"$\}$,
$G = \{x | x$ literă cu care este scris cuvîntul „car"$\}$.

Găsiți care mulțimi sînt egale.

R. Enumerăm elementele mulțimilor și găsim că: $A = E = G$, $B = D$, $C = F$.

III.20. Aflați numărul x astfel încît $\{3;\ x;\ 2\} = \{5;\ 2;\ 3\}$.

R. Avem $x = 5$.

III.21. În ce condiții avem $\{2\} = \{a\}$?

R. Egalitatea este posibilă cînd $a = 2$.

III.22. În ce condiții avem $\{x;\ y\} = \{3;\ 5\}$?

R. Sînt două situații:

a) $x = 3$ și $y = 5$ sau b) $x = 5$ și $y = 3$.

III.23[pr]**.** Despre mulțimile A, B și C știm că:

$A = \{2;\ 3;\ 11\}$, $A = B$ și $B = C$. Enumerați elementele mulțimii C.

R. Egalitatea între mulțimi este o relație *tranzitivă*, adică dacă $M = P$ și $P = S$ atunci avem că $M = S$.

Folosim acest adevăr și în cazul problemei noastre. Deoarece $A = B$ și $B = C$ vom avea și $A = C$. Deci $C = \{2;\ 3;\ 11\}$.

III.24. Despre mulțimile A, B, C și D știm că $A = B$ și $B = \{4;\ 0;\ 13;\ 9\}$ și $B = C$ și $C = D$. Enumerați elementele mulțimii D.

R. Raționăm ca în soluția problemei precedente și găsim $D = \{4;\ 0;\ 13;\ 9\}$.

III.25. a) Scrieți în ordine crescătoare elementele mulțimilor:

$A = \{7;\ 2;\ 0;\ 1;\ 23;\ 15\}$, $B = \{20;\ 19;\ 200;\ 155\}$,

$C = \{40\,091;\ 40\,019;\ 40\,910;\ 40\,190\}$,

$D = \{1\,009\,009;\ 1\,090\,009;\ 1\,900\,009;\ 1\,090\,090;\ 1\,090\,909\}$,

$E = \{21\,212\,121;\ 21\,121\,212;\ 22\,121\,212;\ 22\,212\,112\}$,

$F = \{1;\ 111;\ 10;\ 1\,111;\ 1\,001;\ 1\,011;\ 11\,111;\ 11\,011\,101\}$.

R. Avem:

$A = \{0;\ 1;\ 2;\ 7;\ 15;\ 23\}$, $B = \{19;\ 20;\ 155;\ 200\}$,

$C = \{40\,019;\ 40\,091;\ 40\,190;\ 40\,910\}$,

$D = \{1\,009\,009;\ 1\,090\,009;\ 1\,090\,090;\ 1\,090\,909;\ 1\,900\,009\}$,

$E = \{21\,121\,212;\ 21\,212\,121;\ 22\,121\,212;\ 22\,212\,112\}$;

$F = \{1;\ 10;\ 111;\ 1\,001;\ 1\,011;\ 1\,111;\ 11\,111;\ 11\,011\,101\}$.

III.26. a) Scrieți în ordine descrescătoare elementele următoarelor mulțimi :

$A = \{23 ; 25 ; 27 ; 24 ; 26 ; 28 ; 22\}$, $B = \{209 ; 0 ; 211 ; 210\}$,

$C = \{1\,001 ; 1\,002 ; 1\,103 ; 1\,104 ; 1\,105\}$, $D = \{499 ; 599 ; 699 ; 799\}$,

$E = \{219 ; 229 ; 259 ; 249\}$, $F = \{19\,002 ; 19\,005 ; 19\,003 ; 19\,004 ; 19\,006\}$;

b) Care din mulțimile respective au elementele numere naturale consecutive?

R. a) Avem $A = \{28 ; 27 ; 26 ; 25 ; 24 ; 23 ; 22\}$,

$B = \{211 ; 210 ; 209 ; 0\}$, $C = \{1\,105 ; 1\,104 ; 1\,103 ; 1\,002 ; 1\,001\}$,

$D = \{799 ; 699 ; 599 ; 499\}$, $E = \{259, 249 ; 229 ; 219\}$,

$F = \{19006 ; 19005 ; 19004 ; 19003 ; 19002\}$.

b) Mulțimile cu proprietatea exprimată în enunț sînt A și F.

III.27. Se dau mulțimile :

$$A_1 = \{a, b, c\};\ A_2 = \{c, b, d\},$$
$$A_3 = \{a, b, d\};\ A_4 = \{a, b, c, d\}.$$

Enumerați elementele mulțimilor :

$A = \{x | x \in A_1 \text{ și } x \in A_2\}$; $B = \{x | x \in A_1 \text{ și } x \notin A_4\}$;

$C = \{x | x \in A_2 \text{ sau } x \in A_3\}$; $D = \{x | x \notin A_1 \text{ și } x \in A_3\}$;

$E = \{x | x \in A_3 \text{ și } x \notin A_4\}$.

R. Avem : $A = \{b ; c\}$, $B = \Phi$, $C = \{a, b, c, d\}$, $D = \{d\}$, $E = \Phi$.

III.28. În figură sînt reprezentate trei mulțimi :

Enumerați elementele mulțimilor A, B, C și :

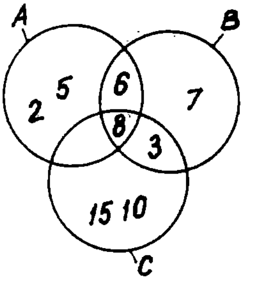
$D = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$,
$E = \{x | x \in B \text{ și } x \in C\}$,

$F = \{x | x \in C \text{ și } x \notin A\}$,

$G = \{x | x \in B \text{ sau } x \in C\}$,

$H = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$,

$L = \{x | x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$.



R. Avem : $A = \{2 ; 5 ; 6 ; 8\}$, $B = \{6 ; 8 ; 3 ; 7\}$, $C = \{8 ; 3 ; 10 ; 15\}$, $D = \{6 ; 8\}$, $E = \{8 ; 3\}$, $F = \{15 ; 10 ; 3\}$, $G = \{6 ; 7 ; 8 ; 3 ; 15 ; 10\}$, $H = \{2 ; 5 ; 6 ; 8 ; 3 ; 7 ; 15 ; 10\}$, $L = \{8\}$.

III.29. Efectuați:

a) $\{2;3;5\} \cup \{1;3;4;5\}$; b) $\{2\} \cup \{2;3\} \cup \{1;4\}$; c) $\{0;1;2\} \cup \{0\} \cup \{0;3\}$; d) $\{1;6\} \cup \Phi \cup \{10\}$; e) $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$; f) $\Phi \cup \Phi$; g) $(\{1\} \cup \{5\}) \cup \{2;3\}$; h) $\{5;6\} \cup \{5;6\}$; i) $\{0\} \cup \Phi$.

R. Avem: a) $\{2;3;5;1;4\}$; b) $\{2;3;1;4\}$; c) $\{0;1;2;3\}$; d) $\{1;6;10\}$; e) $\{1;2;3\}$; f) Φ; g) $\{1;5;2;3\}$; h) $\{5;6\}$; i) $\{0\}$.

III.30. Efectuați:

a) $\{2;3;5\} \cap \{1;3;4;5\}$; b) $\{2\} \cap \{2;3\}$; c) $\{0;1\} \cap \{0;2\}$; d) $\{1;2;3\} \cap \{3;8\}$; e) $(\{0;1;2;3\} \cap \{1;2;4\}) \cap \{2;5;6\}$; f) $\{1;6\} \cap \Phi$; g) $\{1\} \cap \{2\}$; h) $\{1\} \cap \{2\} \cap \{1;2\}$; i) $\Phi \cap \Phi$; j) $\{0\} \cap \Phi$; k) $\{1;3\} \cap \{1;3\}$.

R. Avem: a) $\{3;5\}$; b) $\{2\}$; c) $\{0\}$; d) $\{3\}$; e) $\{2\}$; f) Φ; g) Φ; h) Φ; i) Φ; j) Φ; k) $\{1;3\}$.

III.31. Se dau mulțimile:

$$A = \{1;2;0;3\},\quad B = \{2;3;4;5\},\quad C = \{0;2;3;7\}.$$

Enumerați elementele mulțimilor ce urmează:

a) $A \cup B$; b) $B \cup C$; c) $A \cup C$; d) $A \cap B$; e) $B \cap C$; f) $A \cap C$; g) $A \cup B \cap C$; h) $(A \cup B) \cap C$; i) $A \cap (B \cup C)$; j) $A \cup (B \cap C)$; k) $B \cap (A \cup B) \cap C$; l) $(B \cup C) \cap (A \cap B)$.

R. Avem: a) $\{1;2;0;3;4;5\}$; b) $\{2;3;4;5;0;7\}$; c) $\{1;2;0;3;7\}$; d) $\{2;3\}$; e) $\{2;3\}$, f) $\{0;2;3\}$; g) $\{0;2;3\}$; h) $\{0;2;3\}$; i) $\{1;2;0;3\} \cap \{2;3;4;5;0;7\} = \{2;0;3\}$; j) $\{1;2;0;3\} \cup \{2;3\} = \{1;2;0;3\}$; k) $\{2;3\}$; l) $\{2;3;4;5;0;7\} \cap \{2;3\} = \{2;3\}$.

III.32. Se dau mulțimile: $A = \{1;0;2\}$, $B = \{2;3\}$ $C = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$. În ce relație sînt mulțimile $A \cup B$ și C?

R. Avem $C = \{0;1;2;3;4\}$ și $A \cup B = \{0;1;2;3\}$. Rezultă că $A \cup B \not\subset C$.

III.33. Se dau mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 6\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N},\ 1 < x < 5\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{N},\ x < 4\}$.

În ce relație se găsesc mulțimile $A \cap C$ și B?

R. Avem $A \cap C \subset B$.

III.34. Se dau mulțimile:

$A = \{x | x < 10$ și $x \in \mathbb{N}$ și x se împarte exact la $2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}$ și $2 \leqslant x < 6\}$, $C = \{0;1;2;3;4\}$.

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B.

b) Efectuați:

$A - B$; $B - C$; $C - A$; $A - A$; $A - B - C$; $B - (A \cap C)$; $A \cup B - (B \cap C)$; $(B - A) - (A \cap C)$.

R. Avem: a) $A = \{0;2;4;6;8\}$; $B = \{2;3;4;5\}$; b) $A - B = \{0;6;8\}$; $B - C = \{5\}$; $C - A = \{1;3\}$; $A - A = \Phi$;
$A - B - C = \{0;6;8\} - \{0;1;2;3;4\} = \{6;8\}$; $B - (A \cap C) = \{2;3;4;5\} - \{0;2;4\} = \{3;5\}$; $A \cup B - (B \cap C) = \{0;2;$

$4; 6; 8; 3; 5\} - \{2; 3; 4\} = \{0; 6; 8; 5\}$; $(B - A) - (A \cap C) = \{3; 5\} - \{0; 2; 4\} = \{3; 5\}$.

III.35. Se dau mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{2, 3, 7, 8, 9\},$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

Enumerați între acolade elementele următoarelor mulțimi:

a) $A \cup B$; b) $B \cup C$; c) $C \cup A$; d) $(A \cup B) \cup C$; e) $A \cup (B \cup C)$; f) $A \cap B$; g) $B \cap C$; h) $A \cap C$; i) $(A \cap B) \cap C$; j) $A \cap (B \cap C)$; k) $A \cap (B \cup C)$; l) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; m) $A - B$; n) $B - C$; o) $C - A$; p) $(A - B) \cap C$; r) $(B - C) - A$; s) $B - (C - A)$.

R. Avem: a) $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$; b) $\{2; 3; 7; 8; 9; 4; 5; 6\}$; c) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; d) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; e) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Observație. Se constată că:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Acest exemplu ne conduce la afirmația, care este valabilă în general, că reuniunea de mulțimi este o operație asociativă.

Avem, în continuare:

f) $\{2; 3\}$; g) $\{3; 7\}$; h) $\{5; 4; 3\}$; i) $\{3\}$; j) $\{3\}$.

Observație. Se constată că:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Acest exemplu ne conduce la afirmația, care este valabilă în general, că intersecția de mulțimi este o operație asociativă.

k) $\{2; 3; 4; 5\}$; l) $\{2; 3; 4; 5\}$.

Observație. Se constată că:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Acest exemplu ne conduce la afirmația, care este valabilă și în general, că intersecția mulțimilor este distributivă față de reuniunea mulțimilor.

De asemenea:

m) $\{1; 5; 4\}$; n) $\{2; 8; 9\}$; o) $\{6; 7\}$ p) $\{5; 4\}$; r) $\{8; 9\}$; s) $\{2; 3; 8; 9\}$.

Observație. Diferența de mulțimi nu mai este o operație asociativă:

$$(B - C) - A \neq B - (C - A).$$

III.36. Dați cinci exemple de perechi de mulțimi, știind că reuniunea lor este mulțimea: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

R. Avem, de exemplu, situațiile:

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \Phi$;
2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{5\}$;
3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{4, 5\}$;
4) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4\}$;
5) $A = \{1, 4\}$; $B = \{2, 3, 5\}$.

Se poate arăta că există 32 astfel de perechi.

III.37. Dați cinci exemple de mulțimi, știind că intersecția lor este: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

R. Avem exemplele:

1) $A = \mathbb{N}^*$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
3) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
4) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$;
5) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

III.38[ro]. a) Enumerați elementele mulțimii A știind că:

a) $A \cup \{1\} = \{1; 2; 3\}$; b) $\{2\} \cup A = \{2; 3\}$;
c) $\{2\} \cup A = \{1; 2; 3\}$.

R. Mulțimea $A \cup \{1\}$ are elemente ce aparțin lui A sau $\{1\}$. Conform egalității, acestea sînt elemente ale mulțimii $\{1; 2; 3\}$. Nu este posibil ca $A = \Phi$, nici $A = \{1\}$, nici $A = \{1; 2\}$, nici $A = \{1; 3\}$ nici $A = \{2\}$ nici $A = \{3\}$.

Vom avea, deci $A = \{2; 3\}$ sau $A = \{1; 2; 3\}$.

Analog:

b) $A = \{3\}$ sau $A = \{2; 3\}$; c) $A = \{1; 3\}$ sau $A = \{1; 2; 3\}$.

III.39[ro]. Enumerați elementele mulțimii X știind că $X \subset \{1; 2; 3; 4\}$ și că $X \cap \{1; 4; 5\} = \{1\}$.

R. Din egalitatea $X \cap \{1; 4; 5\} = \{1\}$ rezultă că X are ca element pe 1 și nu are pe 4, respectiv 5. Deci mulțimea X are ca elemente, elemente ale mulțimii $\{1; 2; 3; 4\}$ cu excepția lui 4.

Rezultă că $X = \{1; 2\}$ sau $X = \{1; 3\}$ sau $X = \{1; 2; 3\}$ sau $X = \{1\}$.

III.40[ro]. Enumerați elementele mulțimii X știind că $X \subset \{2; 3; 4\}$ și că $X \cap \{1; 2; 3\} = \{2; 3\}$.

R. Avem $X = \{2; 3\}$ sau $X = \{2; 3; 4\}$.

III.41. a) Găsiți $x \in \mathbb{N}$, astfel încît:

$$\{3; x\} \cap \{4; x\} = \{2\};$$

b) Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel încît:

$$\{2; 3; x\} \cap \{5; x\} = \{6\};$$

c) Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel încît:

$$\{1; x; 3\} \cap \{2; x; 3\} = \{5; 3\}.$$

R. a) Deoarece intersecţia celor două mulţimi are un singur element, pe 2, rezultă că elementul comun, x, al celor două mulţimi este 2, deci $x = 2$.

Analog:

b) $x = 6$. c) $x = 5$.

III.42. Scrieţi numărul de elemente ale mulţimilor:

$A = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $x \leqslant 201\}$; $B = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $x > 1\,005$ şi $x \leqslant 1\,089\}$; $C = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $2\,009 < x \leqslant 4\,008\}$; $D = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $1\,900 \leqslant x \leqslant 1985\}$; $E = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $x < 200$ şi x par$\}$; $F = \{x | x \in \mathbb{N}$ şi $300 \leqslant x < 500$ şi x impar$\}$.

R. Numărul de elemente ale unei mulţimi P se mai notează prin „card P" care se citeşte „cardinal de P". Avem:

card $A = 1 + 100 + 100 + 1 = 202$; card $B = 84$; card $C = 1\,999$; card $D = 86$; card $E = 100$; card $F = 100$.

III.43. Se dau mulţimile $A = \{0; 2; 5; 7\}$ şi $B = \{1; 2; 3; 6\}$.

a) Scrieţi $A \cup B$;

b) Scrieţi $A \cap B$;

c) Care este numărul de elemente al mulţimii $A \cup B$? Ce observaţi?

R. Avem: a) $A \cup B = \{0; 2; 5; 7; 1; 3; 6\}$; b) $A \cap B = \{2\}$; c) card $(A \cup B) = 7$ (s-a notat numărul de elemente al mulţimii, folosind notaţia „card"). Se observă că avem card $A = 4$, iar card $B = 4$. Deci:

$$\text{card } A + \text{card } B = 4 + 4 = 8.$$

Avem card $(A \cup B) = 7$ deoarece cele două mulţimi nu sînt disjuncte. Ele au un element comun, 2, care la reuniune se consideră o singură dată. Deci:

$$\text{card } (A \cup B) \neq \text{card } A + \text{card } B$$

în cazul cînd $A \cap B \neq \Phi$.

Dacă $A \cap B = \Phi$ atunci:

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B.$$

III.44. Se dau mulţimile:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ şi } x < 9\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ şi } x \leqslant 5\}.$$

a) Enumeraţi elementele lor.
b) Scrieţi relaţia dintre ele.
c) Enumeraţi elementele mulţimii $D = \{x | x \in A$ şi $x \notin B\}$.
d) Care este numărul de elemente al mulţimii D?

R. Avem: a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. b) $B \subseteq A$ pentru că orice element ce aparţine mulţimii B aparţine şi mulţimii A. c) $D = \{6; 7; 8\}$. Se constată că proprietatea caracteristică a elementelor din mulţimea D este aceea de a aparţine diferenţei mulţimilor A şi B.

Deci $D = A - B$.

Observație. În cazul cînd $B \subset A$, diferența $A - B$ se mai numește *complementara* mulțimii B în raport cu mulțimea A și se mai notează $\complement_A B$.

d) Evident, numărul de elemente al mulțimii D (deci card D) este 3.

Observație. card $A = 9$, card $B = 7$, deci card $(A - B) = 3 = 9 - 6$.

Putem afirma:

$$\text{card } (A - B) = \text{card } A - \text{card } B$$

numai dacă $B \subset A$.

III.45. Mulțimea A are 30 elemente, mulțimea B are 50 elemente, iar mulțimea $A \cup B$ are 70 elemente.

Sînt disjuncte mulțimile A și B?

R. Avem card A + card $B = 30 + 50 = 80$ și card $(A \cup B) = 70$.

Cele două mulțimi au comune un număr de $80 - 70 = 10$ elemente, deci $A \cap B$ are 10 elemente. Așadar, cele două mulțimi nu sînt disjuncte.

III.46. Mulțimea A are 30 elemente, mulțimea B are 50 elemente, iar mulțimea $A \cup B$ are 80 elemente.

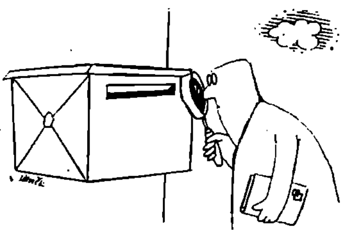
Sînt disjuncte mulțimile A și B?

R. Avem card $A = 30$, card $B = 50$, card $(A \cup B) = 80$ și card A + card $B = 80$. Deci cele două mulțimi sînt disjuncte.

III.47. Mulțimea A are 17 elemente, iar mulțimea B are 11 elemente. Cîte elemente are mulțimea $A \cap B$ dacă mulțimea $A \cup B$ are 22 elemente? Reprezentați soluția cu ajutorul diagramei VENN-EULER.

R. *Soluția I.* Aflăm cîte elemente care mulțimea $B \setminus A$ adică $(A \cup B) \setminus A$. Ea are $22 - 17 = 5$ elemente.

Sînt comune $11 - 5 = 6$ elemente, deci mulțimea $A \cap B$ are 6 elemente.



Soluția a II-a. Aflăm numărul de elemente ale mulțimii $A - B$, adică $(A \cup B) - B$ deci, adică $22 - 11 = 11$ elemente. Elemente comune sînt deci în număr de $17 - 11 = 6$, care sînt ale mulțimii $A \cap B$.

III.48. Mulțimea A are 19 elemente, iar mulțimea B are 14 elemente.

a) Cel mult, cîte elemente pot avea mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$ și mulțimea $A \setminus B$?

b) Cel puțin, cîte elemente pot avea mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$ și mulțimea $A \setminus B$?

R. a) Mulțimea $A \cup B$ poate avea cel mult $19 + 14 = 33$ elemente, dacă mulțimile sînt disjuncte.

Mulţimea $A \cap B$ poate avea cel mult 14 elemente, dacă $B \subset A$.
Mulţimea $A \setminus B$ poate avea cel mult 19 elemente, dacă mulţimile sînt disjuncte.

b) Mulţimea $A \cup B$ are cel puţin 19 elemente, dacă $B \subset A$.
Mulţimea $A \cap B$ poate fi mulţime vidă, dacă mulţimile A şi B sînt disjuncte.
Mulţimea $A \setminus B$ are cel puţin $19 - 14 = 5$ elemente, dacă $B \subset A$.

III.49. Mulţimea de garoafe dintr-o grădină este notată cu A, iar cu B mulţimea de flori roşii din acea grădină.

a) Caracterizaţi mulţimea $A \cup B$, apoi $A \cap B$, apoi $A - B$, apoi $B - A$;

b) Dacă nu există garoafe roşii în acea grădină, găsiţi mulţimea $A \cap B$.

R. $A \cup B$ este mulţimea de garoafe sau flori roşii din acea grădină; se înţelege că în $A \cup B$ intră toate garoafele împreună cu toate florile roşii. $A \cap B$ este mulţimea de garoafe roşii. $A - B$ este mulţimea de garoafe care nu sînt roşii. $B - A$ este mulţimea de flori roşii care nu sînt garoafe.

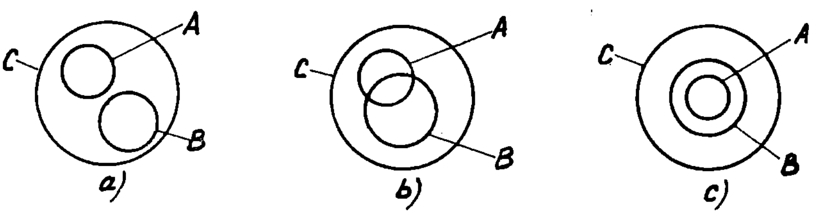
b) $A \cap B$ este mulţimea vidă.

III.50. Într-o clasă sînt 36 de elevi. Un elev scrie pe o hîrtie numele a 7 elevi din acea clasă formînd o mulţime A. Un alt elev formează o mulţime B care are 15 elevi.

a) Puteţi spune cu certitudine numărul de elevi care formează mulţimea $A \cup B$? Analizaţi toate situaţiile ce se ivesc.

b) Puteţi spune numărul de elevi care formează mulţimea $A \cap B$? *Discuţie.*

R. a) Nu. Acest lucru reiese privind diagramele din figurile a, b, c.



S-a notat cu C mulţimea de elevi din clasă.

În figura a) s-a ilustrat situaţia cînd mulţimile A şi B sînt disjuncte (nu au elemente comune, adică $A \cap B = \Phi$). Deci:

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B = 7 + 15 = 22.$$

În figura b) avem situaţia cînd mulţimile A şi B au elemente comune în număr începînd cu 1 pînă la 6 inclusiv. Deci card $(A \cup B)$ poate fi scris astfel:

$$16 \leqslant \text{card } (A \cup B) \leqslant 21.$$

În figura c) avem situaţia cînd toţi elevii ce aparţin mulţimii A, aparţin mulţimii B, adică $A \subset B$.

În acest caz $A \cup B = B$ şi deci:

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } B = 15.$$

b) Nu. Vom analiza aceleaşi cazuri ca la punctul precedent. În situaţia din figura a) avem card $(A \cap B) = 0$ căci $A \cap B = \Phi$. În situaţia din figura b) avem:

$$1 \leqslant \text{card } (A \cap B) \leqslant 6.$$

În situaţia din figura c) avem:

$$\text{card } (A \cap B) = \text{card } A = 7$$

căci $A \cap B = A$.

III.51. Într-o clasă sînt 27 elevi înscrişi la cel puţin unul din următoarele două cercuri: cercul de turism şi cercul ,,Prietenii cărţii".

La ambele cercuri sînt înscrişi 15 elevi, iar la turism, 20. Aflaţi:

a) numărul de elevi înscrişi numai la cercul ,,Prietenii cărţii";
b) numărul de elevi înscrişi la cercul ,,Prietenii cărţii";
c) numărul de elevi înscrişi numai la cercul de turism.

R. a) Dacă la cercuri sînt 27 elevi şi la turism sînt 20 rezultă că restul de $27-20 = 7$ sînt numai la cercul ,,Prietenii cărţii";

b) La ambele cercuri sînt 15 elevi deci aceştia sînt şi la ,,Prietenii cărţii". Mai sînt înscrişi numai la ,,Prietenii cărţii" un număr de 7 elevi; rezultă că la acest cerc sînt $15 + 7 = 22$ (elevi).

c) $27 - 22 = 5$.

IIII.52. Într-o bibliotecă, pe un raft, sînt 40 de cărţi din cel puţin unul din următoarele genuri: poezie şi proză. De poezie şi proză sînt 10, iar de poezie 35. Aflaţi:

a) numărul cărţilor numai de proză;
b) numărul cărţilor de proză;
c) numărul cărţilor numai de poezie.

R. Avem: a) 5; b) 15; c) 25.

III.53^{PO}. În tabăra de la Năvodari au fost la un moment dat 400 de copii. S-au organizat două excursii la date diferite: una în Deltă, iar alta prin staţiunile de pe litoralul românesc. Pentru Deltă s-au înscris 120 copii, iar pentru litoral 130. Puteţi afla numărul copiilor ce nu s-au înscris în nici o excursie?

R. Nu. Problema nu spune dacă s-au înscris copii la ambele excursii adică dacă cele două mulţimi de copii pentru excursii sînt sau nu disjuncte.

Sînt posibile mai multe situaţii:

a) În cazul cînd cele două mulţimi sînt disjuncte, s-au înscris în excursii $120 + 130 = 250$ elevi şi nu s-au înscris deloc $400 - 250 = 150$ elevi.

b) În cazul cînd cele două mulţimi au elemente comune, fără ca una să fie inclusă în cealaltă, înseamnă că numărul minim de copii înscrişi este 131, iar cel maxim 249, deci numărul maxim de copii care nu s-au înscris în excursie este $400 - 131 = 269$, iar cel minim este $400 - 249 = 151$.

c) În cazul cînd toți cei înscriși pentru Deltă s-au înscris și pentru litoral avem 130 elevi în excursie, iar $400 - 130 = 270$ nu s-au înscris în nici o excursie.

III.54[po]. 40 de studenți interogați dacă citesc cărți tehnice (T), romane (R) sau cărți polițiste (P) au răspuns astfel: 20 citesc T; 21 citesc R; 19 citesc P; 9 citesc P și R (unii, de asemenea, și T); 3, numai P; 4, numai R, iar 3 citesc $T + R + P$.

1) Cîți dintre aceștia citesc numai cărți tehnice T?

2) Cîți nu citesc nici o carte din aceste categorii?

(S.M. Project T., p. 22)

R. 1) Problema revine la determinarea cardinalului mulțimii celor ce citesc numai T. Vom nota, pentru ușurință, cu T, R, P mulțimile celor ce citesc cărțile respective.

O diagramă VENN va fi foarte instructivă, deși nu constituie prin ea însăși un mijloc de raționament. Numărul celor ce citesc *numai* cărți tehnice se obține din cel al cititorilor de cărți tehnice, T, din care se vor extrage cei care citesc și alte cărți R și/sau P, și vom avea:

$$\text{card}\ (T \setminus ((T \cap R) \cup (T \cap P))) = \text{card}\ T - \text{card}\ (T \cap R) -$$
$$-\text{card}\ (T \cap P) + \text{card}\ (T \cap R \cap P). \qquad (1)$$

Din datele problemei avem:

$$\text{card}\ T = 20;\ \text{card}\ R = 21,\ \text{card}\ P = 19;\ \text{card}\ (P \cap R) = 9;$$
$$\text{card}\ [R \setminus ((R \cap P) \cup (R \cap T))] = 4;\ \text{card}\ [P \setminus ((P \cap R) \cup (P \cap T))] = 3 \qquad (2)$$

Dezvoltînd în analogie cu (1):

$$\text{card}\ (R \setminus ((R \cup P) \cup (R \cap T))) = 4 = \text{card}\ R - \text{card}\ (R \cap P) -$$
$$-\text{card}\ (R \cap T) + \text{card}\ (R \cap P \cap T)$$

de unde:

$$\text{card}\ (R \cap T) = 21 - 9 - 4 + 3 = 11$$

și, în mod analog, din:

$$\text{card}\ (P \setminus ((P \cap R) \cup (P \cap T))) = 3$$

deducem $\text{card}\ (P \cap T) = 10$.

Revenind la (1) obținem:

$$\text{card}\ (T \setminus ((T \cap R) \cup (T \cap P))) = 20 - 11 - 10 + 3 = 2.$$

Deci, numărul celor care citesc numai cărți tehnice este 2.

2) Numărul celor care nu citesc nici o carte din cele trei categorii se obține din complementara mulțimii celor ce citesc una dintre aceste cărți cel puțin, în raport cu mulțimea S a tuturor studenților interogați. Prin urmare, cum $\text{card}\ S = 40$, avem:

card $(S \setminus (T \cup R \cup P)) = \text{card } S - \text{card }(T \cup R \cup P) = \text{card } S -$
$- \text{card } T - \text{card } R - \text{card } P + \text{card }(T \cap R) + \text{card }(T \cap P) + \text{card }(R \cap P) -$
$- \text{card }(T \cap R \cap P) = 40 - 20 - 21 - 19 + 11 + 10 + 9 - 3 = 7.$

Numărul celor ce nu citesc nici o carte este, deci, 7.

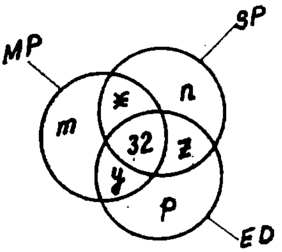
III.55^PO^. Elevii din clasele a V-a și a VI-a ale unei școli au organizat trei activități comune: muncă patriotică, o seară de poezie și o excursie la Doftana. Au participat la fiecare activitate respectiv 85, 78 și 82 elevi. Se știe că: 32 elevi au participat la toate activitățile, 45 elevi au participat la muncă patriotică și la seara de poezie, 44 elevi au participat la muncă patriotică și la excursie, iar 40 elevi la seara de poezie și la excursie.

Aflați:

a) numărul de participanți numai la cîte două acțiuni;

b) numărul de participanți numai la cîte o singură acțiune.

R. Urmărim schema din figură, unde literele reprezintă numărul de elevi corespunzător situației indicată de diagrame:



a) Avem $x + 32 = 45$, deci au participat numai la muncă patriotică și seara de poezie un număr de $x = 13$ elevi. De asemenea, $y + 32 = 44$, deci au participat numai la muncă patriotică și excursie un număr de $y = 12$ elevi.

Încă, $z + 32 = 40$, deci au participat numai la seara de poezie și excursie un număr de $z = 8$ elevi.

b) Avem $m + (x + 32 + y) = 85$, deci $m + (13 + 32 + 12) = 85$, sau $m + 57 = 85$, deci au participat numai la muncă patriotică un număr de $m = 28$ elevi. Încă:

$$n + (x + 32 + z) = 78, \quad n + (13 + 32 + 8) = 78, \quad n + 53 = 78,$$

deci au participat numai la seara de poezie un număr de $n = 25$ elevi. În sfîrșit:

$$p + (y + 32 + z) = 82, \quad p + (12 + 32 + 8) = 82, \quad p + 52 = 82,$$

deci au participat numai la excursia la Doftana un număr de $p = 30$ elevi.

III.56. Găsiți numărul $x + 129$ în cazul cînd $x \in \{409; 15\,021; 312; 0\}$.

R. Avem: $(x + 129) \in \{538; 15\,150; 441; 129\}$.

III.57. Găsiți numărul $15 \cdot x$ în cazul cînd $x \in \{3; 10; 0; 1; 4; 130; 25\,001\}$.

R. Avem $(15 \cdot x) \in \{45; 150; 0; 15; 60; 1\,950; 375\,015\}$.

III.58. Găsiți numărul $15 \cdot x + 129$ în cazul cînd $x \in \{3; 10; 0; 1; 4; 130; 25\,001\}$.

R. Avem $(15 \cdot x + 129) \in \{174; 279; 129; 144; 189; 2\,079; 375\,144\}$.

III.59. Găsiţi numărul $x+1$ în cazul cînd $x \in \{200;\ 72;\ 49\}$.

R. Dacă $x = 200$ atunci $x + 1 = 200 + 1 = 201$. Dacă $x = 72$ atunci $x + 1 = 72 + 1 = 73$. Dacă $x = 49$ atunci $x + 1 = 49 + 1 = 50$.

Observaţie. Numărul $x + 1$ este consecutivul lui x deci $(x + 1) \in \in \{201;\ 73;\ 50\}$.

III.60. Găsiţi numărul $x - 1$ în cazul cînd $x \in \{300; 90;\ 199;\ 451; 1\}$.

R. Avem $\{299;\ 89;\ 198;\ 450;\ 0\}$.

III.61[PP]. Se dau mulţimile:

$$A = \{234;\ 499\},\ B = \{1099;\ 21;\ 0\}.$$

Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

$C = \{x \mid x = a + b$ şi $a \in A$ şi $b \in B\}$,

$D = \{x \mid x = b + a$ şi $a \in A$ şi $b \in B\}$,

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ şi $x = a - b$ şi $a \in A$ şi $b \in B\}$,

$F = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ şi $x = a : b$ şi $a \in B$ şi $b \in A\}$.

R. Pentru mulţimea C sînt necesare calculele ce urmează:

Din $a = 234$ şi $b = 1\,099$ rezultă $x = 234 + 1\,099 = 1\,333$;

Din $a = 234$ şi $b = 21$ rezultă $x = 234 + 21 = 255$;

Din $a = 234$ şi $b = 0$ rezultă $x = 234 + 0 = 234$;

Din $a = 499$ şi $b = 1\,099$ rezultă $x = 499 + 1\,099 = 1\,598$;

Din $a = 499$ şi $b = 21$ rezultă $x = 499 + 21 = 520$;

Din $a = 499$ şi $b = 0$ rezultă $x = 499 + 0 = 499$.

Deci $C = \{1\,333;\ 255;\ 234;\ 1\,598;\ 520;\ 499\}$.

Elementele mulţimii D au proprietatea că $x = b + a$. Se ştie că adunarea numerelor naturale este comutativă. Deci $x = a + b$.

Obţinem că mulţimea D are aceleaşi elemente ca mulţimea C. Rezultă $D = C$.

Pentru determinarea mulţimii E observăm că $x = a - b$ nu este întotdeauna număr natural. Trebuie ca $a \geqslant b$ Deci:

dacă $a = 234$ şi $b = 21$, rezultă că $x = 234 - 21 = 213$;

dacă $a = 234$ şi $b = 0$, rezultă că $x = 234 - 0 = 234$;

dacă $a = 499$ şi $b = 21$, rezultă că $x = 499 - 21 = 478$;

dacă $a = 499$ şi $b = 0$, rezultă că $x = 499 - 0 = 499$.

Deci $E = \{213;\ 234;\ 478;\ 499\}$.

Pentru mulţimea F, observăm că $a : b$ nu este întotdeauna un număr natural.

Trebuie ca restul împărţirii să fie numărul 0. Deci:

dacă $a = 0$ şi $b = 234$ rezultă $x = 0 : 234 = 0$;

dacă $a = 0$ şi $b = 499$ rezultă $x = 0 : 499 = 0$.

Aşadar, $F = \{0\}$.

III.62. Se dau mulțimile:

$$A = \{420;\ 225\},\quad B = \{840;\ 0;\ 25\}.$$

Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$C = \{x \mid x = a + b,\ a \in A \text{ și } b \in B\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x = a - b,\ a \in A \text{ și } b \in B\}$, $E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x = a : b,\ a \in B \text{ și } b \in A\}$.

R. Avem $C = \{1\,260;\ 420;\ 445;\ 1\,065,\ 225;\ 250\}$, $D = \{420,\ 395;\ 225;\ 200\}$, $E = \{2;\ 0\}$.

III.63. Se dă mulțimea:

$$A = \{13;\ 215;\ 25;\ 0;\ 9\,009;\ 123;\ 17;\ 1\}.$$

Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$B = \{x \mid x$ este succesorul lui $y,\ y \in A\}$,

$C = \{x \mid x$ este succesorul lui $y + 3,\ y \in A\}$,

$D = \{x \mid x$ este succesorul lui $y + 1,\ y \in B\}$,

$E = \{x \mid x$ este succesorul lui $y - 2,\ y \in C\}$.

R. Dacă y este un număr natural atunci succesorul său este $y + 1$ deci $x = y + 1$. Avem atunci $B = \{14;\ 216;\ 26;\ 1;\ 9\,010;\ 124;\ 18,\ 2\}$.

Dacă $y + 3$ este un număr natural atunci succesorul său este $y + 3 + 1$, deci $x = y + 4$. Avem, de asemenea, $C = \{17;\ 219;\ 29;\ 4;\ 9\,013;\ 127;\ 21;\ 5\}$, $D = \{16;\ 218;\ 28;\ 3;\ 9\,012;\ 126;\ 20;\ 4\}$, $E = \{16;\ 218;\ 28;\ 3;\ 9\,012;\ 126;\ 20;\ 4\}$.

III.64. Se dă mulțimea:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x < 7\}.$$

Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$$B = \{x \mid y = x^2 \text{ și } x \in A\};\quad C = \{x \mid x = y^3 \text{ și } y \in A\}.$$

R. Enumerăm întîi elementele mulțimii A:

$$A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}.$$

Se observă că fiecare element al mulțimii B este pătratul fiecărui element al mulțimii A, iar orice element al mulțimii C este cubul fiecărui element al lui A. Deci:

$$B = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36\},\quad C = \{0;\ 1;\ 8;\ 27;\ldots\}.$$

III.65. a) Se știe că $b + c = 29$. Calculați $(15 + b) + c$;

b) Se știe că $b + 13 = 92$. Calculați $(92 + b) + 13$;

c) Se știe că $b + a = 1$. Calculați $(1 + b) + a$.

R. a) Adunarea de numere naturale este o operație asociativă deci putem scrie:

$$(15 + b) + c = 15 + (b + c).$$

Din datele problemei avem că $b + c = 29$, deci:

$$(15 + b) + c = 15 + 29 = 44;$$

Avem, în continuare:

b) $(92 + b) + 13 = 92 + (b + 13) = 92 + 92 = 184$; c) 2.

III.66. a) Se știe că $23 + a = 45$. Calculați $23 + (a + 43)$;

b) Se știe că $48 + a = 395$. Calculați $48 + (a + 525)$.

c) Se știe că $27 + a = 27$. Calculați $27 + (a + 19)$.

R. a) Deoarece adunarea de numere naturale este asociativă, numărul cerut se poate scrie:

$$23 + (a + 43) = (23 + a) + 43.$$

Se spune în problemă că $23 + a = 45$. Avem deci:

$$23 + (a + 43) = 45 + 43 = 88.$$

În continuare:

b) $48 + (a + 525) = (48 + a) + 525 = 395 + 525 = 920$; c) 46.

III.67. a) Se știe că $b \cdot c = 40$. Calculați $(35 \cdot b) \cdot c$;

b) Se știe că $x \cdot y = 39$. Calculați $(20 \cdot x) \cdot y$;

c) Se știe că $5 \cdot m = 305$. Calculați $(4 \cdot 5) \cdot m$;

d) Se știe că $n \cdot 709 = 70\,900$. Calculați $(20 \cdot n) \cdot 709$;

e) Se știe că $x \cdot 21 = 420$. Calculați $(3 \cdot x) \cdot 21$;

f) Se știe că $5 \cdot a = 400$. Calculați $(7 \cdot 1 \cdot a) \cdot 5$.

R. a) Înmulțirea de numere naturale este o operație asociativă deci putem scrie:

$$(35 \cdot b) \cdot c = 35 \cdot (b \cdot c).$$

Din datele problemei avem că $b \cdot c = 40$; obținem că:

$$(35 \cdot b) \cdot c = 35 \cdot 40 = 1\,400;$$

În continuare, obținem rezultatele:

b) $(20 \cdot x) \cdot y = 20 \cdot (x \cdot y) = 20 \cdot 39 = 780$;

c) $(4 \cdot 5) \cdot m = 4 \cdot (5 \cdot m) = 4 \cdot 305 = 1\,220$;

d) $20 \cdot 70\,900 = 1\,418\,000$; e) $1\,260$;

f) Înmulțirea este operație asociativă:

$$(7 \cdot 1 \cdot a) \cdot 5 = (7 \cdot 1) \cdot (a \cdot 5) = 7 \cdot (a \cdot 5).$$

Înmulțirea este operație comutativă:

$$7 \cdot (a \cdot 5) = 7 \cdot (5 \cdot a) = 7 \cdot 400 = 2\,800.$$

III.68. a) Se știe că $15 \cdot a = 2\,205$. Calculați $15 \cdot (a \cdot 4)$;

b) Se știe că $43 \cdot x = 473$. Calculați $43 \cdot (x \cdot 10)$;

c) Se știe că $a \cdot 12 = 120$. Calculați $a \cdot (12 \cdot 9)$.

d) Se știe că $m \cdot 493 = 986$. Calculați $m \cdot (493 \cdot 10)$;
e) Se știe că $m \cdot 5 = 115$. Calculați $(10 \cdot 5) \cdot m$.

R. a) Înmulțirea este operație asociativă, deci:

$$15 \cdot (a \cdot 4) = (15 \cdot a) \cdot 4.$$

Din datele problemei știm că $15 \cdot a = 2\,205$. Obținem:

$$(15 \cdot a) \cdot 4 = 2\,205 \cdot 4 = 8\,820;$$

Avem, în continuare: b) $43 \cdot (x \cdot 10) = (43 \cdot x) \cdot 10 = 473 \cdot 10 = 4\,730$; c) 1 080; d) 9 860; e) 1 150.

III.69. a) Se știe că $a \cdot b = 45$ și $a \cdot c = 55$. Calculați $a \cdot (b + c)$;
b) Se știe că $m \cdot n = 32$ și $m \cdot p = 724$. Calculați $m \cdot (n + p)$;
c) Se știe că $x \cdot y = 72$ și $y \cdot t = 98$. Calculați $y \cdot (x + t)$;
d) Se știe că $y \cdot x = 414$ și $ux = 99$. Calculați $x \cdot (y + u)$;
e) Se știe că $a \cdot x = 14$ și $b \cdot x = 78$. Calculați $x \cdot (a + b)$;
f) Se știe că $a \cdot x = 900$ și $x \cdot b = 400$. Calculați $x \cdot (a - b)$;
g) Se știe că $x \cdot y = 412$ și $y \cdot a = 312$. Calculați $(x - a) \cdot y$.

R. a) Înmulțirea este o operație distributivă față de adunare sau scădere, deci putem scrie:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Folosim datele din problemă și avem:

$$a \cdot (b + c) = 45 + 55 = 100;$$

În continuare:

b) $m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p) = 32 + 724 = 756$;

c) $y \cdot (x + t) = (y \cdot x) + (y \cdot t)$; dar $y \cdot x = x \cdot y = 72$ și răspunsul este 170; d) 513; e) 92; f) $x \cdot (a - b) = x \cdot a - x \cdot b = 900 - 400 = 500$. g) 100.

III.70PO;PP**.** Despre trei numere naturale se știe că produsul dintre primul număr și al doilea este 300, iar produsul dintre primul număr și al treilea număr este 400. Aflați produsul dintre primul număr și suma celorlalte două.

R. Notăm cu x, y și z respectiv primul număr, al doilea număr și al treilea număr. Conform enunțului avem $x \cdot y = 300$ și $x \cdot z = 400$.

Cerința problemei este de a calcula $x \cdot (y + z)$. Datorită faptului că înmulțirea este distributivă față de adunare putem scrie:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z = 300 + 400 = 700.$$

III.71. Despre patru numere naturale se știe că produsul dintre primul și al doilea este 25, produsul dintre primul și al treilea este 50, produsul dintre primul și al patrulea este 75.

Aflați produsul dintre primul număr și suma celorlalte trei.

R. Folosim faptul că înmulțirea este distributivă față de adunare. Obținem, în final, $25 + 50 + 75 = 150$.

III.72. Scrieți ca sume produsele:

a) $3 \cdot (a + b)$; b) $(a + b) \cdot 5$; c) $b(a + c)$; d) $(m + n) \cdot a$; e) $2 \cdot (a + 3)$; f) $(2 + b) \cdot 5$; g) $a \cdot (b + c + d)$; h) $b(8 + a + m)$; i) $(a + b + m) \cdot 2$; j) $(2 + a + a) \cdot b$; k) $(a + b) \cdot (2m)$; l) $(a + b) \cdot a$; m) $(a + b) \cdot (m + n)$.

R. Avem: a) $3a + 3b$; b) $5a + 5b$; c) $ba + bc$; d) $ma + na$; e) $2a + 6$; f) $10 + 5b$; g) $ab + ac + ad$; h) $8b + 8a + bm$; i) $2a + 2b + 2m$; j) $2b + ab + ab$; k) $2am + 2bm$; l) $a^2 + ab$; m) $(a + b)m + (a + b)n = am + bm + an + bn$.

III.73. Scrieți ca un singur produs următoarele sume sau diferențe (scoateți factor comun):

a) $3a + 4a$; b) $5b + 6b$; c) $8x — 5x$; d) $12x + 13x + 28x$; e) $25x — 4x + 30x$; f) $a + 5a$; g) $x + x + x$; h) $3m + 2m$; i) $4m + 8m — 3m$; j) $90x — 16x + 20x$; k) $3a + a$; l) $8x — x$; m) $9x — 7x — x$; n) $a — a$; o) $8x — 5x — 3x$; p) $a + a — a + a$; r) $25a — 25a + 3a + 8a — 11a$.

R. Avem: a) $3a + 4a = a \cdot (3 + 4) = a \cdot 7 = 7a$;
b) $5b + 6b = b \cdot (5 + 6) = b \cdot 11 = 11b$;
c) $8x — 5x = x \cdot (8 — 5) = x \cdot 3 = 3x$;
d) $x \cdot (12 + 13 + 28) = x \cdot 53 = 53x$;
e) $x \cdot (25 — 4 + 30) = x \cdot 51 = 51x$;
f) $a + 5a = 1 \cdot a + 5a = a(1 + 5) = a \cdot 6 = 6a$;
g) $3x$; h) $5m$; i) $9m$; j) $94x$; k) $4a$; l) $7x$; m) x; n) $0 \cdot a = 0$; o) 0; p) $2a$; r) 0.

III.74. Scrieți ca sume de cît mai puține produse (reduceți termenii asemenea, în locul literelor avînd numere naturale):

a) $3x + 2x + 4y + 5y$; b) $5a — 2a + 8b + 3b$; c) $25a + 3b + 6a + 12b + a$; d) $2x + 4x + 9a + 3a$; e) $4x + 6x + 3x + 7a + 9a$; f) $8a + 4a + 9b + 5b$; g) $12a + 4a + 5a + 3b + 2b + 4b$; h) $6a + 5b + 3a + 9b$; i) $25a + 30b + 5a$; j) $25x — 5x + 42y + 3x + 2y$; k) $x + y + x + y + x$; l) $25a + 25y + 2a + 2y + a + 7$.

R. a) Adunarea este asociativă și putem obține:

$$(3x + 2x) + (4y + 5y).$$

În acest caz, avem $5x + 9y$;
În continuare:

b) $(5a — 2a) + (8b + 3b) = 3a + 11b$;

c) Adunarea este comutativă:

$$25a + 3b + 6a + 12b + a = 25a + 6a + 3b + 12b + a;$$

Adunarea este asociativă:

$$25a + 3b + 6a + 12b + a = (25a + 6a) + (3b + 12b) + a;$$

Adunarea este comutativă:

$$(25a + 6a) + a + (3b + 12b).$$

Adunarea este asociativă:

$$25a + 3b + 6a + 12b + a = (25a + 6a + a) + (3b + 12b) = 32a + 15b.$$

De asemenea:

d) $6x + 12a$; e) $13x + 16a$; f) $12a + 14b$; g) $21a + 9b$; h) $9a + 14b$; i) $30a + 30b$; j) $23x + 44y$; k) $3x + 2y$; l) $28a + 27y + 7$.

III.75. Scrieți cu cît mai puține produse (reduceți termenii asemenea) următoarele adunări sau scăderi, unde literele sînt considerate numere naturale :

a) $3a^4 + 5a^4$; b) $2a^3 + 5a^3 - 4a^3$; c) $12a^3 + 20a^3 - 14a^3 + 9a^3 + 20a^3$; d) $6x^2 + 2x^2 + 8y^2$; e) $12x^2 + 4x^2 + 5y^2 + 3x^2 + 8y^2 + 6x^2$; f) $20x^2 - 3x^2 + 4x^2 - 6x^2 + 9x^2$; g) $40x + 20y^2 + 30x + 21y^2 + 5x$.

R. Avem : a) $8a^4$; b) $3a^3$; c) $47a^3$; d) $8x^2 + 8y^2$; e) $25x^2 + 13y^2$; f) $24x^2$; g) $75x + 41y^2$.

III.76. a) Găsiți numărul natural $25(x + 2) + 25x$ știind că $x = 200$;

b) Găsiți numărul natural $30 \cdot (x + 4) + 28x$ știind că $x = 5$;

c) Găsiți numărul natural $20(a + 3b) + 15a + 2b$ știind că $a = 10$ și $b = 15$;

d) Găsiți numărul natural $10(a + 2b) + 3a + 12b$ știind că $a = 2$ și $b = 5$.

R. a) Numărul este :

$$25(200 + 2) + 25 \cdot 200 = 25 \cdot 202 + 5\,000 = 5\,050 + 5\,000 = 10\,050.$$

Observație. Exercițiul se poate rezolva și în felul următor : $25 \cdot x + 25 \cdot 2 + 25x$ adică $50x + 50$.

Acum înlocuim pe x cu 200 și obținem rezultatul :

$$50 \cdot 200 + 50 = 10\,000 + 50 = 10\,050.$$

b) 410 ; c) Scriem mai simplu : $20 \cdot a + 60b + 15 \cdot a + 2b$ adică $35a + 62b$. Acum înlocuim și avem :

$$35 \cdot 10 + 62 \cdot 15 = 350 + 930 = 1\,280.$$

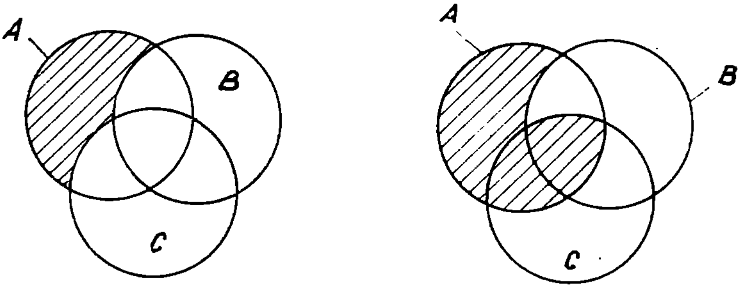
Verificați rezultatul înlocuind direct.

d) 186.

III.77. Arătați cu ajutorul diagramei VENN-EULER că legea „—" (diferența mulțimilor) nu este asociativă.

R. Trebuie să arătăm că $(A - B) - C \neq A - (B - C)$.

Reprezentăm cu ajutorul diagramei VENN-EULER mulțimile A, B, C.



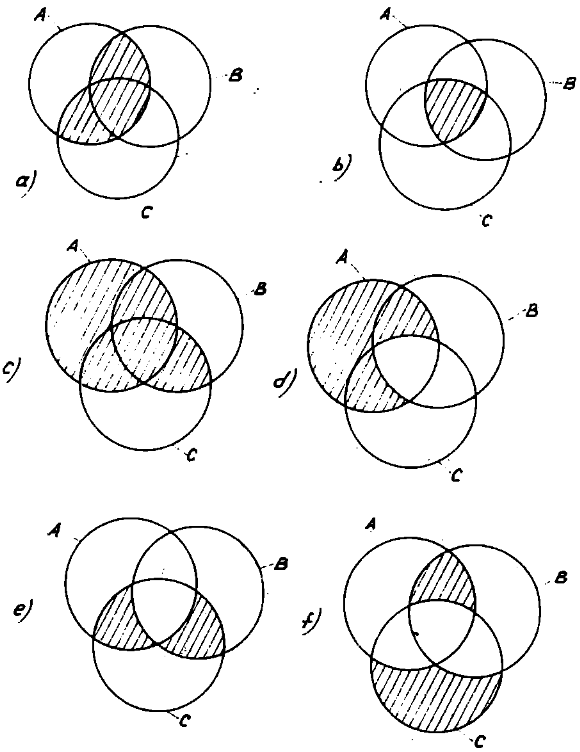
Pe prima diagramă am haşurat $(A - B) - C$.

Pe a doua diagramă am haşurat $A - (B - C)$.

Observăm că cele două porţiuni haşurate nu sînt identice, deci diferenţa mulţimilor nu este asociativă.

III.78. Mulţimile A, B şi C sînt reprezentate mai jos cu ajutorul diagramelor VENN-EULER.

Scrieţi operaţiile care trebuie efectuate cu aceste mulţimi pentru a obţine ca rezultat porţiunile haşurate.



R. Avem: a) $A \cap (B \cup C)$; b) $A \cap B \cap C$; c) $A \cup (B \cap C)$; d) $A - (B \cap C)$; e) $[(A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$; f) $[C - ((A \cup B) \cap C)] \cup [(A \cap B) - C]$.

III.79. Se ştie că $x = 4$ şi $y + z = 15$. Calculaţi:

a) $x + y + z$; b) $2x + y + z$; c) $9z + 7x + 9y$; d) $12x - (2y + 2z)$; e) $3x + y + z$; f) $17x - 2(z + y)$; g) $xy + xz$; h) $5y + 7x + 5z$; i) $15 \cdot x - (4z + 4y)$; j) $35 + x - (y + z) \cdot 2$.

R. Avem: a) $x + y + z = x + (y + z) = 4 + 15 = 19$; b) $2x + y + z = 2x + (y + z) = 2 \cdot 4 + 15 = 8 + 15 = 23$; c) $9z + 7x + 9y = 7x + 9(z + y) = 7 \cdot 4 + 9 \cdot 15 = 28 + 135 = 163$; d) $12x - 2(y + z) = 12 \cdot 4 - 2 \cdot 15 = 48 - 30 = 18$; e) 27; f) 38; g) 60; h) 103; i) 0; j) 9.

III.80. a) Calculați numărul natural:

$$x = 12a^4 + 15a^4 - 4a^4 - 22a^4 + a^4$$

în cazul cînd $a \in \{0 ; 1 ; 2 ; 4\}$;

b) Găsiți numărul $x = 18a^2 + 2a^2 - 12a^2$ în cazul cînd $a \in \{2 ; 5 ; 0\}$;

c) Găsiți numărul $x = 2a^2 + 3b^2 + 5a^2$ știind că $a \in \{10 ; 2\}$, iar $b \in \{4 ; 0\}$;

d) Găsiți cît este $x = 3a + 2b^2 + 3b^2 + 2a$ în cazul cînd $a \in \{2 ; 5\}$, iar $b \in \{0 ; 3\}$.

R. a) Înlocuim, pe rînd, pe a cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 4\}$ și calculăm pentru fiecare pe x. Totuși, mai comod, în loc de $12a^4 + 15a^4 - 4a^4 - 22a^4 + a^4$ scriem $2a^4$. Pentru $a = 0$ avem $x = 2 \cdot 0^4 = 2 \cdot 0 = 0$; pentru $a = 1$ avem $x = 2 \cdot 1^4 = 2$; pentru $a = 2$ avem $x = 2 \cdot 2^4 = 32$; pentru $a = 4$ avem $x = 2 \cdot 4^4 = 2 \cdot 256 = 512$. Deci $x \in \{0 ; 2 ; 32 ; 512\}$; b) Avem $x \in \{32 ; 200 ; 0\}$; c) Avem $x = 7a^2 + 3b^2$.

Pentru $a = 10$ și $b = 4$ avem:

$$x = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 4^2 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 16 = 700 + 48 = 748.$$

Pentru $a = 10$ și $b = 0$ avem: $x = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 0^2 = 7 \cdot 100 + 0 = 700$. Pentru $a = 2$ și $b = 4$ avem $x = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 = 7 \cdot 4 + 3 \cdot 16 = 28 + 48 = 76$. Pentru $a = 2$ și $b = 0$ avem $x = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 = 7 \cdot 4 + 0 = 28$.

Deci $x \in \{748 ; 700 ; 76 ; 28\}$.

d) Avem $x \in \{10 ; 55 ; 25 ; 70\}$.

III.81. Se dă numărul natural $x \neq 0$. Scrieți numărul care este:

a) dublul lui x; b) triplul lui x; c) de 2 ori mai mult decît x; d) dublul lui x adunat cu 2; e) de 6 ori mai mare ca x; f) jumătatea lui x; g) o treime din x; h) dublul lui $2x$; i) un sfert din x; j) cu 5 mai mult decît x; k) cu 5 mai puțin decît x; l) de trei ori mai mult ca x; m) de trei ori mai mic ca x; n) cu 3 mai mare ca x; o) cu 3 mai puțin ca x; p) de x ori mai mult decît x; r) pătratul lui x; s) cubul lui x; ș) pătratul lui x^2; t) cu dublul lui x mai mult ca pătratul lui x.

R. Avem: a) $2x$; b) $3x$; c) $2x$; d) $2x + 2$; e) $6x$; f) $x : 2$ (nu întotdeauna este număr natural); g) $x : 3$ (nu este întotdeauna număr natural); h) $2 \cdot 2x$, adică $4x$; i) $x : 4$ (nu este întotdeauna număr natural); j) $5 + x$ sau $x + 5$; k) $x - 5$ (nu este întotdeauna număr natural); l) $3x$; m) $x : 3$; n) $x + 3$ sau $3 + x$; o) $x - 3$; p) $x \cdot x$ adică x^2; r) x^2; s) x^3; ș) $(x^2)^2$ adică x^4; t) $2x + x^2$.

III.82. a) Scrieți ca un produs de două puteri următoarele puteri:

$$a^3 ;\ x^8 ;\ x^7 ;\ b^{20} ;$$

b) Scrieți ca un cît de două puteri următoarele puteri:

$$a^5 ;\ b^3 ;\ b^8 ;\ m^5 ;\ x^{20} ;$$

c) Scrieți ca un produs de puteri următoarele puteri:

$$(3 \cdot 5)^2 ;\quad (7 \cdot x)^3 ;\quad (7^2 \cdot x^3)^2 ;\quad (a \cdot b^2)^3 ;$$
$$(a \cdot b \cdot c)^3 ;\ (m^2 \cdot n \cdot p^4)^5 ;(u \cdot t^2 \cdot x)^8 ;$$

d) Scrieţi ca o putere a unui produs următoarele puteri :

$$a^5 \cdot b^5 ;\ c^2 \cdot d^2 \cdot x^2 ;\ m^4 \cdot n^4 ;\ d^3 \cdot e^3 \cdot x^3 \cdot 5^3.$$

R. Avem : $a^3 = a^2 \cdot a$; $x^8 = x \cdot x^7 = x^2 \cdot x^6 = x^5 \cdot x^3 = \ldots$; $x^7 = x^2 \cdot x^5 = \ldots$; $b^{20} = b^4 \cdot b^{16} = \ldots$; b) $a^5 = a^8 : a^3 = a^6 : a = \ldots$; $b^3 = b^8 : b^5 = \ldots$; $b^8 = b^3 \cdot b^5 = b^{10} : b^2 = \ldots$; $m^5 = m^7 : m^2 = m^{10} : m^5 = \ldots$; $x^{20} = x^{22} : x^2 = \ldots$; c) $3^2 \cdot 5^2$; $7^3 \cdot x^3$; $7^4 \cdot x^6$; $a^3 \cdot b^6$; $a^3b^3c^3$; $m^{10} \cdot n^5 \cdot p^{20}$; $u^8 \cdot t^{16} \cdot x^8$; d) $(ab)^5$; $(cdx)^2$; $(mn)^4$; $(5dex)^3$.

III.83. Scrieţi ca un produs de două puteri cu exponent număr natural (x şi y sînt numere naturale) :

a) 2^{a+5} ; b) 5^{3x+7} ; c) 8^{2x+4} ; d) 5^{x+7+y} ; e) $(x+2)^{4x+7}$; f) $(x+y)^{3x+9}$.

R. Folosim formula $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; obţinem : a) $2^{a+5} = 2^a \cdot 2^5$; b) $5^{3x+7} = 5^{3x} \cdot 5^7$; c) $8^{2x} \cdot 8^4$; d) $5^x \cdot 5^7 \cdot 5^y$; e) $(x+2)^{4x} \cdot (x+2)^7$; f) $(x+y)^{3x} \cdot (x+y)^9$.

Observaţie. Scrierea nu este unică ; de exemplu, $2^{a+5} = 2^a \cdot 2^3 \cdot 2^2$ etc.

III.84. Se ştie că $4^n = 256$. Calculaţi :

a) 2^{2n+1} ; b) 2^{2n+2} ; c) 2^{2n+3} ; d) 2^{4n}.

R. a) Folosim cunoştinţele despre puteri. Cunoaştem că :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Această egalitate mai poate fi scrisă astfel :

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

În cazul nostru :

$$2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2.$$

Mai cunoaştem că :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

care ne permite să mai scriem :

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

În cazul nostru :

$$2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2 = (2^2)^n \cdot 2 = 4^n \cdot 2 = 256 \cdot 2 = 512.$$

Avem, în continuare :

b) $2^{2n+2} = 2^{2n} \cdot 2^2 = (2^2)^n \cdot 4 = 4^n \cdot 4 = 256 \cdot 4 = 1\,024$; c) $2\,048$; d) $2^{4n} = 2^{2 \cdot 2n} = (2^{2n})^2 = (4^n)^2 = 256^2$.

III.85. Stabiliţi care din următoarele propoziţii :

$p_1 : 2 + 5 = 9$; $p_2 : 4 < 5$; $p_3 : 256 < 265$; $p_4 : 2^5 < 5^2$; $p_5 : 18 = 8$; $p_6 : 18 = 18$; $p_7 : 7 \neq 5$; p_8 : Pămîntul nu este o planetă ; p_9 : Perimetrul pătratului se calculează după formula $P = 4 \cdot l$; p_{10} : Triunghiul are patru laturi ; p_{11} : 10 m = 1 dam ; p_{12} : 10 km = 10^6 mm ; p_{13} : 15 kg = 15 000 g ; p_{14} : 16 000 cm = 16 km ; p_{15} : 200 este scris cu trei cifre diferite ; $p_{16} : 110_2 = 110$; $p_{17} : 111_2 = 7$; p_{18} : 12 nu este număr natural ; $p_{19} : 0 \in \mathbb{N}$; p_{20} : Mulţimea vidă se notează : $\{\Phi\}$; $p_{21} : 0 \in \Phi$; $p_{22} : \Phi \subset$

$\subset \{1 ; 0\}$; $p_{23}: \Phi \in \{\Phi\}$; $p_{24}: 7 \in \{7\}$; $p_{25}: 5 \in \{5 ; 55\}$; p_{26} : Mulţimea $\{5 ; 15 ; 5 ; 55\}$ este scrisă corect ; p_{27} : Mulţimea $\{6 ; 66 ; 666\}$ nu este scrisă corect ; $p_{28}: 16 - 16 \neq 0$; $p_{29}: 0 + 19 \neq 19$; $p_{30}: 82 \cdot 5 = 41 \cdot 2 \cdot 5$, sînt adevărate.

R. Adevărate sînt propoziţiile p_2 ; p_3 ; p_6 ; p_7 ; p_9 ; p_{11} ; p_{13} ; p_{17} ; p_{19} ; p_{22} ; p_{23} ; p_{24} ; p_{25} ; p_{30}.

III.86. Se dau mulţimile : $A = \{2 ; 4 ; 8 ; 9\}$, $B = \{1 ; 5 ; 8\}$, $C = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 8\}$, $D = \{0 ; 4 ; 8 ; 10\}$, $E = \{1 ; 0 ; 10\}$.

Stabiliţi care propoziţii sînt adevărate şi care sînt false :

$p_1: 3 \in A$; $p_2: 9 \in C$; $p_3: 1 \notin A$; $p_4: 7 \notin E$; $p_5: A \cup B = C$; $p_6: D - E = \{4 ; 8\}$; $p_7: \{4 ; 8\} = E - D$; $p_8: A \cap C = \{8\}$; $p_9: 0 \in D \cap E$; $p_{10}: \{0 ; 10\} \subseteq D \cap E$; $p_{11}: 6 \notin B \cup D$; $p_{12}: E \subset C \cup D$; $p_{13}: B \not\subset C$; $p_{14}: 0 \in \Phi$; $p_{15}: A \cap B \cap C = \{8\}$; $p_{16}: (A \cup B) \cap (D \cup E) \subseteq \{4 ; 8 ; 1\}$; $p_{17}: A \cap B \cap C \cap D \cap E \subset \{8 ; 88\}$; $p_{18}: B = C$; $p_{19}: D = \{0 ; 4 ; 8 ; 10\} - \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$; $p_{20}: \Phi \subset D$.

R. Avem concluziile : F ; A ; A ; A ; F ; A ; F ; F ; A ; A ; A ; A ; F ; F ; A ; A ; A ; F ; F ; A.

III.87. Se dau mulţimile :

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$,

$B = \{2 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13\}$,

$C = \{10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 17 ; 18 ; 19\}$,

$D = \{6 ; 8 ; 10 ; 11\}$,

$E = \{8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16\}$,

$F = \{18 ; 19\}$.

a) Găsiţi valoarea logică a propoziţiilor :

$p_1: B \subset A$; $p_2: B \subset C$; $p_3: F \subset C$; $p_4: F \subset A$; $p_5: D \subset E$; $p_6: 11 \in D \cap E$; $p_7: 11 \in D \cap C$; $p_8: 2 \in B - D$; $p_9: 2 \in B - E$; $p_{10}: 2 \in B - F$; $p_{11}: 2 \in B - C$; $p_{12}: 15 \in C \cup F$; $p_{13}: 18 \notin F - C$; $p_{14}: 10 \in B \cap C \cap D \cap E \cap F$; $p_{15}: 8 \in D - E$; $p_{16}: D \cap E = B$; $p_{17}: A - F = D \cup E \cup \{1 ; 5 ; 17\}$; $p_{18}: 17 \in C - (B \cup E)$; $p_{19}: D \subset B \subset C$; $p_{20}: D \subset B \subset A$.

R. a) Avem : $v(p_1) = 1$; $v(p_2) = 0$; $v(p_3) = 1$; $v(p_4) = 1$; $v(p_5) = 0$; $v(p_6) = 0$; $v(p_7) = 1$; $v(p_8) = 1$; $v(p_9) = 1$; $v(p_{10}) = 1$; $v(p_{11}) = 1$; $v(p_{12}) = 1$; $v(p_{13}) = 1$; $v(p_{14}) = 0$; $v(p_{15}) = 0$; $v(p_{16}) = 0$; $v(p_{17}) = 0$; $v(p_{18}) = 1$; $v(p_{19}) = 0$; $v(p_{20}) = 1$.

III.88. Se dau mulţimile :

$A = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 \leqslant x \leqslant 8\}$, $B = \{a ; 3 ; 5 ; 7 ; b ; 8\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{N}, 5 \leqslant x < 8\}$.

a) Determinaţi numerele a şi b astfel încît să avem $A = B$;

b) Alegeţi semnul potrivit pe care să-l puneţi în căsuţă în aşa fel încît să obţineţi propoziţii adevărate :

$4 \ \square \ A$; $1 \ \square \ A$; $C \ \square \ A$; $5 \ \square \ C$; $10 \ \square \ B$; $8 \ \square \ C$.

R. Mai întîi enumerăm elementele mulțimilor A și C. Avem:

$$A = \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}, \quad C = \{5 ; 6 ; 7\}.$$

a) Pentru ca $A = B$ să fie adevărată trebuie ca A și B să aibă aceleași elemente (aceasta se mai traduce și astfel: $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$). În cazul nostru intră în discuție elementele a și b, ce aparțin mulțimii B, cu elementele 4 și 6 ce aparțin mulțimii A. Așadar, pot fi două situații:

$$a = 4 \text{ și } b = 6 \text{ sau } a = 6 \text{ și } b = 4.$$

b) Avem $4 \in A$; $1 \notin A$; $C \subset A$; $5 \in C$; $10 \notin B$; $8 \notin C$.

III.89. Se dau mulțimile:

$$A = \{1 ; 3 ; x ; 5\}, \; B = \{2 ; 3\}, \; C = \{7 ; 5 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

a) Determinați numărul x astfel ca $A \cup B = C$ să fie adevărată;

b) Determinați numărul x astfel încît $A \cap B$ să conțină numai două elemente;

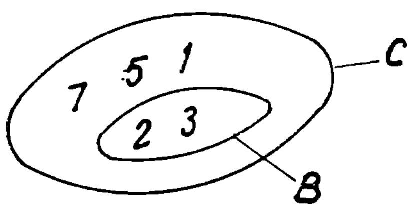
c) Găsiți valoarea logică a următoarelor propoziții: p_1 : $B \subset C$, p_2 : $C \subset B$, p_3 : $1 \in B$, p_4 : $1 \subset C$, p_5 : $1 \in C$.

d) Reprezentați în același desen, cu ajutorul diagramelor, mulțimile B și C.

R. Avem a) $A \cup B = \{1 ; 3 ; x ; 5 ; 2\}$. Relația din enunț devine: $\{1 ; 3 ; x ; 5 ; 2\} = \{7 ; 5 ; 1 ; 2 ; 3\}$. Pentru ca aceasta să fie adevărată trebuie să avem $x = 7$.

b) $A \cap B$ are cu siguranță ca element pe 3. Pentru a mai avea încă un element trebuie să avem în mulțimea A pe $x = 2$.

c) $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$, $v(p_4) = 0$, $v(p_5) = 1$; d) Avem figura:



Se observă că $B \subset C$.

III.90. Stabiliți valoarea logică a propozițiilor următoare:

p_1 : $2 + 5 \cdot 6 - 10 : 5 = 8$; p_2 : $6 + 20 : 4 + 3 \cdot 5 \cdot 2 \neq 26$; p_3 : $60 \cdot 2 - 200 : 10 + 3^2 = 109$; p_4 : $2 + 5 \cdot 2 = 14$; p_5 : $3 + 3 : 3 + 2 \cdot 2 \neq 8$; p_6 : $4 + 5 \cdot 6 - 30 < 4$; p_7 : $5 + 4 \cdot (2 + 3) \neq 25$; p_8 : $20 - 20 : (6 - 1) = 0$; p_9 : $2 + 2 \cdot [12 + (30 - 2 \cdot 3) : 8] : 5 = 4 \cdot 15 : 5$; p_{10} : $[10 \cdot (145 + 5) - 2 \cdot 50] : 100 = 126 : 9$; p_{11} : $10 - \{1 + 2 \cdot [79 + (500 - 395) : 5] : (2^2 \cdot 5^2)\} = 17$.

R. Avem valorile logice 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

III.91. Stabiliți valoarea logică a fiecărei propoziții:

a) $21 + 30 = 30 + 21$; b) $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$; c) $(20 + 21) + 3 = 20 + (21 + 3)$; d) $(4 \cdot 2) \cdot 30 = 4 \cdot (2 \cdot 30)$; e) $3 + 0 = 0 + 3$; f) $81 \cdot 1 = 81$; g) $(3 + 2) + 5 = 5 + (3 + 2)$; h) $(3 + 2) + 5 = (5 + 2) + 3$; i) $15 - (4 - 3) = (15 - 4) - 3$; j) $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$; k) $2 \cdot (3 + 14) = 2 \cdot 3 + 14$.

R. a) Valoarea logică a propoziției este 1 pentru că adunarea în $\mathbb{N}$ este comutativă; b) 1, pentru că înmulțirea în $\mathbb{N}$ este comutativă; c) și d) 1, pentru că atît adunarea în $\mathbb{N}$ cît și înmulțirea în $\mathbb{N}$ sînt operații asociative; e) 1, pentru că 0 este element neutru la adunare; f) 1, pentru că înmulțirea în $\mathbb{N}$ este o operație cu elementul neutru numărul 1; g) 1, căci adunarea este comutativă; h) 1, căci adunarea este comutativă și asociativă; i) 0, scăderea nu e asociativă; j) 1, înmulțirea este distributivă față de adunare; k) 0.

III.92. Negați următoarele propoziții:

a) $2 = 3$; b) $4 < 3$; c) $2 \in A$; d) $7 \neq 3$; e) $8 = 8$; f) Sandu se joacă cu mingea; g) $13 \notin A$; h) $12 \geqslant 8$; i) Laptele este alb; j) Dreptunghiul are patru laturi; k) $21 \in \mathbb{N}$; l) Radu este frate cu Ana; m) Pămîntul nu este o planetă; n) A nu este inclusă în B; o) $A \not\subset B$.

R. Negațiile propozițiilor date sînt: a) $2 \neq 3$; b) $4 \geqslant 3$; c) $2 \notin A$; d) $7 = 3$; e) $8 \neq 8$; f) Sandu nu se joacă cu mingea; g) $13 \in A$, h) $12 < 8$; i) Laptele nu este alb; j) Dreptunghiul nu are patru laturi; k) $21 \notin \mathbb{N}$; l) Radu nu este frate cu Ana; m) Pămîntul este o planetă; n) A este inclusă în B; o) $A \subset B$.

Observație. Dacă o propoziție este adevărată atunci negația ei este o propoziție falsă; dacă o propoziție este falsă atunci negația este adevărată.

III.93^{PO}. Dacă se dau două sau mai multe propoziții, cu ajutorul lor și al cuvîntului „și" între ele se poate obține o nouă propoziție. Această nouă propoziție este adevărată cînd *toate* propozițiile care o formează sînt adevărate; în caz contrar este falsă.

Se dau propozițiile:

p_1: $4 < 5$; p_2: $8 = 7$; p_3: $23 < 14$; p_4: 14 km $= 140$ hm; p_5: $140 + 410 \neq 540$.

Găsiți valorile logice ale propozițiilor: p : p_1 și p_2; q : p_3 și p_4; r : p_5 și p_4 și p_1; s : p_1 și p_5; t : p_2 și p_3 și p_4 și p_5; u : p și r.

R. Mai întîi găsim valorile logice ale propozițiilor date: $v(p_1) = 1$; $v(p_2) = 0$; $v(p_3) = 0$, $v(p_4) = 1$; $v(p_5) = 1$.

Pentru a găsi valoarea logică a propoziției p avem în vedere valorile logice ale propozițiilor p_1, respectiv p_2. Cum nu sînt amîndouă adevărate rezultă că $v(p) = 0$. Asemănător, $v(q) = 0$, căci p_3 și p_4 nu sînt amîndouă adevărate; de asemenea, $v(r) = 1$, căci p_5, p_4, p_1 sînt propoziții adevărate; încă, $v(s) = 1$; $v(t) = 0$; $v(u) = 0$.

III.94. Dacă se dau două sau mai multe propoziții, cu ajutorul lor și al cuvîntului „sau", între ele, se poate obține o nouă propoziție. Această nouă propoziție este adevărată cînd *cel puțin* o propoziție din cele care o formează este adevărată; în caz contrar, cînd toate propozițiile ce o formează sînt false, noua propoziție este falsă.

Găsiți valoarea logică a propozițiilor:

$p_1: 3 < 5$ sau $2 = 5$; $p_2: 11 : 11 = 0$ sau $2 - 2 = 0$; $p_3: 0 \neq 5$ sau $7 > 1$; $p_4: 2^5 = 10$ sau $45 \notin \mathbb{N}$ sau pătratul are patru laturi; p_5: $2 + 2 \cdot 2 = 8$ sau $2^3 = 6$; $p_6: 7 - 8 \in \mathbb{N}$ sau $8 - 7 \notin \mathbb{N}$; $p_7: \Phi \in \mathbb{N}$ sau $2 \in \{2\}$ sau $2 \subset \{2\}$; p_8: $3^3 = 9$ sau $27^2 = 729$; p_9: $3 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot 6$ sau $7 \cdot 9 = 9 \cdot 7$ sau $(2^5)^2 = 2^7$; $p_{10}: (2^4)^3 = 2^{12}$ sau $(2^3)^2 = 2^{3^2}$.

R. Avem: $v(p_1) = 1$; $v(p_2) = 1$; $v(p_3) = 1$; $v(p_4) = 1$; $v(p_5) = 0$; $v(p_6) = 0$; $v(p_7) = 1$; $v(p_8) = 1$; $v(p_9) = 1$; $v(p_{10}) = 1$.

III.95[PO]. Pentru cumpărarea unui obiect, patru elevi au contribuit cu sume de bani diferite. Aflați suma cu care a contribuit fiecare dacă toate propozițiile ce urmează sînt adevărate:

p_1: Primul a dat 16 lei sau 13 lei sau 31 lei;
p_2: Al doilea a dat 21 lei sau 31 lei;
p_3: Al treilea nu a dat 13 lei;
p_4: Al patrulea a dat 21 lei.

(C. Cărbunaru, I. Gheorghilă)

R. Din $v(p_4) = 1$ rezultă că al patrulea a dat 21 lei. Cum sumele sînt diferite, a mai rămas să repartizăm cîte unul din numerele 16, 13, 31 la ceilalți trei. Din $v(p_2) = 1$ rezultă că al doilea a dat 31 lei, căci propoziția „a dat 21 lei" este falsă deoarece 21 de lei a dat al patrulea. Au mai rămas numerele 16 și 13. Din $v(p_3) = 1$ rezultă că al treilea a dat 16 lei. Rămîne că primul a contribuit cu 13 lei, căci $v(p_1) = 1$.

III.96[PO]. În clasa a V-a C, în pauza mare s-a spart un geam. În clasă au fost numai Alin, Costică, Nelu și Vasile. La întrebarea dirigintelui au răspuns:

Alin: Costică a fost!
Costică: Vasile l-a spart!
Nelu: Nu eu am fost!
Vasile: Costică minte dacă spune că eu l-am spart.

a) Cine a spart geamul dacă numai unul spune adevărul?

b) Cine a spart geamul dacă numai unul minte?

R. a) Presupunem, pe rînd, că Alin, Costică, Nelu și Vasile spun adevărul și verificăm valoarea de adevăr a afirmațiilor celorlalți. Întocmim următorul tabel:

	Spune adevărul			
	Alin	Costică	Nelu	Vasile
Alin	*A*	*F*	?	*F*
Costică	*F*	*A*	?	*F*
Nelu	*A*	*A*	*A*	?
Vasile	*A*	*F*	?	*A*
	a spart geamul			
	Costică	Vasile	?	?

Numai Nelu putea să spargă geamul (dacă trei au mințit și unul a spus adevărul). Dacă Vasile spune adevărul, atunci Costică minte, la fel și Alin și Nelu.

b) Dacă numai unul a mințit atunci Costică a mințit și el a spart geamul.

III.97. După un concurs de șah, Ana, Bea, Cecilia, Dora și Estera spun :

Ana : Dora este a doua, din păcate eu sînt numai a treia ;
Bea : Sînt prima, Cecilia este a doua ;
Cecilia : Sînt a treia, săraca Bea e ultima ;
Dora : Sînt a doua, Estera e a patra ;
Estera : Sînt a patra, Ana e prima.

Știind că din afirmațiile fiecărei fetițe una este adevărată iar cealaltă este falsă, aflați ordinea după concurs.

R. Pe baza datelor problemei întocmim următorul tabel :

afirmă / despre	Ana	Bea	Cecilia	Dora	Estera
Ana	3				1
Bea		1	5		
Cecilia		2	3		
Dora	2			2	
Estera				4	4

Dora și Estera afirmă că Estera este pe locul 4. Dacă aceste afirmații sînt adevărate, atunci celelalte afirmații fiind false, rezultă că Ana nu este prima și Dora nu este a doua. Dar dacă Dora nu este a doua atunci a doua este Cecilia și ea nu e a treia. A treia este Ana. Ce loc ocupă Bea? Afirmația ei după care Cecilia este a doua fiind adevărată, atunci cea după care ea, Bea, e prima, este falsă. Deci Bea este pe locul cinci.

După cum se vede din tabelul de mai jos, faptul că din afirmațiile fetițelor una e adevărată, iar cealaltă falsă, s-a verificat.

Locurile 2, 3, 4, 5 fiind ocupate, pentru Dora rămîne locul I. Deci ordinea este : 1. Dora, 2. Cecilia, 3. Ana, 4. Estera, 5. Bea.

Comentariu : Problema este inspirată dintr-una din problemele date la olimpiada micilor matematicieni-pionieri în 1981 în *Ungaria* și apărută în „*A Matematika Tanitása*" (*Predarea matematicii*) nr. 3, 1981.

În revistă se dă doar rezultatul problemei și se arată că din 35 de elevi, 16 au dat rezolvarea corectă, rezolvarea globală fiind 76%.

Asemenea probleme dezvoltă în mod deosebit gîndirea logică, obligînd rezolvitorul să citească atent textul, să găsească relații juste între afirmațiile adevărate și cele false.

despre \ afirmă	Ana	Bea	Cecilia	Dora	Estera
Ana	$3a$				$1f$
Bea		$1f$	$5a$		
Cecilia		$2a$	$3f$		
Dora	$2f$			$2f$	
Estera				$4a$	$4a$

III.98[M; PO]. Să se determine mulţimile X şi Y, ştiind că în acelaşi timp următoarele afirmaţii sînt adevărate:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$,
c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$,
d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

R. Din $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$ rezultă $\{4, 6, 9\} \subset X$ şi $\{4, 6, 9\} \subset Y$. Din $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ rezultă $\{1, 6, 8, 9\} \subset X$. Din $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ rezultă $\{5, 6, 7, 9\} \subset Y$.

Pînă acum avem $\{1, 4, 6, 8, 9\} \subset X$, $\{4, 5, 6, 7, 9\} \subset Y$.

Verificînd cu ajutorul reuniunii observăm că lipsesc elementele 2 şi 3.

Nici 2, nici 3 nu pot fi elemente comune celor două mulţimi, deoarece nu aparţin intersecţiei lor. Elementul 2 nu poate fi element al lui X pentru că nu aparţine mulţimii $X \cup \{3, 4, 5\}$. Deci 2 poate fi numai element al mulţimii Y. De asemenea, 3 nu poate fi element al mulţimii Y deoarece nu aparţine mulţimii $Y \cup \{2, 4, 8\}$. Deci 3 este element al mulţimii X.

Mulţimile căutate sînt:

$$X = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}, \quad Y = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}.$$

III.99[PP]. Se dă mulţimea $P = \{2; 4; 8; 9\}$ şi propoziţia cu variabilă $r: x \in P, x > 5$. Găsiţi mulţimea soluţiilor ei.

R. Pentru $x = 2$ avem $2 > 5$, $v(r) = 0$. Pentru $x = 4$ avem $4 > 5$, $v(r) = 0$. Pentru $x = 8$ avem $8 > 5$, $v(r) = 1$. Pentru $x = 9$ avem $9 > 5$, $v(r) = 1$. Deci $S = \{8; 9\}$.

III.100. Găsiţi mulţimile de soluţii pentru fiecare din propoziţiile cu variabilă care urmează:

$p: x \in A,\ x < 4$; $q: x \in A,\ x < 5$; $r: x \in A,\ x < 12$; $s: x \in A,\ x \geqslant 6$; $t: x \in A,\ x > 6$, unde $A = \{3; 4; 5; 6\}$.

R. Avem $S_p = \{3\}$; $S_q = \{3; 4\}$; $S_r = A$; $S_s = \{6\}$; $S_t = \Phi$.

III.101 Se dă $A = \{0; 2; 4; 6\}$. Găsiţi mulţimea de soluţii la următoarele propoziţii cu variabila $x \in A$:

$p_1: x + 2 = 4$; $p_2: x^2 = 4$; $p_3: 2x + 1 < 10$; $p_4: x - 1$ este număr natural; $p_5: 4(x + 1) \leqslant 3$.

R. Avem mulțimea de soluții $S_{p_1}=\{2\}$; $S_{p_2}=\{2\}$; $S_{p_3}=\{0 ; 2 ; 4\}$; $S_{p_4}=\{2 ; 4 ; 6\}$. $S_{p_5}=\Phi$.

III.102. Se dau următoarelor propoziții cu o variabilă:

$p_1 : x-3=4$, $x \in \{1 ; 2 ; 7\}$; $p_2 : x+5>12$; $x \in \mathbb{N}$; $p_3 : 1+x$ este număr natural, $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$; $p_4 : 6x+3=2x$, $x \in \mathbb{N}^*$; $p_5 : 2(x-1)+3<0$, $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$; $p_6 : x$ este băiat, $x \in \{$Ion; Elena; Sanda$\}$; $p_7 : 6+x$ este egal cu $2x$, $x \in \{6 ; 4 ; 5 ; 0\}$.

Decideți care sînt ecuații și care sînt inecuații.

R. Ecuații sînt: p_1, p_4, p_7. Inecuații sînt: p_2, p_5.

III.103. Rezolvați ecuațiile:

a) $4x-1=x+11$, $x \in \{1 ; 4 ; 0\}$; b) $x+3=5$, $x \in \mathbb{N}$; c) $6x+3=4(x+1)+x+1$, $x \in \{0 ; 2 ; 10\}$; d) $6y+2y=8$, $y \in \mathbb{N}$; e) $3x=x+8$, $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$; f) $3x-4=2x$, $x \in \{1 ; 2 ; 3\}$; g) $2y=y+6$, $y \in \{1 ; 6\}$; h) $3+x=2$, $x \in \mathbb{N}$; i) $x-2=10$, $x \in \{12\}$; j) $99x+2x=1\,010$, $x \in \{1 ; 2\}$; k) $4+x+3x=20$, $x \in \{1 ; 2 ; 4\}$; l) $x^2-2=2$, $x \in \{3 ; 2 ; 5\}$; m) $x^2-3x+2=0$, $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

R. a) Dacă $x=1$, avem: $4 \cdot 1-1=1+11$, propoziție falsă. Dacă $x=4$, avem: $4 \cdot 4-1=4+11$, propoziție adevărată. Dacă $x=0$ avem: $4 \cdot 0-1=0+11$, propoziție falsă. Deci mulțimea soluțiilor este $S=\{4\}$; b) Deoarece $x \in \mathbb{N}$, este imposibil să verificăm toate elementele lui $\mathbb{N}$. Putem totuși scrie $x=5-3$, $x=2$; cum $2 \in \mathbb{N}$ avem $S=\{2\}$; c) Pentru comoditate mai putem scrie: $6x+3=4x+4+x+1$ sau $6x+3=5x+5$. Procedăm ca la exercițiul a) și găsim că $S=\{2\}$; d) Ecuația se mai scrie $8y=8$ de unde $y=8:8$, deci $y=1$, deci $S=\{1\}$.

Avem, în continuare:

e) $S=\{4\}$; f) $S=\Phi$; g) $S=\{6\}$; h) $S=\Phi$; i) $S=\{12\}$; j) $S=\Phi$; k) $S=\{4\}$; l) $S=\{2\}$; m) $S=\{1 ; 2\}$.

III.104. Rezolvați inecuațiile:

a) $3x<7$, $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$; b) $3(x+2)>2+5x$, $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$; c) $6x-5x \geqslant 2$, $x \in \mathbb{N}$; d) $y+14 \leqslant 15+2y$, $y \in \{1 ; 2\}$. e) $2x<9$, $x \in \{1 ; 3 ; 5\}$; f) $4+x<2x$, $x \in \{1 ; 10 ; 11\}$; g) $9x+12x-20x<4$, $x \in \{0 ; 1 ; 7\}$; h) $4<4x-3x$, $x \in \mathbb{N}$.

R. a) Dacă $x=0$, avem $0<7$, propoziție adevărată. Dacă $x=1$, avem $3<7$, propoziție adevărată. Dacă $x=2$, avem $6<7$, propoziție adevărată. Dacă $x=3$, avem $9<7$, propoziție falsă. Deci $S=\{0 ; 1 ; 2\}$. b) $S=\{0 ; 1\}$; c) Mai putem scrie $x \geqslant 2$; cum $x \in \mathbb{N}$ avem că $S=\{2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$; aceasta se mai poate scrie $S=\mathbb{N}-\{0 ; 1\}$. d) $S=\{1 ; 2\}$; e) $S=\{1 ; 3\}$; f) $S=\{10 ; 11\}$; g) $S=\{0 ; 1\}$; h) $S=\{5 ; 6 ; 7 ; \ldots\}=\mathbb{N}-\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

III.105. Se dau perechile de ecuații:

a) $3x+2=5$, $x \in \{0 ; 1 ; 5\}$ și $2x+6=3x+5$, $x \in \{0 ; 1 ; 5\}$;

b) $4x-2=6$, $x \in \{1 ; 2 ; 3\}$ și $4x+1=13$, $x \in \{1 ; 2 ; 3\}$;

c) $x+6=1+2x$, $x \in \{3 ; 1 ; 5\}$ și $2x+3=3x-2$, $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$;

d) $12x+1=11x+5$, $x \in \{10 ; 4\}$ și $6x-10=x$, $x \in \{12 ; 2\}$;

e) $4x=12$, $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$ și $6+x=1$, $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Cercetați dacă, în fiecare caz, ecuațiile au aceeași mulțime de soluții.

R. a) La prima ecuație, pentru $x = 0$, obținem $2 = 5$ adică propoziție falsă; pentru $x = 1$, obținem $5 = 5$ adică propoziție adevărată, iar pentru $x = 5$, obținem $17 = 5$ adică propoziție falsă.

Mulțimea de soluție este $S_1 = \{1\}$.

La a doua ecuație, pentru $x = 0$, obținem $6 = 5$, adică propoziție falsă; pentru $x = 1$, obținem $8 = 8$, adică propoziție adevărată; pentru $x = 5$, obținem $16 = 20$, adică propoziție falsă. Mulțimea de soluție este $S_2 = \{1\}$.

Se constată că $S_1 = S_2$.

b) Procedăm asemănător și obținem $S_1 = \{2\}$, respectiv $S_2 = \{3\}$. Deci $S_1 \neq S_2$.

Avem, în continuare:

c) $S_1 = \{5\}$, $S_2 = \{5\}$, $S_1 = S_2$;

d) Nu; e) $S_1 = \Phi$, $S_2 = \Phi$, $S_1 = S_2$.

III.106. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile următoare:

a) $4x + 2x = 6$; b) $6x + 48x + 32x = 172$; c) $40x - 39x = 8$; d) $13x - 3x = 24$; e) $112x - 12x = 0$; f) $6x + 2x = 8$; g) $3x - x = 4$; h) $12x + 13x = 25$; i) $45x - 40x = 100$; j) $x + x = 40$; k) $x + x + x + x = 40$; l) $18 = 2x + x$; m) $16 = 4x + 4x - 6x$; n) $20 = 4x - 3x$; o) $35x + 36x + 37x = 3 \cdot 36$; p) $1\,209x - 209x = 0$; r) $145x + 25x - 70x = 0$.

R. a) Ecuația dată se mai scrie $6x = 6$ căci în loc de $4x + 2x$ putem scrie $6x$. Așadar, $x = 6 : 6$, deci $x = 1$ deci mulțimea de soluții este $S = \{1\}$. Evident, $S \subset \mathbb{N}$.

Verificare. $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$ este propoziție adevărată;

b) Avem, succesiv, ecuații provenite din cea dată: $86x = 172$; $x = 172 : 86$; $x = 2$, deci $S = \{2\}$; $S \subset \mathbb{N}$.

Verificare. $6 \cdot 2 + 48 \cdot 2 + 32 \cdot 2 = 12 + 96 + 64 = 172$.

c) Avem $x = 8$, deci $S = \{8\}$.

Verificare. $40 \cdot 8 - 39 \cdot 8 = 320 - 312 = 8$.

d) Avem $10x = 24$, deci $x = 24 : 10$. Deoarece $24 : 10 \notin \mathbb{N}$ rezultă că $S = \Phi$.

e) Avem $100x = 0$ deci $x = 0 : 100$, deci $x = 0$, de unde $S = \{0\}$.

Verificare. $112 \cdot 0 - 12 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$.

În continuare:

f) $x = 1$; $S = \{1\}$; g) $x = 2$, $S = \{2\}$; h) $S = \{1\}$; i) $S = \{20\}$; j) $S = \{20\}$; k) $S = \{10\}$; l) $18 = 3x$; $x = 18 : 3$; $x = 6$; $S = \{6\}$; m) $S = \{8\}$; n) $S = \{20\}$; o) $S = \{1\}$; p) $S = \{0\}$; r) $S = \{0\}$.

III.107. Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuațiile:

a) $7x < 14$; b) $4x < 12$; c) $5x < 40$; d) $25x < 250$; e) $42x \leqslant 84$; f) $72x \leqslant 216$; g) $20x + 50x \leqslant 210$; h) $43x + 17x < 360$; i) $2x + 4x < 12$; j) $3x + 2x + 7x \leqslant 12$; k) $45x + 15x + 10x \leqslant 700$; l) $x + 3x > 8$; m) $4x + 4x + x \geqslant 18$; n) $2(x + 3x) \leqslant 16$; o) $2(4x + 9x - 3x) + 2(15x - 5x) < 100$; p) $2(9x + 5x - x) + 3(4x - x) \leqslant 70$; r) $3(2x - x) + 4(3x - 2x) \leqslant 42$; s) $(25x - 6x) \cdot 5 + 17(x + 2x) \geqslant 292$.

R. a) Împărţim ambii membri cu 7 şi obţinem $x < 2$ deci $S = \{0; 1\}$;

b) Împărţim ambii membri cu 4 şi obţinem: $x < 3$, deci $S = \{0; 1; 2\}$.

Avem, în continuare:

c) $x < 8$; $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$;

d) $x < 10$; $S = \{0; 1; 2; \ldots; 8; 9\}$;

e) $x \leqslant 2$; $S = \{0; 1; 2\}$; f) $x \leqslant 3$; $S = \{0; 1; 2; 3\}$;

g) Deoarece în loc de $20x + 50x$ putem scrie $70x$, avem de rezolvat inecuaţia $70x \leqslant 210$. Împărţim în ambii membri cu 70 şi avem $x \leqslant 3$. Deci $S = \{0; 1; 2; 3\}$;

Avem, în continuare:

h) $60x < 360$, deci $x < 6$, deci $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; i) $6x < 12$, deci $x < 2$, deci $S = \{0; 1\}$; j) $12x \leqslant 12$, deci $x \leqslant 1$, deci $S = \{0; 1\}$; k) $70x \leqslant 700$, deci $x \leqslant 10$, deci $S = \{0; 1; 2; \ldots; 10\}$; l) $4x > 8$, deci $x > 2$, deci $S = \{3; 4; 5; 6; \ldots\}$.

Această mulţime se mai scrie $\mathbb{N} - \{0; 1; 2\}$.

De asemenea:

m) $9x \geqslant 18$, deci $x \geqslant 2$, deci $S = \{2; 3; 4; 5; \ldots\}$ sau, atfel scris, $S = \mathbb{N} - \{0; 1\}$;

n) Efectuăm paranteza:

$$2 \cdot 4x \leqslant 16;\ 8x \leqslant 16;\ x \leqslant 2;\ S = \{0; 1; 2\};$$

o) Avem $2(10x) + 2(10x) < 100$, de unde $20x + 20x < 100$, adică $40x < 100$; împărţim ambii membri cu 20 şi obţinem $2x < 5$, de unde $S = \{0; 1; 2\}$.

În sfîrşit:

p) $S = \{0; 1; 2\}$; r) $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; s) $S = \mathbb{N} - \{0; 1\}$.

III.108. Găsiţi un număr, element al mulţimii $A = \{3; 0; 2; 5; 6\}$, astfel încît să-l adunăm cu 7, iar rezultatul să-l înmulţim cu 3 şi să obţinem 36.

R. Putem verifica, pe rînd, elementele mulţimii A, constatînd pentru care din ele obţinem propoziţia din text adevărată.

Mai comod este să notăm cu x numărul căutat şi obţinem ecuaţia:

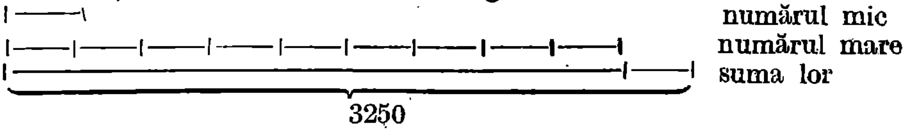
$$(x + 7) \cdot 3 = 36.$$

Găsim că numărul cerut este 5, după ce am înlocuit, pe rînd, elementele mulţimii A.

III.109[PO]. Un număr este de 9 ori mai mare decît altul. Găsiţi cele două numere ştiind că suma lor este:

a) 3 250; b) 50; c) 420; d) 12 340.

R. a) *Metoda I.* Folosim metoda figurativă.



Deoarece suma lor este 3 250 şi este egală cu numărul mic înmulţit cu 10, putem calcula numărul mic:

$$3250 : 10 = 325.$$

Atunci numărul mare este $325 \cdot 9 = 2\,925$.

Metoda a II-a. Notăm cu x numărul mic. Numărul mare este $9x$. Suma lor se exprimă astfel $x + 9x$; ea fiind 2 250 putem obţine ecuaţia:

$$x + 9x = 3\,250$$

Rezolvăm ecuaţia: $10x = 3250$ de unde $x = 325$ (numărul mic). Numărul mare este $9 . 325 = 2\,925$.

Avem:

b) 5 şi 45; c) 42 şi 378; d) 1234 şi 11 106.

III.110PO. Un număr este de 250 de ori mai mare decît altul. Aflaţi numerele ştiind că suma lor este:

a) 10 793; b) 2 510; c) 3 012.

R. a) Se observă că metoda figurativă este incomod de aplicat. Rezolvăm problema cu ajutorul unei ecuaţii. Notăm cu x numărul mic. Cu această notaţie şi cu afirmaţia „de 250 de ori mai mare" putem scrie numărul mare: $250x$.

Suma celor două numere o exprimăm astfel: $x + 250x$. În problemă suma lor este 10 793.

Avem ecuaţia $x + 250x = 10\,793$. O rezolvăm şi avem: $251x = 10\,793$, sau $x = 10\,793 : 251$, deci $x = 43$ care reprezintă numărul mic.

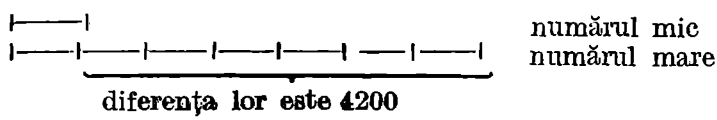
Numărul mare este $43 \cdot 250$ adică 10 750.

b) Numerele sînt 10 şi 2 500; c) Numerele sînt 12 şi 3 000.

III.111PO. Un număr natural este de 7 ori mai mare decît altul. Aflaţi cele două numere ştiind că diferenţa lor este:

a) 4 200; b) 30; c) 300; d) 1 242.

R. a) *Metoda I*. Apelăm la metoda figurativă.



Constatăm că diferenţa lor este egală cu numărul mic înmulţit cu şase. Numărul mic este 4 200 : 6, adică 700, iar numărul mare este $7 \cdot 700$, adică 4 900.

Metoda a II-a. Notăm prin x numărul mic. Conform textului problemei, al doilea număr este $7x$. Exprimăm cu datele găsite de noi diferenţa celor două numere. Ea este $7x - x$. Dar, în problemă, diferenţa este dată : 4 200. Aşadar, obţinem ecuaţia :

$$7x - x = 4200.$$

O rezolvăm în $\mathbb{N}$; avem $6x = 4\,200$, deci $x = 4\,200 : 6$, adică $x = 700$ (numărul mic), şi $7x = 7 \cdot 700 = 4\,900$ (numărul mare).

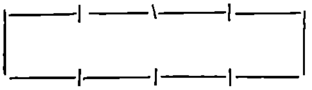
În continuare :

b) 5 şi 35 ; c) 50 şi 350 ; d) 207 şi 1 449.

III.112[PO]**.** O latură a unui dreptunghi are măsura de patru ori mai mare decît cealaltă. Calculaţi măsurile lor ştiind că perimetrul este :

a) 4 250 m ; b) 100 m ; c) 320 m ; d) 420 hm 250 m.

R. a) *Metoda I.* Folosim metoda figurativă. Latura mică fiind lăţimea, constatăm că perimetrul este format din măsura lăţimii înmulţită



cu 10. Aşadar, lăţimea este de 4 250 m : 10, adică 425 m. Deoarece, conform enunţului, lungimea este de 4 ori mai mare, rezultă că lungimea este 425 m · 4 adică 1 700 m.

Metoda a II-a. Notăm cu x măsura lăţimii. Atunci măsura lungimii este $4x$. Perimetrul este :

$$2x + 2 \cdot 4x.$$

Conform problemei, el este egal cu 4 250 m. Deci, obţinem ecuaţia :

$$2x + 2 \cdot 4x = 4\,250.$$

Rezolvăm aceasta ecuaţie în $\mathbb{N}$:

$$2x + 8x = 4\,250 ;\ 10x = 4\,250 ;\ x = 425$$

care reprezintă măsura în metri a lăţimii. Avem acum măsura lungimii :

$$4x = 4 \cdot 425\,\text{m} = 1700\ \text{m}.$$

În continuare avem soluţiile :

b) 10 ; 10 ; 40 ; 40 ; c) 32 ; 32 ; 128 ; 128 ; d) 42 hm 25 m ; 42 hm 25 m ; 169 hm ; 169 hm.

III.113. Doi biciclişti pornesc în acelaşi timp din oraşele A şi B, situate la distanţa de 130 km unul de altul.

Ştiind că cel care pleacă din oraşul A către oraşul B are viteza 14 km/h, iar cel care merge din oraşul B în oraşul A are viteza 12 km/h, aflaţi peste cît timp şi la ce distanţă de oraşul A se întîlnesc cei doi biciclişti.

R. Aflăm peste cît timp se întîlnesc cu ajutorul formulei $s = v \cdot t$. De aici :

$$130 = (14 + 12) \cdot t$$

Deci $t = 130 : 26$, de unde $t = 5$ ore.

Aflăm la ce distanţă de oraşul A se întîlnesc. Din formula :

$$s = v \cdot t$$

rezultă $s = 14 \cdot 5$, deci $s = 70$ km.

Deci, la 5 ore după pornire, se întîlnesc la 70 km de oraşul A.

III.114[PO]. Se dau mulțimile $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 9\}$, $B = \{0 ; 1 ; 3 ; 6\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi :

$C = \{x \mid x \in A$ și există $y \in B$ astfel ca $x < y\}$,

$D = \{x \mid x \in A$ și există $y \in B$ astfel ca $x + 1 < y + 1\}$,

$E = \{x \mid x \in A$ și există $y \in A \cap B$ astfel ca $x > y\}$,

$F = \{x \mid x \in A$ și există $y \in A \cap B$ astfel ca $x + 15 > y + 15\}$.

R. Observăm că elementele mulțimii C au proprietatea exprimată prin „$x \in A$" deci $C \subseteq A$, adică C este o submulțime a mulțimii A.

Vom lua, pe rînd, toate elementele mulțimii A, notate cu x, și vom cerceta dacă pentru fiecare există în mulțimea B măcar un element y pentru care $x < y$. Dacă $x = 0$, există în B elementul $y = 1$ sau $y = 3$ sau chiar $y = 6$ pentru care să avem $0 < 1$ $(0 < 3,\ 0 < 6)$.

Dacă $x = 1$, există $y \in B$, $y = 3$, astfel încît $1 < 3$.
Dacă $x = 2$, există $y \in B$, $y = 3$, astfel încît $2 < 3$.
Dacă $x = 5$, există $y \in B$, $y = 6$, astfel încît $5 < 6$.
Dacă $x = 7$, nu există $y \in B$ cu proprietatea cerută.
Dacă $x = 9$, nu există $y \in B$ cu proprietatea cerută.

Deci $C = \{0 ; 1 ; 2 ; 5\}$. La mulțimea D, proprietatea $x + 1 < y + 1$ se mai scrie $x < y$ și deci $D = C$.

Pentru mulțimea E vom scrie că $A \cap B = \{0 ; 1\}$.

Procedăm asemănător și găsim că $E = \{2 ; 5 ; 7 ; 9\}$.

La mulțimea F proprietatea $x + 15 > y + 15$ se mai scrie $x > y$ și deci $F = E$.

III.115[PO]. Aflați numărul natural x știind că :

a) $xa + xb = 20$ și $a + b = 2$; b) $xa - xb = 20$ și $a - b = 5$; c) $x + xa + xb = 21$ și $a + b = 2$; d) $a + b + c = 300$ și $ax + bx + xc = 3\,000$; e) $ax + xc = 50$ și $a + c = 5$; f) $a + b - c = 20$ și $ax + bx - cx = 200$; g) $3ax + 2bx = 45$ și $3a + 2b = 5$; h) $3bx + 2ax - cx = 40$ și $3b + 2a - c = 12$

R. a) Avem x factor comun și putem scrie $x(a + b) = 20$; cum $a + b = 2$ obținem ecuația $x \cdot 2 = 20$, unde $x = 10$.

Avem, în continuare :

b) $x(a - b) = 20$, $x \cdot 5 = 20$, $x = 4$;

c) $x(1 + a + b) = 21$; $x(1 + 2) = 21$; $x \cdot 3 = 21$; $x = 7$;

d) $x = 10$; e) $x = 10$; f) $x = 10$; g) $x = 9$; h) $x \notin \mathbb{N}$.

TESTUL nr. 7[1]

1.(2p) Enumerați elementele următoarelor mulțimi :

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 29 \leqslant x < 31\}$,

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 39, x \leqslant 45\}$,

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 99 < x \leqslant 103$, x este scris cu două cifre$\}$.

2. (2p). Efectuați :

a) $\{2 ; 3 ; 5\} \cup \{1 ; 2\}$; b) $\{4 ; 1 ; 2 ; 5\} \cap \{4 ; 2 ; 7\}$; c) $\{1 ; 3\} \cap \{3 ; 5 ; 6\}$; d) $\{1 ; 2 ; 4\} \cap \{3 ; 5\}$; e) $\{2 ; 3 ; 6\} - \{1 ; 2 ; 7\}$; f) $\{1\} - \Phi$; g) $\{3 ; 9\} - \{3 ; 9 ; 2\}$; h) $\Phi \cap \{2\}$.

[1] Răspunsurile la teste se găsesc la pagina 338.

3. (5p) Găsiți $x \in \mathbb{N}$ unde $x = 2 + a \cdot 3 - 2^a$, în cazul cînd $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

4.(4p) Calculați :

a) $3x + 2x$; b) $5x + 4x + 2x$; c) $6x - 2x$; d) $20x - 19x$; e) $4x + x$; f) $20x - x$; g) $42x + 3x - 12x$; h) $209x + 31y + 10x + 2y$.

5.(3p) Găsiți valoarea logică a următoarelor propoziții :

$p_1 : 209 \notin \mathbb{N}$; $p_2 : 23\,000$ g $\neq 230$ dag ; $p_3 : 2 + 2^3 = 8$; $p_4 : \Phi \in \{\Phi\}$; $p_5 : 101_2 = 5$; $p_6 : 0 \in \Phi$.

6.(4p) Rezolvați în $\mathbb{N}$:

a) $x + 5 = 9$; b) $2x = 10$; c) $x + 4 < 6$; d) $2x + 3x = 10$; e) $6x + 2x = 16$; f) $29x - 28x \leqslant 3$; g) $x + 4x = 400$; h) $37x + 41x - 77x > 2$-

Notă. Timp de lucru : 45 minute.

TESTUL nr. 8

1.(3p) a) Găsiți x astfel încît $\{1; 2\} \subset \{3; x; 1\}$;

b) Găsiți x astfel încît $\{2; 3; x\} = \{5; 2; 3\}$;

c) Găsiți x astfel încît $\{1\} \cup \{x\} = \{1; 2\}$.

2.(2p) Se știe că $ab = 70$ și $ac = 60$. Calculați $a(b + c)$.

3.(3p) Calculați 3^{3n+2} știind că $27^n = a$.

4.(2p) Fiind date mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{3; 5; 7; 9; 10\}$, enumerați mulțimile :

$$D = (A - B) \cap C;\ E = (A \cup B) - (A \cup C);$$

$$F = (A - B) \cup (A - C);\ G = (A - B) \cap (A - C).$$

5.(3p) Calculați :

a) $72 \cdot 99 + 99 \cdot 28$; b) $499 + 499 \cdot 99$; c) $92 \cdot 101 - 80 \cdot 101 - 12 \cdot 101$; d) $2\,567 \cdot 42 + 315 \cdot 21$; e) $499 \cdot x + 499 \cdot 25 + 499 \cdot 75$; f) $9\,189 \cdot a - 9\,189 \cdot b$.

6.(2p) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$:

a) $x + 2x + 3x + \ldots + 9x = 45$;

b) $46x - 9x - 8x - 7x - \ldots - 2x - 1 < 1$

7.(2p) Rezolvați :

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x \in \{0; 1; 2; 3\}$;

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

8.(3p) Găsiți numărul natural x astfel încît :

$$2x = 2 + 2 \cdot \{2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 2)]\} + 1.$$

Notă. Timp de lucru : 90 minute.

TESTUL nr. 9

1.(2p) Găsiți mulțimile A și B știind că :

$A \cap B = \{1; 2\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $A - B = \{6\}$.

2.(3p) Se dau mulțimile $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $B = \{2 ; 3 ; 5\}$. Găsiți valorile logice ale propozițiilor următoare :

$p_1 : 2 \in A$ sau $7 \in B$;
$p_2 : 4 \notin A$ și $2 \in B$;
$p_3 : 2 \in A$ sau $2 \notin B$;
$p_4 : 5 \notin A$ și $5 \in B$;
$p_5 : A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ sau $A - B = \Phi$;
$p_6 : 1 \in A$ și $2 \in B$.

3$^{M;O}$.(3p). Determinați perechile de numere naturale care au suma pătratelor egală cu 50.

4$^{M;O}$.(2p). Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația :

$$6 - 6 : (18 - 12) = [8 - 3 \cdot (9 - 7)] \cdot x.$$

5.(4p) Suma a patru numere naturale este 510. Primul este de 10 ori mai mare decît al doilea ; al treilea de 15 ori mai mare decît al doilea ; al patrulea este de 25 de ori mai mare decît al doilea.

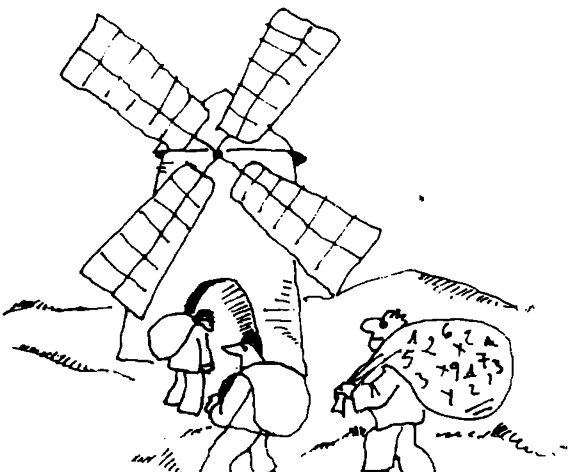
Aflați numerele.

6.(4p) Suma a patru numere naturale este 7 600. Primul este de 5 ori mai mare decît al doilea ; al doilea de 10 ori mai mare decît al treilea, iar al patrulea de 15 ori mai mare decît al treilea.

Aflați numerele.

7.(2p) Un număr natural este de 4 ori mai mare decît altul. Aflați numerele, știind că suma lor nu este mai mare decît 10.

Notă. Timp de lucru 2 ore.



CAPITOLUL IV

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Noțiuni teoretice

În acest capitol vor fi folosite, printre altele, următoarele cunoștințe :

a) $x|y$ se citește : „x divide pe y" sau : „x este divizorul lui y" și înseamnă că există numărul natural t astfel încît :

$$x \cdot t = y.$$

b) $x|y$ se mai citește : „y este divizibil cu x" sau : „y este multiplul lui x".

c) $x \nmid y$ se citește : „x nu divide pe y".

d) $1|x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ adică numărul natural 1 este divizorul oricărui număr natural.

e) $a|0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$, adică orice număr natural este divizor al lui 0.

f) $x|x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}^*$, adică numărul natural x este divizor al lui x.

g) Dacă $a|b$, atunci $b \nmid a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$ și $b \in \mathbb{N}^*$, $b < a$.

h) Dacă $a|b$ și $b|a$, atunci $a = b$ oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$ și $b \in \mathbb{N}^*$.

i) Dacă $a|b$ și $b|c$, atunci $a|c$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$ și $b \in \mathbb{N}^*$ și $c \in \mathbb{N}$.

j) Dacă $a|b$ și $a|c$, atunci $a|(b+c)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}^*$.

k) Dacă $a|b$ și $a|c$, atunci $a|(b-c)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$, $b \geqslant c$.

l) Dacă $a|b$ și $a \nmid c$, atunci $a \nmid (b+c)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}^*$.

m) Dacă $a|(b+c)$, nu rezultă că $a|b$ și $a|c$.

n) Dacă $a \nmid b$ și $a \nmid c$, nu rezultă că $a \nmid (b+c)$.

o) Dacă $m|a$, atunci $m|a \cdot b$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$.

p) Criteriul de divizibilitate cu 10 : ***un număr natural cu ultima cifră 0, este un număr divizibil cu 10.***

q) Criteriul de divizibilitate cu 100 : ***un număr natural cu ultimele două cifre egale cu cifra 0, este un număr divizibil cu 100.***

r) Criteriul de divizibilitate cu 2 : ***un număr natural avînd ultima cifră oricare din cifrele 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 este un număr divizibil cu 2.***

s) Un număr divizibil cu 2 se numește număr *par*. Un număr par se notează $2 \cdot a$ sau $2k$ sau $2l$ etc., unde a, k, l sînt numere naturale.

t) Un număr natural care nu este divizibil cu 2, adică care nu este par se numeşte număr *impar*. Ultima cifră a unui număr natural impar este una din cifrele 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9. Un număr impar se notează $2k+1$, unde $k \in \mathbb{N}$.

u) Criteriul de divizibilitate cu 5 : *un număr natural cu ultima cifră cifra 0 sau 5, este un număr divizibil cu 5.*

v) Criteriul de divizibilitate cu 4 : *un număr natural la care ultimele două cifre, în aceeaşi ordine, formează un număr divizibil cu 4, este un număr divizibil cu 4.*

x) Criteriul de dvizibilitate cu 25 : *un număr natural la care ultimele două cifre în aceeaşi ordine, formează un număr divizibil cu 25, este un număr divizibil cu 25.*

y) Criteriul de divizibilitate cu 3 : *un număr natural pentru care suma cifrelor este un număr divizibil cu 3, este un număr divizibil cu 3.*

z) Criteriul de divizibilitate cu 9 : *un număr natural pentru care suma cifrelor este un număr divizibil cu 9, este un număr divizibil cu 9.*

Vom folosi de asemenea, următoarele cunoştinţe :

a′) Un număr natural, diferit de numărul 1, care are ca divizori numai pe 1 şi pe el însuşi se numeşte număr *prim*.

b′) Un număr care divide mai multe numere se numeşte *divizor comun* al acestor nunere.

c′) Divizorul comun, cel mai mare, al mai multor numere se notează c.m.m.d.c. şi se numeşte *cel mai mare divizor comun*.

d′) Numerele care au cel mai mare divizor comun numărul 1 se numesc numere *prime între ele*.

Observaţie. Să nu se facă confuzie între număr prim (unul singur) şi numere prime între ele.

e′) *Teoremă*. Dacă un număr natural este divizibil cu două numere naturale prime între ele, atunci acel număr este divizibil cu produsul acestora.

f′) Un număr care este divizibil cu mai multe numere se numeşte *multiplu comun* al acestor numere.

g′) Multiplul comun, cel mai mic, diferit de 0, al mai multor numere se notează c.m.m.m.c. şi se numeşte *cel mai mic multiplu comun*.

Exerciţii şi probleme

IV.1. a) Scrieţi toţi divizorii naturali ai lui 8 ;

b) Scrieţi mulţimea de divizori naturali ai lui 18 ;

c) Scrieţi multiplii naturali ai numărului 5, mai mici sau egali ca 40.

d) Care dintre numerele 0 ; 3 ; 1 ; 2 ; 10 ; 14 ; 4 ; 5 ; 12, sînt divizori ai lui 6 ? Dar multipli ?

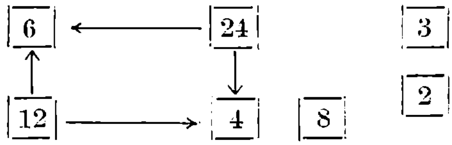
e) Scrieţi divizorii proprii ai numărului 30.

f) Scrieţi divizorii improprii ai numărului 7, apoi ai lui 16.

R. Avem :

a) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; b) {1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18} ; c) 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 ; d) 3 ; 1 ; 2 sînt divizori, iar 0 şi 12 multipli. e) 2; 3; 5; 6; 10; 15; f) 1 ; 7 pentru numărul 7 şi 1 şi 16 pentru numărul 16.

IV.2. Săgeţile din figura de mai jos arată divizorii proprii ai numărului de la care pornesc. De exemplu : $\boxed{12} \rightarrow \boxed{4}$ înseamnă : 12 se divide cu 4.



a) Completați figura. Cîte săgeți sînt în total?

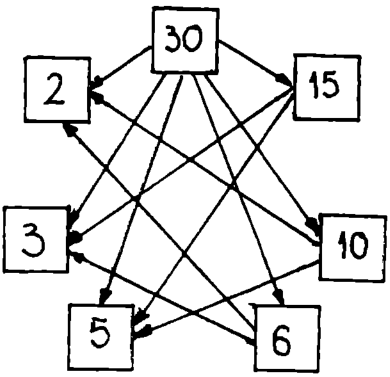
b) Alcătuiți figură asemenea pentru numărul 30. Figura trebuie să cuprindă toți divizorii proprii ai numărul respectiv.

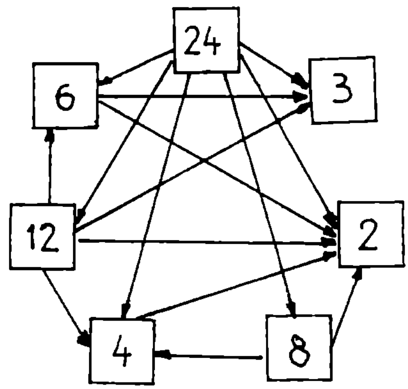
R. 24 are divizorii proprii :

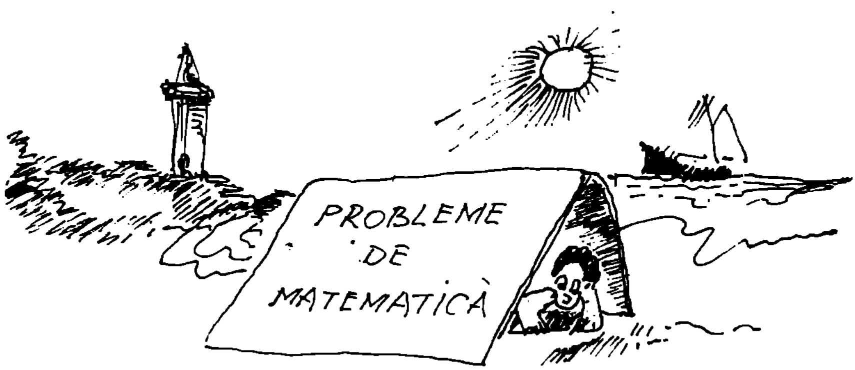
$$D_{24} = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}\ ;$$

De asemenea :

$D_{12} = \{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$; $D_8 = \{2,\ 4\}$; $D_6 = \{2,\ 3\}$; $D_4 = \{2\}$;







IV.3. Se dă mulțimea :

$$M = \{4\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 8\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 11\ ;\ 10\}.$$

Enumerați elementele mulțimilor :

$$A = \{x \mid x \in M \text{ și } x \mid 18\},\ B = \{x \mid x \in M \text{ și } 2 \mid x\},$$
$$C = \{x \mid x \in M \text{ și } x \mid 20\},\ D = \{x \mid x \in M \text{ și } x \mid 9\}.$$

R. Avem :

$$A = \{2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\}\ ;\ B = \{4\ ;\ 2\ ;\ 8\ ;\ 6\ ;\ 10\}\ ;$$

$$C = \{1 ; 2 ; 5 ; 10\} ; D = \{3 ; 9\}.$$

Observație. Elementele mulțimii A se pot găsi în două feluri: ori se iau pe rînd elementele mulțimii M și se rețin acelea pentru care obținem afirmația „$x|18$" adevărată, ori avem în vedere că afirmația „$x|18$" poate fi tradusă prin „x este divizor al lui 18" și deci se selectează dintre elementele ce aparțin lui M acelea care sînt divizori ai lui 18. Asemănător procedăm cu mulțimile C și D. Se mai observă că $D \subseteq A$.

IV.4. Se dau mulțimile $A = \{2 ; 3 ; 7 ; 11\}$ și $B = \{5 ; 6 ; 9 ; 12 ; 21 ; 22 ; 33 ; 49\}$. Stabiliți mulțimea C formată din elemente care aparțin mulțimii B astfel încît fiecare din elementele sale să aibă doi divizori diferiți printre elementele mulțimii A.

R. Mulțimea C este formată din elemente care aparțin mulțimii B deci C este o submulțime a mulțimii B. Cercetăm pe rînd elementele mulțimii B care îndeplinesc proprietatea impusă, anume să aibă doi divizori diferiți printre elementele mulțimii A.

Așadar: 5 nu are divizori printre elementele lui A; 6 are divizorii 2 și 3; 9 nu are doi divizori diferiți printre elementele lui A; 12 are divizorii 2 și 3; 21 are divizorii 3 și 7; 22 are divizorii 2 și 11; 33 are divizorii 3 și 11; 49 nu are doi divizori diferiți printre elementele lui A.

Deci $C = \{6 ; 12 ; 21 ; 22 ; 33\}$.

IV.5. a) Scrieți multiplii naturali, ai lui 5 mai mici ca 30;

b) Scrieți multiplii, naturali, ai lui 10 mai mari ca 9 și mai mici ca 33;

c) Scrieți multiplii, naturali, ai lui 8 mai mari ca 8 și mai mici ca 30;

d) Scrieți multiplii, naturali, ai lui 8 mai mari ca 80 care sînt scriși cu două cifre.

R. Avem: a) $\{0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25\}$; b) $\{10 ; 20 ; 30\}$; c) $\{16 ; 24\}$; d) $\{88 ; 96\}$.

IV.6. Se dau mulțimile:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N},\ x \text{ este multiplu de } 12,\ x \leqslant 53\},$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N},\ x \text{ este multiplu de } 8,\ x \leqslant 57\}.$$

a) Enumerați elementele lor;

b) Enumerați elementele mulțimilor $A \cup B$ și $A \cap B$.

R. Avem: a) $A = \{0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48\}$, $B = \{0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; 56\}$.

De asemenea:

b) $A \cup B = \{0 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 36 ; 40 ; 48 ; 56\}$, $A \cap B = \{0 ; 24 ; 48\}$.

IV.7. a) Scrieți cel mai mare multiplu al lui 5, mai mic ca 48;

b) Scrieți cel mai mare multiplu al lui 6, mai mic ca 60;

c) Scrieți cel mai mare multiplu al lui 2, mai mic ca 9;

d) Scrieți cel mai mare multiplu al lui 12, mai mic ca 121;

e) Scrieţi cel mai mic multiplu al lui 7, mai mare 707;

f) Scrieţi cel mai mic multiplu al lui 20, mai mare sau egal cu 200.

R. Avem: a) 45; b) 54; c) 8; d) 120; e) 714; f) 200.

IV.8. Dintre trei numere, două sînt divizibile cu 5, iar al treilea număr nu este divizibil cu 5. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Suma celor trei numere este divizibilă cu 5;

b) Suma celor trei numere nu este divizibilă cu 5;

c) Produsul celor trei numere este divizibil cu 5;

d) Produsul celor trei numere nu este divizibil cu 5.

R. Avem: a) 0; b) 1; c) 1; d) 0.

Observaţie. Rezolvarea problemei se bazează pe următoarele:

Dacă toţi termenii unei sume sînt divizibili cu un număr, atunci suma este divizibilă cu acel număr.

Dacă cel puţin un factor al unui produs este divizibil cu un număr, atunci produsul este divizibil cu acel număr.

IV.9. a) Numărul natural a este divizibil cu 4 şi numărul natural b este divizibil tot cu 4. Sînt numerele $a + b$ şi $a - b$ divizibile cu 4? Dar cu 2? Dar cu 8?

b) Numărul 8 divide numărul natural a, iar numărul 4 divide pe x. Decideţi dacă 4 divide pe $a + x$ şi dacă 2 divide pe $a - x$.

c) Numărul 7 divide numărul natural a şi pe numărul natural ab.

Divide numărul $2 \cdot 7$ pe numărul $a + ab$?

R. a) Dacă $4|a$ şi $4|b$ atunci $4|(a+b)$. În cazul cînd $a \geqslant b$ avem şi $4|(a-b)$. Deoarece 2 este divizorul lui 4, iar 4 este divizorul lui $a + b$ şi respectiv $a - b$, atunci 2 divide pe $a + b$ şi respectiv pe $a - b$. Cu privire la divizibilitatea cu 8, dăm un contraexemplu prin care arătăm că dacă $4|(a+b)$ şi $2|(a+b)$ nu rezultă că $8|(a+b)$: din $4|8$ şi $4|12$ avem $4|(8+12)$ şi $2|(8+12)$ dar $8 \nmid (8+12)$.

b) Dacă $8|a$, atunci şi divizorul său 4 divide pe a; cum 4 divide pe x rezultă că $4|(a+x)$ şi $4|(a-x)$ în cazul cînd $a \geqslant x$.

Cum $4|(a-x)$ rezultă că şi divizorul lui 4, adică 2, divide pe $a - x$.

c) Avem $7|7$ şi $7|7 \cdot 4$ deci $7|(7+7\cdot 4)$, dar $2 \cdot 7 \nmid (7+7\cdot 4)$, adică $14 \nmid 35$.

Observaţie. Este suficient un singur exemplu să demonstrăm că o afirmaţie este falsă.

IV.10. O sumă de bani a fost plătită în bancnote de cîte 100 lei; 25 lei şi 10 lei. Se poate plăti toată suma numai în bancnote de 10 lei; Dar numai în bancnote de 25 lei? Justificare.

R. O sumă nu se poate plăti întotdeauna în bancnote de 10 lei. Este suficient un singur exemplu: dacă suma a fost 135 lei înseamnă că ea s-a plătit cu o bancnotă de 100 lei, cu una de 25 lei şi cu una de 10 lei. Cum suma de 135 lei nu este reprezentată printr-un număr divizibil cu 10, ea nu poate fi plătită numai cu bancnote de 10 lei.

Asemănător justificăm faptul că suma nu poate fi plătită numai cu bancnote de 25 lei.

IV.11[PP]. Determinați numărul x, $x \in \mathbb{N}$, astfel încît $x \leqslant 21$ și $24 + x$ să fie divizibil cu 6.

R. Pentru ca numărul natural $a + b$ să fie divizibil cu numărul natural c, în cazul cînd a este divizibil cu c, trebuie ca și b să fie divizibil cu c.

La fel avem în problemă : numărul $24 + x$ trebuie să fie divizibil cu 6. Cum 24 este divizibil cu 6 trebuie ca și x să fie divizibil cu 6. Între numerele naturale x, $x \leqslant 21$, divizibile cu 6 sînt : 0 ; 6 ; 12 și 18.

IV.12. Determinați numărul x, $x \in \mathbb{N}$, astfel încît $x < 30$ și $40 + x$ să fie divizibil cu 5.

R. Avem $x \in \{0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25\}$.

IV.13[PO]. Determinați numărul x, $x \in \mathbb{N}$, astfel încît $x \geqslant 120$ și $x < 135$ și $26 + x$ să fie divizibil cu 13.

R. Avem $x \in \{130\}$.

IV.14.[PO] Arătați că dacă numărul natural x este un număr par atunci și numărul $3x + 44 + 8x$ este număr par.

R. *Soluția I.* Dacă x este natural atunci $3x$ este par ; 44 este, de asemenea, număr par. Dacă x este natural atunci și numărul $8x$ este număr par. Rezultă că suma de trei numere pare, $3x+44+8x$, este număr par.

Soluția a II-a. Numărul dat se mai scrie $3x + 8x + 44 = 11x + 44$. Dacă x este par atunci $11x$ este număr par, care adunat cu numărul par 44, dă tot un număr par.

IV.15[PO]. Cercetați dacă numărul natural x divide numărul $x + 3x + 7x$.

R. Deoarece x este număr natural rezultă că $3x$ este număr natural și de, asemenea, $7x$ este număr natural deci și $x + 3x + 7x$ adică $11x$ este număr natural. Se observă că x este un factor al numărului $11x$, deci x este un divizor al lui $11x$, deci x divide numărul $11x$ adică pe $x + 3x + 7x$.

Observație. Mai putem justifica afirmația și astfel : x divide fiecare termen al sumei $x + 3x + 7x$, adică $x|x$, $x|3x$ și $x|7x$, deci x divide toată suma $x + 3x + 7x$.

IV.16. Se dau produsele $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, $5 \cdot 7$ și $2 \cdot 3 \cdot 7$.

1) Alegeți cîte două produse diferite astfel încît suma lor să se dividă cu : a) 2 ; b) 3 ; c) 5 ; d) 7.

2) Alegeți cîte două produse astfel încît suma lor să nu se dividă cu : a) 2 ; b) 3 ; c) 5 ; d) 7.

R. 1) Putem alege : a) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$; $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; b) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; c) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 5 + 5 \cdot 7$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7$; $3 \cdot 5 + 5 \cdot 7$. d) $5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 7$.

2) Putem alege : a) $2 \cdot 5 + 5 \cdot 7$; b) $2 \cdot 3 + 5 \cdot 7$; c) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 7$; d) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$; $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$.

IV. 17. Scrieţi, în pătrăţelele din produsele de mai jos, numere, astfel încît produsul obţinut să fie divizibil cu 18.

Găsiţi cel puţin trei soluţii.

a) $3 \cdot \boxed{} \cdot 5 \cdot \boxed{}$; b) $2 \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot 7$; c) $\boxed{} \cdot 2 \cdot \boxed{} \cdot 3$;

d) $\boxed{} \cdot \boxed{} \cdot 9 \cdot 5$; e) $\boxed{} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \boxed{}$;

R. Avem :

a) $3 \cdot \boxed{3} \cdot 5 \cdot \boxed{2}$; b) $2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot 7$; c) $\boxed{3} \cdot 2 \cdot \boxed{5} \cdot 3$;

d) $\boxed{2} \cdot \boxed{7} \cdot 9 \cdot 5$; e) $\boxed{3} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \boxed{6}$;

sau :

a) $3 \cdot \boxed{6} \cdot 5 \cdot \boxed{8}$; b) $2 \cdot \boxed{9} \cdot \cdot \boxed{5} \cdot 7$; c) $\boxed{9} \cdot 2 \cdot \boxed{7} \cdot 3$;

d) $\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 9 \cdot 5$; e) $\boxed{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \boxed{9}$;

sau:

a) $3 \cdot \boxed{6} \cdot 5 \cdot \boxed{6}$; b) $2 \cdot \boxed{6} \cdot \boxed{15} \cdot 7$; c) $\boxed{5} \cdot 2 \cdot \boxed{6} \cdot 3$;

d) $\boxed{12} \cdot \boxed{7} \cdot 9 \cdot 5$; e) $\boxed{12} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \boxed{3}$.

IV.18. Se dă mulţimea :

$$A = \{x | x \in \mathbb{N},\ 10 \leqslant x \leqslant 72\}.$$

Enumeraţi elementele mulţimii :

$$B = \{x | x \in A,\ 10 | x\}.$$

R. Avem $B = \{10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; 70\}$.

IV.19. Se dă mulţimea $M = \{x | x \in \mathbb{N},\ x < 30\}$. Scrieţi toate elementele lui M care se divid cu 10.

R. Avem $\{0 ; 10 ; 20\}$.

IV.20. Se dă mulţimea $P = \{x | x \in \mathbb{N},\ 200 < x \leqslant 270\}$. Scrieţi toate elementele lui M care au ca divizor pe 10.

R. Avem $\{210 ; 220 ; 230 ; 240 ; 250 ; 260 ; 270\}$.

IV.21. Printre elementele mulţimii :

$$\{x | x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 1000 \text{ şi } x > 970\},$$

care sînt multipli de 10?

R. Numerele căutate sînt 980 ; 990 ; 1 000.

IV.22. Găsiţi $x \in \mathbb{N}$, astfel încît numărul $\overline{245x}$ să fie divizibil cu 10.

R. Se ştie că un număr natural este divizibil cu 10 atunci cînd ultima cifră a lui este zero.

Deci $x = 0$, iar numărul este 2 450.

IV.23. Găsiți $x \in \mathbb{N}$, astfel incit numărul $\overline{450x}$ să nu fie divizibil cu 10.

R. Avem $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

IV.24. Găsiți numărul $\overline{3ab}$ astfel ca el să fie divizibil cu 10.

R. Pentru ca un număr să fie divizibil cu 10 trebuie ca ultima cifră să fie zero. Deci ne îndreptăm atenția asupra lui b. Avem $b = 0$ și numărul devine $\overline{3a0}$. Cum a poate fi reprezentat prin orice cifră, numărul cerut este unul din elementele mulțimii următoare:

$$\{300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390\}.$$

IV.25. Găsiți numărul $\overline{40ab}$ divizibil cu 10.

R. Avem numerele $\{4\,000, 4\,010 ; 4\,020, 4\,030, 4\,040, 4\,050, \ldots, 4\,090\}$

IV.26. Se dau numerele:

$$41 ; 35 ; 20 ; 72 ; 100 ; 10^5 ; 0 ; 32 ; 75 ; 900 ; 1\,002 ; 10 ; 40.$$

Alegeți acele numere care sînt divizibile cu 10, apoi pe acelea divizibile cu 100.

R. Un număr este divizibil cu 10 cînd ultima cifră a lui este 0. Deci numerele divizibile cu 10 sînt:

$$20 ; 100 ; 10^5 ; 0 ; 900 ; 10 \text{ și } 40.$$

Un număr este divizibil cu 100 cînd ultimele două cifre ale lui sînt 0. Numerele divizibile cu 100 sînt: $100 ; 10^5 ; 0 ; 900$.

Observație. a) Numărul 0 este divizibil cu 100 pentru că el are ca divizor orice număr natural diferit de 0.

b) Numerele date formează o mulțime; numerele cerute formează două submulțimi ale celei date. Deci exercițiul s-ar putea enunța și astfel:

Se dă $A = \{41 ; 35 ; 20 ; 72 ; 100 ; 10^5 ; 0 ; 32 ; 75 ; 900 ; 1\,002 ; 10 ; 40\}$. Găsiți elementele mulțimilor $B = \{x | x \in A, x \text{ este divizibil cu } 10\}$; $C = \{x | x \in A, x \text{ este divizibil cu } 100\}$.

IV.27. Găsiți valoarea logică a următoarelor propoziții:

$$p_1 : 10|420 ; p_2 : 100|320 ; p_3 : 10|400 ; p_4 : 100|400 ;$$

$$p_5 : 1\,000|430 ; p_6 : 1\,000|430\,000 ; p_7 : 100|3\,200 ; p_8 : 1\,000|4\,200 ;$$

$$p_9 : 10|345 ; p_{10} : 1\,000|2\,400.$$

R. Amintim că notăm valoarea logică a propoziției p cu $v(p)$. Deci:

$$v(p_1) = 1 ; v(p_2) = 0 ; v(p_3) = 1 ; v(p_4) = 1 ; p(p_5) = 0 ; v(p_6) = 1 ;$$

$$v(p_7) = 1 ; v(p_8) = 0 ; v(p_9) = 0 ; v(p_{10}) = 0.$$

Am convenit că dacă p este adevărată, atunci $v(p) = 1$, iar dacă p este falsă, atunci $v(p) = 0$

IV.28. Găsiți numărul $\overline{5abc}$ divizibil cu 1 000.

R. Orice multiplu de 1 000 este divizibil cu 1 000. Astfel, dacă $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, obținem numărul $5\,000 = 5 \times 1\,000$.

IV.29. Găsiți cel mai mic număr de 4 cifre divizibil cu 10 dar nu și cu 100.

R. Numărul căutat este 1010.

IV.30. Se dau numerele: 15 ; 14 ; 326 ; 17 ; 12 ; 0 ; 100 ; 10 ; 93 ; 72 ; 2 ; 1 444 ; 99 ; 1 000 001. Scrieți numerele divizibile cu 2 dintre acestea.

R. Un număr este divizibil cu 2 atunci cînd ultima cifră a sa este una din cifrele 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8. Deci avem numerele: 14 ; 326 ; 12 ; 0 ; 100 ; 10 ; 72 ; 2 ; 1444.

Observație. În locul afirmației: „x este număr natural divizibil cu 2” se mai folosește afirmația: „x este număr natural par”. Așadar, exercițiul putea fi formulat astfel: Se dau numerele .... Scrieți numerele pare dintre acestea.

IV.31. Scrieți elementele mulțimii $A = \{x | x \in M,\ 2|x\}$, unde M este mulțimea $\{x | x \in \mathbb{N},\ 17 \leqslant x < 27\}$.

R. Enumeram elementele lui M:

$$M = \{17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26\}.$$

Elementele x ale lui A au proprietatea că sînt divizibile cu 2, căci așa se mai traduce relația $2|x$, și, în plus, aparțin mulțimii M.

Deci $A = \{18 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26\}$.

IV.32. Scrieți elementele mulțimii:

$$A = \{x | x \in M,\ x \text{ se divide cu } 2\}$$

unde $M = \{x | x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 48 \text{ și } x < 57\}$.

R. Avem $A = \{48 ; 50 ; 52 ; 54 ; 56\}$.

IV.33. Găsiți elementele mulțimii:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N},\ x < 40,\ x > 29,\ x \text{ par}\}.$$

R. Avem $A = \{30 ; 32 ; 34 ; 36 ; 38\}$.

IV.34. Găsiți numerele $\overline{23a}$ astfel încît acestea să fie divizibile cu 2.

R. Pentru ca un număr să fie divizibil cu 2 trebuie ca ultima cifră să fie cifră pară.

Obținem numerele 230, 232, 234, 236, 238.

IV.35. Găsiți numerele de forma $\overline{856a}$ astfel încît $2|\overline{856a}$.

R. Numerele căutate sînt 8 560 ; 8 562 ; 8 564 ; 8566 ; 8568, căci numerele care se divid la 2 au ultima cifră pară.

IV.36^{PO}. Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{xy}$ astfel încît:

$$50 < \overline{xy} < 100 \text{ și } x = y + 1 \text{ și } y = 2p.$$

(G.M., 8/1971)

R. Este clar că $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 9\}$ și $y \in \{0 ; 1 ; \ldots ; 9\}$.

Faptul că $y = 2p$ se traduce prin: y număr divizibil cu 2 sau, altfel spus, y este număr par. În acest caz, $y \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.

Faptul că $x = y + 1$ adică $x = 2p + 1$ se traduce prin: x număr impar. În acest caz, $x \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$.

Deoarece $50 < \overline{xy} < 100$, înseamnă că x începe cu 5, sau cu 7 sau cu 9.

Atunci $\overline{xy}$ va fi unul din următoarele numere: 54, 76, 98.

IV.37. Găsiți numerele $\overline{5a}$ care nu sînt divizibile cu 2.

R. Numerele căutate sînt 51; 53; 55; 57; 59.

IV.38. Orice număr natural divizibil cu 2 este divizibil cu 10?

R. Nu. Numărul 14 este divizibil cu 2 dar nu și cu 10. Pentru ca un număr natural, divizibil cu 2, să fie divizibil cu 10, este necesar (și suficient) să fie divizibil și cu 5.

IV.39. Orice număr natural divizibil cu 10 este divizibil cu 2?

R. Da, fiindcă ultima sa cifră este 0.

IV.40. Orice număr natural divizibil cu 10 este divizibil cu 5?

R. Da, fiindcă ultima sa cifră este 0.

IV.41. Se dau numerele: 30; 17; 3; 5; 15; 40; 19; 200; 495; 0. Dintre aceste numere scrieți pe acelea divizibile cu 5.

R. Un număr este divizibil cu 5 atunci cînd ultima cifră este 0 sau 5. Așadar, avem numerele: 30; 5; 15; 40; 200; 495; 0.

IV.42. Orice număr divizibil cu 5 este divizibil cu 10?

R. Nu. De exemplu, 15 este divizibil cu 5 dar nu este divizibil cu 2 căci nu are ultima cifră pară.

IV.43. Găsiți numerele $\overline{12x}$ divizibile cu 5.

R. Numerele divizibile cu 5, se termină în 0 sau 5.

Deci condiția este $x = 0$ sau $x = 5$ și numerele sînt 120 și 125.

IV.44. Găsiți numerele $\overline{12x}$ care nu sînt divizibile cu 5.

R. Numerele căutate sînt 121; 122; 123; 124; 126; 127; 128; 129.

IV.45. Găsiți numerele $\overline{1xy}$ divizibile cu 5 strict mai mici ca 150.

R. Numerele căutate sînt 100; 105; 110; 115; 120; 125; 130; 135; 140; 145.

IV.46. a) Scrieți cel mai mare număr de patru cifre divizibil cu 5;

b) Scrieți cel mai mic număr de 4 cifre divizibil cu 5;

c) Scrieți cel mai mic număr de patru cifre care nu este divizibil cu 5.

R. Numerele căutate sînt: a) 9 995; b) 1 000; c) 1 001.

IV.47. Scrieți numărul 251 ca o sumă de două numere naturale din care unul să aibă ultima cifră 5.

R. Se știe că un număr natural care are ultima cifră 5 este divizibil cu 5. Sînt foarte multe numere naturale divizibile cu 5 care au ultima cifră 5. De exemplu: 5; 15; 25; 35,...

Așadar, scrierea nu este unică: $251 = 5 + 246 = 15 + 236 = \ldots$

IV.48. Se dau numerele:

5; 20; 140; 256; 4; 14; 314; 0; 1 002; 509; 2 234; 192; 3 000.

Scrieți acele numere, dintre acestea, care sînt divizibile cu 4.

R. Un număr natural este divizibil cu 4 cînd ultimele două cifre ale lui reprezintă un număr natural divizibil cu 4. Deci numerele căutate sînt :

$$20 \, ; \, 140 \, ; \, 256 \, ; \, 4 \, ; \, 0 \, ; \, 192 \, ; \, 3\,000.$$

IV.49. Se dă mulţimea $A = \{x | x \in \mathbb{N}, \, 2|x, \, x < 40\}$.

Scrieţi elementele mulţimilor :

$$B = \{x | x \in A, \, x \text{ este divizibil cu } 4\},$$
$$C = \{x | x \in A, \, x \text{ este divizibil cu } 5\},$$
$$D = \{x | x \in A, \, x \text{ este divizibil cu } 10\},$$
$$E = \{x | x \in A, \, x \text{ este divizibil cu } 4 \text{ şi cu } 5\}.$$

R. Este incomod să enumerăm în scris elementele mulţimii A. Vom reţine proprietatea caracteristică a lor : x este număr natural, divizibil cu 2 şi mai mic decît 40. Altfel spus, A conţine toate numerele naturale pare şi mai mici decît 40 pentru a scrie pe B, C, D şi E.

Dintre acestea, vom selecta pe acelea care îndeplinesc proprietăţile caracteristice corespunzătoare fiecărei mulţimi cerute. Vom avea :

$$B = \{0 \, ; \, 4 \, ; \, 8 \, ; \, 12 \, ; \, 16 \, ; \, 20 \, ; \, 24 \, ; \, 28 \, ; \, 32 \, ; \, 36\},$$
$$C = \{0 \, ; \, 10 \, ; \, 20 \, ; \, 30\},$$
$$D = \{0 \, ; \, 10 \, ; \, 20 \, ; \, 30\}, \quad E = \{0 \, ; \, 20\}.$$

Observaţie. Avem $C = D$, cu toate că modul lor de definire este diferit.

IV.50. Găsiţi numerele de forma $\overline{92a}$ divizibile cu 4.

R. Deoarece ultimele două cifre trebuie să formeze un număr divizibil cu 4 şi cum acelea care au cifra zecilor 2 sînt 20 ; 24 ; 28, avem numerele 920, 924, 928.

IV.51. Găsiţi numerele de forma $\overline{8a2}$ divizibile cu 4.

R. În orice situaţie avem $a \in \{0 \, ; \, 1 \, ; \, 2 \, ; \, 3 \, ; \ldots ; \, 9\}$.

Numerele $\overline{a2}$ de două cifre care se formează sînt 12 ; 22 ; 32 ; 42 ; 52 ; 62 ; 72 ; 82 ; 92 (cu excepţia lui 02). Dintre acestea, divizibile cu 4 sînt 12 ; 32 ; 52 ; 72 şi 92. Aşadar, numerele cerute sînt : 812 ; 832 ; 852 ; 872 ; 892.

IV.52. Găsiţi numerele de forma $\overline{9a4}$ divizibile cu 4.

R. Numerele căutate sînt 904 ; 924 ; 944 ; 964 ; 984.

IV.53. Găsiţi numerele de forma $\overline{7x1}$ divizibile cu 4.

R. Nu există numere divizibile cu 4 care nu sînt divizibile cu 2 adică să aibă ultima cifră impară, ca în cazul nostru : 1.

IV.54. Scrieţi valoarea logică a propoziţiilor : p_1: „orice număr natural par este divizibil cu 4”, p_2: „toate numerele naturale divizibile cu 4 sînt numere pare” p_3: „fiecare număr natural cu ultima cifră zero este un număr divizibil cu 4”.

R. Avem $v(p_1) = 0$ căci, de pildă $4 \nmid 2$, $v(p_2) = 1$ şi $v(p_3) = 0$ căci de pildă, $4 \nmid 10$.

IV.55. Găsiţi x astfel ca numărul $\overline{2x24}$ să fie divizibil cu 4.

R. Avem $x \in \{0 \, ; \, 1 \, ; \, 2 \, ; \, 3 \, ; \, 4 \, ; \ldots ; \, 9\}$.

IV.56^{PO}. Găsiți două mulțimi A și B astfel ca diferența lor să fie mulțimea numerelor naturale divizibile cu 4.

R. Mulțimea de numere naturale divizibile cu 4 poate fi scrisă astfel : $\{0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ldots\}$. Ea nu este o mulțime finită. Se obișnuiește să se mai noteze și astfel : $\{x|x = 4k,\ k \in \mathbb{N}\}$ sau $\{4k|k \in \mathbb{N}\}$. Deci putem lua :

$$A = \{2k|k \in \mathbb{N}\};\quad B = \{2 + 4k|k \in \mathbb{N}\};\quad A - B = \{4k|k \in \mathbb{N}\}.$$

IV.57. Se dau cifrele 2, 6, 5. Formați cu ele, fără a se repeta, toate numerele de trei cifre divizibile : a) cu 2 ; b) cu 4 ; c) cu 5 ; d) cu 3.

R. Numerele căutate sînt: a) 562, 526, 652, 256 ; b) 652, 256 ; c) 265, 625 ; d) deoarece $2 + 6 + 5 = 13$, iar 13 nu este divizibil cu 3, cu ajutorul cifrelor 2, 5, 6 nu se poate forma nici un număr divizibil cu trei.

IV.58. Formați cu ajutorul cifrelor 2, 0, 5, fără a se repeta, toate numerele de trei cifre, divizibile : a) cu 2 ; b) cu 4 ; c) cu 5 ; d) cu 10.

R. Avem : a) 520, 502, 250 ; b) 520 ; c) 520, 205, 250 ; d) 520, 250.

IV.59. Printre elementele mulțimii $\{45;\ 125;\ 50;\ 40;\ 400;\ 126;\ 170;\ 122;\ 345;\ 10\,075\}$ unele sînt divizibile cu 25. Enumerați-le.

R. Numerele căutate sînt 125 ; 50 ; 400 ; 10 075.

IV.60. Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel încît numărul $\overline{125x}$ să fie divizibil cu 25.

R. Singurul număr divizibil cu 25 se obține pentru $x = 0$. El este 1250.

IV.61. Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel încît numărul $\overline{12x5}$ să fie divizibil cu 25.

R. Numerele căutate se obțin pentru $x \in \{2;\ 7\}$. Ele sînt 1225 și 1275.

IV.62. Scrieți cel mai mare număr de trei cifre divizibil cu 25.

R. Numărul căutat este 975.

IV.63. Aflați valoarea logică a următoarelor propoziții : a) $25|500$; b) $25|240$; c) $5|6\,250$; d) $25|6\,250$ și e) $10|125$; f) $25|625$; g) $2|408$; h) $4|814$; i) $2\nmid 177$; j) $25\nmid 724$, k) $25|8\,075$; l) $25|90\,100$; m) $10\nmid 245$.

R. a) 1 ; b) 0 ; c) 1 ; d) 1 ; e) 0 ; f) 1 ; g) 1 ; h) 0 ; i) 1 ; j) 1 ; k) 1 ; l) 1 ; n) 1.

IV.64. Găsiți numerele impare divizibile cu 25 de forma $\overline{16xy}$.

R. Numerele căutate sînt 1 625 ; 1 675.

IV.65. Scrieți numerele naturale divizibile cu 3 care se găsesc printre elementele mulțimii :

$$\{312;\ 45;\ 19;\ 2\,000;\ 1\,567;\ 4\,991;\ 0;\ 2\,167;\ 3\,190;\ 4\,191;\ 3\}.$$

R. Numerele căutate sînt: 312 ; 45 ; 0 ; 4 191 ; 3.

IV.66. Scrieți numerele naturale x divizibile cu 9 astfel încît $4215 \leqslant x < 4248$.

R. Numerele căutate sînt 4 221, 4 230, 4 239.

IV.67. Se dă mulțimea $A = \{x|x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 20\}$. Enumerați elementele mulțimilor următoare :

$B = \{x|x \in A,\ x \text{ par},\ 3|x\}$; $C = \{x|x \in A,\ 9|x\}$; $D = \{x|x \in A,\ x \text{ impar},\ 3\nmid x\}$; $E = \{x|x \in B,\ 9\nmid x\}$; $F = \{x|x \in A,\ x|9\}$.

R. Avem $B = \{0;\ 6;\ 12;\ 18\}$; $C = \{0;\ 9;\ 18\}$; $D = \{1;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19\}$; $E = \{6;\ 12\}$; $F = \{1;\ 3;\ 9\}$.

IV.68. Găsiţi numărul x astfel încît 3 să fie divizorul numărului $\overline{112x}$.

R. Avem $x \in \{2;\ 5;\ 8\}$.

IV.69. Găsiţi numărul natural x astfel încît numărul $\overline{4x5}$ să fie divizibil cu 3.

R. Avem $x \in \{0;\ 3;\ 6;\ 9\}$.

IV.70. Găsiţi numerele de forma $\overline{x712}$ astfel încît ele să fie multipli de 3.

R. Numerele căutate sînt 2 712; 5 712; 8 712.

IV.71. Găsiţi numărul de forma $\overline{x172}$ astfel încît el să se dividă cu 9.

R. Numărul căutat este 8 172. El se obţine punînd condiţia ca suma cifrelor sale să fie un număr divizibil cu 9.

IV.72[PP;PO]. Găsiţi numărul natural x astfel încît $3 | \overline{572x}$.

R. Pentru ca numărul dat, $\overline{572x}$, să fie divizibil cu 3 trebuie ca $5 + 7 + 2 + x$ adică $14 + x$ să fie multiplu de 3. Primul multiplu de 3 mai mare ca 14 este 15, deci trebuie să rezolvăm ecuaţia $14 + x = 15$ de unde $x = 1$. Următorii multiplii de 3 sînt: 18; 21; 24; 27; 30; ...

Vom rezolva, pe rînd, ecuaţiile respective:

$$14 + x = 18$$

deci $x = 4$;

$$14 + x = 21$$

deci $x = 7$;

$$14 + x = 24$$

deci $x = 10$ care nu mai este soluţie pentru problemă căci trebuie ca $x \leqslant 9$. Aşadar: $x \in \{1;\ 4;\ 7\}$.

IV.73[PO]. Determinaţi numerele divizibile cu 3 de forma: *a*) $\overline{xxxx}$; b) $\overline{xx}$; c) $\overline{xxxxx}$.

R. a) Trebuie ca $x + x + x + x = 4x$ să fie un număr divizibil cu 3.

Rezultă $4x \vdots 3$ deci $x \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Rezultă că numerele sînt: 3 333, 6 666 şi 9 999. Pentru $x = 0$ nu avem soluţie căci nămărul ar fi $\overline{0000}$.

Avem, în continuare:

b) 33; 66; 99; c) 33 333; 66 666; 99 999.

IV.74. Suma a patru numere este 21 000. Primul este cel mai mare număr de patru cifre divizibil cu 3 dar nu cu 9, al doilea este cel mai mic număr de trei cifre, al treilea este produsul dintre cel mai mare şi cel mai mic număr de două cifre. Aflaţi al patrulea număr.

R. Cel mai mare număr de patru cifre divizibil cu 3, dar nu cu 9 este 9 996; cel mai mic număr de trei cifre este 100; cel mai mare număr de două cifre este 99; cel mai mic număr de două cifre este 10.

Produsul dintre cel mai mic și cel mai mare număr de două cifre este $99 \cdot 10 = 990$.

Aflăm suma celor trei numere cunoscute:

$$9\,996 + 100 + 9\,90 = 11\,086.$$

Aflăm al patrulea număr:

$$21\,000 - 11\,086 = 9\,914.$$

Deci numărul căutat este 9 914.

IV.75[PO]**.** Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $\overline{619x7y}$ divizibile cu 18.

R. Numerele divizibile cu 18 sînt divizibile cu 9 și cu 2. Pentru a fi divizibile cu 2 trebuie ca $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Suma cifrelor cunoscute este: $6 + 1 + 9 + 7 = 23$. De aceea, suma $x + y$ trebuie să fie 4 sau 13 și y este număr par.

Posibilitățile le includem în următorul tabel:

y:	0	2	4	6	8
x:	4	2	0 sau 9	7	5

Numărul $\overline{619x7y}$, divizibil cu 18, poate fi 619 470 sau 619 272 sau 619 074 sau 619 974 sau 619 776 sau 619 578.

Observăm că cel mai mic număr este 619 074, iar cel mai mare număr este 619 974.

IV.76[PO]**.** Aflați toate numerele divizibile cu 12 de forma: a) $\overline{512x6}$; b) $\overline{25y3x}$.

R. a) Condiția revine la $\overline{512x6} = \mathcal{M}\,12$. Numărul $\overline{512x6}$ trebuie să fie divizibil și cu 4 și cu 3. Pentru ca numărul să fie divizibil cu 4 trebuie ca $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Cercetăm divizibilitatea cu 3: Suma cifrelor numărului este $5 + 1 + 2 + 6 + x = 14 + x$, deci x poate fi un număr de mulțimea $\{1, 4, 7\}$. Atunci $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 4, 7\}$, deci $x \in \{1, 7\}$.

Numerele căutate sînt: 51 216 și 51 276.

b) Avem $\overline{25y3x} = \mathcal{M}\,12$. Pentru ca numărul să fie divizibil cu 4, trebuie ca $x \in \{2, 6\}$.

Cercetăm divizibilitatea cu trei a numărului $\overline{25y32}$. Suma cifrelor numărului este:

$$2 + 5 + 3 + 2 + y = 12 + y,$$

deci $y \in \{0, 3, 6, 9\}$: Soluțiile sînt 25 032, 25 332, 25 632, 25 932.

Cercetăm divizibilitatea cu trei a numărului $\overline{25y36}$, adică pentru $x = 6$:

$$2 + 5 + 3 + 6 + y = 16 + y,$$

deci $y \in \{2, 5, 8\}$.

Soluțiile sînt: 25 236, 25 536, 25 836.

IV.77. Aflați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) Dacă un număr este divizibil cu 9, atunci numărul este divizibil și cu 3.

b) Dacă un număr este divizibil cu 3, atunci numărul este divizibil și cu 9.

c) Dacă un număr este divizibil și cu 2 și cu 3 atunci este divizibil și cu 6.

d) Dacă un număr este divizibil și cu 2 și cu 4 atunci este divizibil și cu 8.

e) Dacă un număr este divizibil și cu 2 și cu 6 atunci este divizibil și cu 12.

f) Dacă un număr este divizibil și cu 3 și cu 4 atunci este divizibil și cu 12.

g) Dacă un număr este divizibil cu 18 atunci este divizibil și cu 2 și cu 9.

h) Dacă un număr este divizibil cu 18 atunci este divizibil și cu 2 și cu 3.

R. Valorile de adevăr sînt: a) 1; b) 0; c) 1; d) 0; e) 0; f) 1; g) 1; h) 1.

Observație. Rezolvarea problemei se bazează pe următoarele propoziții:

a) Dacă un număr este divizibil cu două sau mai multe numere, prime între ele, atunci este divizibil și cu produsul acestora.

b) Dacă un număr este divizibil cu un alt număr atunci este divizibil cu toți divizorii acestuia.

IV.78. Aflați toate numerele de forma:

a) $\overline{523x1}$, divizibile cu 3; b) $\overline{253x}$ divizibile cu 4;

c) $\overline{123x}$ divizibile cu 5; d) $\overline{621x3}$ divizibile cu 9.

R. a) Trebuie ca:

$$5 + 2 + 3 + x + 1 = 11 + x = \mathcal{M}\ 3,$$

adică să fie multiplu de trei, deci $x \in \{1, 4, 7\}$. Numerele sînt: 52 311, 52 341, 52 371.

b) Trebuie ca $\overline{253x} = \mathcal{M}\ 4$, adică să fie multiplu de patru, deci $x \in \{2, 6\}$. Numerele sînt: 2 532, 2 536.

c) Avem $\overline{123x} = \mathcal{M}\ 5$, de unde $x \in \{0, 5\}$. Numerele sînt: 1 230 1 235.

d) Avem $\overline{621x3} = \mathcal{M}\ 9$ deci, din:

$$6 + 2 + 1 + x + 3 = 12 + x = \mathcal{M}\ 9,$$

rezultă $x = 6$. Numărul este: 62 163.

IV.79°. Numerele 68 915 și 46 385 împărțite la un număr natural de două cifre dau resturile 11 și respectiv 17. Aflați numărul x.

(C. Ionescu Țiu, G.M. 6, 1971)

R. Din teorema împărțirii cu rest se obține că numărul x este mai mare ca 17 și că $68\,915 = a \cdot x + 11$ și $46\,385 = b \cdot x + 17$.

Cele două relații permit să scriem:

$$68\,915 - 11 = a \cdot x, \quad 46\,385 - 17 = b \cdot x,$$

adică $68\,904 = a \cdot x$ și $46\,368 = b \cdot x$.

Aceste ultime două relații ne permit să spunem că x este un divizor comun de două cifre, mai mare ca 17, al numerelor 68 904 și 46 368.

Divizorii comuni ai celor două numere se găsesc printre divizorii celui mai mare divizor comun al celor două numere.

Avem deci: $68\,904 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 29$ și $46\,368 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$ deci c.m.m.d.c. al lor este $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Rezultă că oricare din divizorii (mai mari ca 17) 18; 24; 36; 72 poate fi numărul cerut x.

IV.80. Aflați numerele de forma $\overline{5x5y}$ divizibile cu 15. Care este cel mai mic și care este cel mai mare număr de această formă, divizibil cu 15?

Așezați numerele în ordine crescătoare.

R. Pentru ca un număr să fie divizibil cu 15, trebuie să fie divizibil cu 3 și cu 5. Pentru a fi divizibil cu 5 trebuie ca $y \in \{0, 5\}$.
Fie $y = 0$, deci numărul este de forma $\overline{5x\,50}$. Aflăm ce valori poate lua x pentru ca numărul să fie divizibil cu 3. Avem:

$$5 + x + 5 + 0 = 10 + x;$$

rezultă $x \in \{2, 5, 8\}$.

Numerele sînt: 5 250, 5 550, 5 850.

Fie $y = 5$, deci numărul este de forma $\overline{5x55}$. Aflăm ce valori poate lua x pentru ca numărul să fie divizibil cu 3. Cum $5 + x + 5 + 5 = 15 + x$ rezultă $x \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Numerele sînt: 5 055, 5 355, 5 655, 5 955.

Cel mai mic număr este 5 055.

Cel mai mare număr este 5 955.

Numerele așezate în ordine crescătoare sînt:

$$5\,055,\ 5\,250,\ 5\,355,\ 5\,550,\ 5\,655,\ 5\,850,\ 5\,955.$$

IV.81. Aflați numerele de forma $\overline{2x35y}$ divizibile cu 12.

R. Numerele divizibile cu 12 se divid cu 4 și cu 3.
Pentru ca numărul să fie divizibil cu 4, trebuie ca $\overline{5y} \in \{52, 56\}$.

a) Fie $\overline{5y} = \overline{52}$; atunci numărul are forma $\overline{2x352}$. Suma cifrelor cunoscute este $2 + 3 + 5 + 2 = 12$, deci pentru ca numărul să fie divizibil cu trei trebuie ca $x \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Numerele vor fi: 20 352, 23 352, 26 352, 29 352.

b) Fie $\overline{5y} = 56$; atunci numărul are forma $\overline{2x356}$. Suma cifrelor cunoscute este $2 + 3 + 5 + 6 = 16$, deci pentru ca numărul să fie divizibil cu 3 trebuie ca $x \in \{2, 5, 8\}$.

Numerele vor fi: 22 356, 25 356, 28 356.

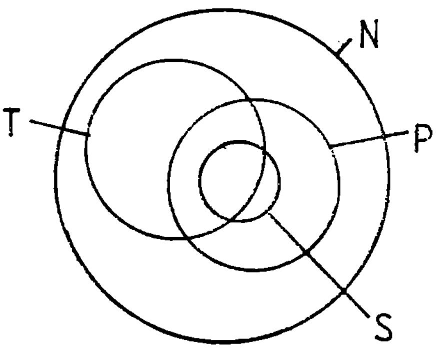
Problema are, deci, şapte soluţii.

IV.82. Reprezentaţi cu ajutorul diagramei VENN-EULER mulţimea numerelor pare, mulţimea numerelor divizibile cu 3, mulţimea numerelor divizibile cu 4 şi mulţimea numerelor naturale.

R. Notăm cu $\mathbb{N} = \{1, 0, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Atunci mulţimile căutate vor fi:

$P = \{2k | k \in \mathbb{N}\} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; \ldots; 2k; \ldots\}$;
$T = \{3k | k \in \mathbb{N}\} = \{0; 3; 6; 9; 12; \ldots; 3k; \ldots\}$;
$S = \{4k | k \in \mathbb{N}\} = \{0; 4; 8; 12; 16; \ldots; 4k; \ldots\}$.

Avem diagrama:



IV.83^M. Suma dintre un număr prim şi un număr natural impar este 24 735. Să se afle numerele.

R. Suma celor două numere (numărul prim şi numărul natural impar) este un număr impar. Ca un termen al sumei să fie număr impar (suma fiind număr impar) celălalt termen trebuie să fie număr par. Dar acest număr par, conform condiţiilor din problemă, trebuie să fie număr prim. Singurul număr par prim este 2. Deci problema are o soluţie unică. Un termen al sumei este 2, celălalt este 24 733.

IV.84^{PP:PO}. Găsiţi x astfel încît numerele $\overline{25x}$ şi 12 să fie prime între ele.

R. Se ştie că două numere sînt prime între ele atunci cînd cel mai mare divizor comun al lor este 1. Cu alte cuvinte, sînt prime între ele cînd nu au divizor comun decît pe 1.

Constatăm că 12 are următorii divizori: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Este suficient să considerăm numai divizorii primi 2 şi 3. Pentru ca numărul $\overline{25x}$ să nu fie divizibil cu 2 trebuie ca $x \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
Numerele x care dau numere de forma $\overline{25x}$, nedivizibile cu 3, sînt 1; 3; 7; 9.

Deci $x \in \{1; 3; 7; 9\}$.

IV.85[PO]. Găsiți y astfel încît numerele $\overline{32y}$ și 12 să fie prime între ele.

R. Avem $y \in \{3; 5; 9\}$.

IV.86[PO]. Găsiți y astfel încît numerele $\overline{425y}$ și 15 să fie prime între ele.

R. Numărul $\overline{425y}$ nu trebuie să aibă divizorii 3 și 5, care sînt divizori și ai numărului 15.

Pentru ca $\overline{425y}$ să nu fie divizibil cu 5 trebuie ca $y \in \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$.

Dintre aceste numere y, conduc la numere de forma $\overline{425y}$, nedivizibile cu 3, următoarele: 2, 3, 6, 8, 9.

Deci $y \in \{2; 3; 6; 8; 9\}$.

IV.87[PO]. Găsiți x astfel încît numerele 15 și $\overline{31x}$ să fie prime între ele.

R. Avem $x \in \{1; 3; 4; 6; 7; 9\}$.

IV.88. Descompuneți în factori, puteri de numere prime, numărul 100 000 000 000 000 000 000.

R. Numărul respectiv are 20 de cifre 0. El se poate scrie 10^{20} sau $(2 \cdot 5)^{20}$, adică $2^{20} \cdot 5^{20}$.

IV.89. Scrieți următoarele numere ca puteri avînd baze numere prime:

a) 4^5; b) 9^4; c) 128^{20}; d) 16^3; e) 12^5; f) 20^5; g) 40^3; h) 125^{50}; i) 100^{10}; j) 32^{42}; k) 10^{25}; e) 49^{801}.

R. Avem: a) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$; b) 3^8; c) $(2^7)^{20} = 2^{140}$; d) 2^{12}; e) $12^5 = (2^2 \cdot 3)^5 = (2^2)^5 \cdot 3^5 = 2^{10} \cdot 3^5$; f) $20^5 = (2^2 \cdot 5)^5 = (2^2)^5 \cdot 5^5 = 2^{10} \cdot 5^5$; g) $2^9 \cdot 5^3$; h) 5^{150}; i) $2^{20} \cdot 5^{20}$; j) 2^{210}; k) $2^{25} \cdot 5^{25}$; l) 7^{1602}.

IV.90. Scrieți cu ajutorul puterilor de puteri următoarele puteri:

a) 2^4; b) 3^6; c) 3^8; d) 3^5; e) 3^9; f) 10^{10}; g) 10^{15}; h) 2^{12}; i) 2^{18}; j) 2^{21}.

R. a) Divizorii lui 4 sînt 1; 2; 4. Numărul 4 se poate scrie $4 = 1 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$. Așadar:

$$2^4 = (2^1)^4 = (2^4)^1 = (2^2)^2.$$

b) Deoarece $6 = 2 \cdot 3 \cdot 1$, avem:

$$3^6 = (3^1)^6 = (3^6)^1 = (3^2)^3 = (3^3)^2.$$

c) Avem $3^8 = (3^2)^4 = (3^4)^2 = ((3^2)^2)^2$. Nu am mai folosit exponentul 1.

În continuare:

d) 3^5; e) $(3^3)^3$; f) $(10^2)^5 = (10^5)^2$; g) $10^{15} = 10^{3 \cdot 5} = (10^3)^5 = (10^5)^3$; h) $2^{12} = (2^2)^6 = (2^6)^2 = (2^4)^3 = (2^3)^4 = ((2^2)^2)^3$, etc. i) $2^{18} = 2^{2 \cdot 9} = 2^{3 \cdot 6} = 2^{2 \cdot 3 \cdot 3} = (2^2)^9 = (2^9)^2$, etc. j) $2^{21} = 2^{3 \cdot 7} = (2^3)^7 = (2^7)^3$.

IV.91[PO]. Determinați numărul natural de patru cifre $\overline{abcd}$ știind că produsul numerelor $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ este 323.

(C. V. Costăchescu, G.M., 5/1971)

R. Cercetăm dacă numărul 323 este prim sau nu. Realizînd împărțirile la numerele prime 7; 11; 13; 17, constatăm că $323 = 17 \cdot 19$ deci el nu este număr prim. Așadar:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 17 \cdot 19.$$

19 – c. 850

Cum 17 şi 19 sînt numere prime avem două situaţii : 1) $\overline{ab} = 17$ şi $\overline{cd} = 19$ sau 2) $\overline{ab} = 19$ şi $\overline{cd} = 17$.

Rezultă $\overline{abcd} = 1\,719$ sau $\overline{abcd} = 1\,917$.

IV.92[PO:M]. Scrieţi numărul 77 ca o sumă de numere naturale astfel încît produsul acestor numere să fie tot 77.

R. Descompunem numărul 77 în produs de factori, adică $77 = 7 \cdot 11$. Factorii fiind numere prime, altă descompunere nu este posibilă. Dar $7 + 11 = 18$, deci suma acestor numere nu este 77. Singurul factor care nu modifică nici un produs este numărul 1. Pe 77 îl putem scrie $77 = 7 \cdot 11 \cdot 1$, de unde $7 + 11 + 1 = 19$.

Adăugînd la factori un 1, suma creşte cu 1. Atunci 1 trebuie adăugat de $77 - 18 = 59$ ori şi soluţia este :

$$77 = 7 + 11 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{59 \text{ ori}}.$$

Verificare :

$$77 = 7 \cdot 11 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{59 \text{ ori}}.$$

IV.93. Aflaţi două numere naturale diferite de 0 ştiind că suma lor este 40, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5.

(Gh. V. Nistor, G.M., 4/1971)

R. Notăm cele două numere cu x şi y. Deoarece ele au ca divizor comun pe 5 înseamnă că există numerele naturale a şi respectiv b astfel încît $x = 5a$ şi $y = 5b$. Cum 5 este cel mai mare divizor comun, a şi b sînt prime între ele. În aşa fel notate numerele, avem $x + y = 40$ adică $5a + 5b = 40$, adică $5(a + b) = 40$ sau $a + b = 8$.

Acum problema devine: aflaţi numerele naturale prime între ele a şi b care, adunate, dau suma 8.

Acestea sînt : 1 şi 7 sau 3 şi 5.

Numerele cerute x şi y sînt, deci, 5 şi 35 sau 15 şi 25.

IV.94[PP]. Găsiţi două numere naturale care înmulţite dau produsul 1200, iar cel mai mare divizor comun al lor să fie 10.

(Gh. V. Nistor, G.M., 1/1971)

R. Notăm cu x şi y cele două numere naturale. Faptul că 10 este divizorul lor, comun şi cel mai mare, înseamnă că există două numere naturale a şi respectiv b, care nu au alt divizor propriu comun — prime între ele — astfel încît $x = 10a$ şi $y = 10b$.

Din problemă avem că produsul numerelor x şi y este 1200. Putem deci scrie $x \cdot y = 1\,200$ sau, cu ajutorul numerelor a şi b, $10a \cdot 10b = 1\,200$. Înmulţirea în $\mathbb{N}$ fiind asociativă şi comutativă avem $10 \cdot 10a \cdot b = 1\,200$, adică $100 \cdot ab = 1\,200$. Din această relaţie obţinem că $ab =$

$= 1200 : 100$. Deci $ab = 12$. Aşadar, numerele naturale a şi b, precum şi x şi y sînt cele scrise în tabelul următor :

a	1	3	4	12
b	12	4	3	1
$x = 10a$	10	30	40	120
$y = 10b$	120	40	30	10

IV.95°. Găsiţi două numere naturale ştiind că produsul lor este 500, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5. Cîte perechi de numere îndeplinesc condiţiile de mai sus?

R. Perechile căutate sînt (5 ; 100) ; (20 ; 25) ; (25 ; 20) ; (100 ; 5), în număr de 4.

IV.96. Aflaţi două numere naturale al căror produs este 26 460, iar cel mai mare divizor comun al lor este 14.

(C. Ionescu-Ţiu, G.M., 12, 1969)

R. Avem mai multe situaţii : 14 şi 1 890 ; 70 şi 378.

IV.97. Se dau numerele 24 şi 36. Aflaţi :

a) mulţimea divizorilor fiecărui număr ; b) mulţimea divizorilor comuni ; c) c.m.m.d.c. al numerelor ; d) primii 5 multipli diferiţi de 0 ai fiecărui număr ; e) c.m.m.m.c. al numerelor.

R. Avem : a) $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$; $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$; b) $D_{24} \cap D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; c) $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $(24, 36)_* = 2^2 \cdot 3 = 12$. d) $M_{24} = \{24, 48, 72, 96, 120\}$; $M_{36} = \{36, 72, 108, 144, 180\}$; e) $[24, 36]_* = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

IV.98. a) Scrieţi toţi multiplii de două cifre ai lui 6 ;

b) Scrieţi toţi multiplii de 6 şi 7 care au numai două cifre ;

c) Scrieţi toţi multiplii de 6, de 7 şi de 5 care au două cifre.

R. Avem a) $A = \{12 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 42 ; 48 ; 54 ; 60 ; 66 ; 72 ; 78 ; 84 ; 90 ; 96\}$; b) $B = \{42 ; 84\}$.

Observaţie. Se constată că multiplii lui 6 şi 7 se găsesc printre multiplii lui 6.

Cel mai mic multiplu de 6 şi 7, diferit de 0, este $6 \cdot 7 = 42$, adică $42 \cdot 1$; următorul multiplu de 6 şi 7, adică de 42, este $42 \cdot 2$, adică 84 ; următorul este $42 \cdot 3$, adică 126, dar acesta nu are două cifre ;

c) Primul multiplu diferit de 0 de tipul cerut este $6 \cdot 7 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210$, dar acest număr nu are două cifre.

IV.99. Găsiţi numărul $\overline{abad}$ care se divide cu numerele 11, 12 şi 13.

(C. Ionescu-Ţiu, G.M., 6/1981)

R' Observăm că numerele 12, 11 şi 13 sînt prime între ele şi deci numărul $\overline{abad}$ se divide cu cel mai mic multiplu comun al lor care este $11 \cdot 12 \cdot 13$ adică 1 716, număr ce convine problemei. Mai sînt numere de patru cifre care se divid cu 1 716. Acestea sînt:

$1\,716 \cdot 2 = 3\,432$ care convine problemei,
$1\,716 \cdot 3 = 5\,148$ care nu convine problemei,
$1\,716 \cdot 4 = 6\,864$ care convine problemei,
$1\,716 \cdot 5 = 8\,580$ care convine problemei.

Deci problema are patru soluţii:

$$\overline{abad} \in \{1\,716\ ;\ 3\,432\ ;\ 6\,864\ ;\ 8\,580\}.$$

IV.100. Valoarea angajamentului de muncă patriotică realizat de elevii clasei a V-a se poate exprima printr-un număr divizibil şi cu 7 şi cu 6 şi cu 9 şi cu 18 şi este cuprins între 2 200 şi 2 300.

Aflaţi acest număr.

R. Aflăm c.m.m.m.c. al numerelor 6, 7, 9 şi 18. Avem:

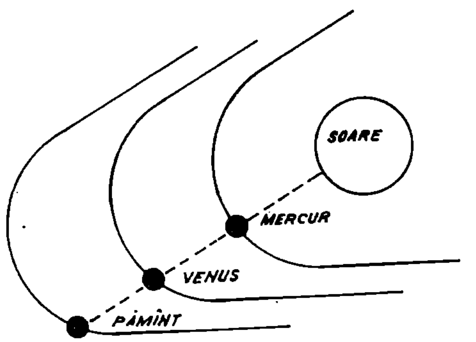
$$6 = 2 \cdot 3\ ;\ 7 = 7\ ;\ 9 = 3^2\ ;\ 18 = 2 \cdot 3^2\ ;$$

Deci c.m.m.m.c. al numerelor 6, 7, 9 şi 18 este $2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126$.

Aflăm multiplul lui 126 cuprins între 2 200 şi 2 300. Cum împărţirea 2 300 : 126 dă cîtul 18 şi restul 32, rezultă că valoarea angajamentului de muncă patriotică a elevilor clasei a V-a este $126 \cdot 18 = 2\,268$ (lei).

IV.101. Timpul de revoluţie în jurul Soarelui a primelor trei planete din sistemul nostru solar este: la Mercur de cca. 88 zile pămîntene, la Venus de cca. 225 zile pămîntene, iar la Pămînt de cca. 365 zile.

Dacă într-o anumită zi Soarele şi cele trei planete s-ar afla în linie dreaptă (ca în figura alăturată), aflaţi peste cîţi ani pămînteni s-ar repeta fenomenul.



R. Aflăm c.m.m.m.c. al numerelor 88, 225, 365. Avem descompunerile $88 = 2^3 \cdot 11$; $225 = 3^2 \cdot 5^2$; $365 = 5 \cdot 73$.

C.m.m.m.c. al numerelor 88, 225 şi 365 este $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 73 = 1\,445\,400$.

Deci fenomenul s-ar repeta peste 1 445 400 zile pămîntene adică peste 3 960 ani pămînteni ($1\,445\,400 : 365 = 3\,960$).

IV.102[M]**.** Tatăl şi fiul au hotărît să măsoare cu pasul distanţa dintre doi pomi şi pentru aceasta au pornit simultan de la unul şi acelaşi pom. Lungimea pasului tatălui este de 70 cm, iar lungimea pasului fiului este de 56 cm. Găsiţi distanţa dintre aceşti pomi ştiind că, în afara coincidenţei din dreptul primului pom, urmele lor au coincis de 10 ori, ultima oară coincizînd în dreptul pomului al doilea.

R. Distanţa la care va coincide urma tatălui cu a fiului, pentru prima dată de la pornire, este cel mai mic multiplu comun al lungimilor paşilor lor. Cum: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $56 = 2^3 \cdot 7$, c.m.m.m.c. al numerelor 70 şi 56 este $2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

Dacă urmele au coincis de 10 ori, atunci distanţa dintre pomi este de 10 ori mai mare decît 280 cm, adică este 2 800 cm = 28 m.

IV.103. Aflaţi două numere naturale A şi B, $A < B$, ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este 26 026, iar cel mai mare divizor comun al lor este 143.

(C. Ionescu- Ţiu, G.M., 6/1971)

R. Avem $A = 143a$ şi $B = 143b$, unde $a < b$, a şi b fiind prime între ele. Se observă că $143 = 11 \cdot 13$. Avem $A \cdot B = 143^2ab = 11^2 \cdot 13^2ab$, adică $26\,026 \cdot 143 = 11^2 \cdot 13^2 \cdot ab$, sau $2 \cdot 7 \cdot 13^3 \cdot 11^2 = 11^2 \cdot 13^2 \cdot ab$. Rezultă că $ab = 2 \cdot 7 \cdot 13$, de unde avem sistemele:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 182 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 91 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = 26 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 13 \\ b = 14 \end{cases}$$

În acest mod găsim numerele A şi B:

$$\begin{cases} A = 143 \\ B = 26\,026 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = 286 \\ B = 13\,013 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = 1\,001 \\ B = 3\,718 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = 1\,859 \\ B = 2\,002 \end{cases}$$

IV. 104. Două numere au c.m.m.d.c. 72 şi c.m.m.m.c. 7 560. Aflaţi cele două numere.

R. Deoarece $72 = 2^3 \cdot 3^2$ şi $7\,560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, observăm că problema are mai multe soluţii:

a) $2^3 \cdot 3^2 = 72$ şi $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7\,560$; b) $2^3 \cdot 3^3 = 216$ şi $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$; c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ şi $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 1\,512$; d) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$ şi $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1\,080$.

IV.105[PP]**.** Calculaţi, folosind proprietăţi ale divizibilităţii (x, y, a sînt numere naturale nenule).

a) $(2 \cdot 8 \cdot 5) : 4$; b) $(39xy) : 13$; c) $(50xy) : x$; d) $(126a) : a$; e) $(325xy) : y$; f) $(6 \cdot 3a) : 2$; g) $(39x) : 3$; h) $(117axy) : (xy)$; i) $(150ab) : 50$; j) $(4 \cdot 12 \cdot 13) : 8$; k) $[2(3 + 5)] : 4$.

R. Se ştie că dacă un număr natural se divide cu un alt număr natural, atunci produsul dintre primul număr cu orice alt număr natural se divide cu cel de-al doilea număr natural. În cazul nostru aplicăm această proprietate.

a) Numărul 8 se divide cu 4 deci $8 \cdot 2 \cdot 5$ se divide cu 4. Aşadar putem scrie:

$$(2 \cdot 8 \cdot 5) : 4 = 2 \cdot (8 : 4) \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20.$$

b) Numărul 39 se divide cu 13 deci $39 \cdot x \cdot y$ se divide cu 13. Aşadar, putem scrie:

$$(39 \cdot xy) : 13 = (39 : 13)xy = 3xy.$$

c) Numărul natural x se divide cu x deci $x \cdot 50y$ se divide cu x. Aşadar, putem scrie:

$$50 \cdot (x : x)y = 50y.$$

În continuare, putem scrie:

d) $(126a) : a = 126 \cdot (a : a) = 126 \cdot 1 = 126$; e) $325x$; f) $9a$; g) $13x$; h) $117a$; i) $3ab$; j) $6 \cdot 13$; k) 4.

IV.106PO. Rezolvaţi ecuaţiile următoare în $\mathbb{N}$:

a) $(25x) : 5 = 10$;
b) $(2x + 3x) : 5 = 7$;
c) $(45x + 27x) : 36 = 4$;
d) $[25(36x - 11x)] : 125 = 500$;
e) $(12x) : 4 = 30$;
f) $(3x + 7x) : 2 = 15$;
g) $3(132x - 50x) : 41 = 60$;
h) $[8(2x + 7x) - 2x] : 7 = 1\,000$;
i) $[2(345x + 55x)] : 4 = 1\,000$;
j) $[20(85x - 13x)] : 9 = 1\,600$;
k) $[7(35x - 28x) + 5(26x - 13x)] : 2 = 1\,140$.

R. Folosim proprietatea enunţată în problema anterioară şi modelul aplicat la rezolvarea ei. Avem:

a) $(25 : 5) \cdot x = 10$; $5x = 10$; $x = 2$; $S = \{2\}$;
b) $5x : 5 = 7$; $(5 : 5)x = 7$; $1x = 7$; $x = 7$; $S = \{7\}$;
c) $72x : 36 = 4$; $(72 : 36)x = 4$; $2x = 4$; $x = 2$; $S = \{2\}$;
d) $[25 \cdot 25x] : 125 = 500$; $[25 \cdot 5 \cdot 5x] : 125 = 500$;
$[125 \cdot 5x] : 125 = 500$; $[(125 : 125)] \cdot 5x = 500$;
$5x = 500$; $x = 100$; $S = \{100\}$.
e) $3x = 30$; $x = 10$; $S = \{10\}$; f) $5x = 15$; $S = \{3\}$; g) $S = \{10\}$;
h) $S = \{100\}$; i) $S = \{5\}$; j) $S = \{10\}$; k) $S = \{20\}$.

IV.107PO. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{N}$:

a) $(3x + 5x) : 4 \leqslant 10$;
b) $[5(26x + 10x)] : 6 \leqslant 60$;
c) $[5(17x + 13x) : 5] + 10x < 80$;
d) $(2x + 3x) : 5 < 4$;
e) $2(3x + 10x) : 13 < 6$;
f) $(6x - 3x) : 3 \leqslant 5$;
g) $[(4x + 9x) : 13] + 6x \geqslant 140$;

h) $[(13x + 7x) : 2] + 15x < 75$;
i) $[4(15x + 65x) : 5] + 2x > 198$.

R. a) Succesiv :

$$8x : 4 \leqslant 10;\ (8 : 4) \cdot x \leqslant 10;\ 2x \leqslant 10.$$

Împărţim în ambii membri cu 2 şi obţinem $x \leqslant 5$ deci mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) Succesiv:

$$[5(36x)] : 6 \leqslant 60;\ 5(36 : 6)x \leqslant 60;\ 5 \cdot 6x \leqslant 60;\ 30x \leqslant 60.$$

Împărţim ambii membri cu 30 şi obţinem $x \leqslant 2$. Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2\}$.

c) Succesiv :

$$[5 \cdot 30x] : 5 + 10x < 80;\ 30x + 10x < 80;\ 40x < 80;\ x < 2.$$

Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1\}$.
d) Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2; 3\}$.
e) Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2\}$.
f) Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
g) Succesiv :

$$7x \geqslant 140;\ x \geqslant 20.$$

Mulţimea soluţiilor este $S = \{20; 21; 22; \ldots\}$;
h) Mulţimea soluţiilor este $S = \{0; 1; 2\}$;
i) Mulţimea soluţiilor este $S = \{4; 5; 6; \ldots\}$.

IV.108[PP]. Scrieţi în fiecare caz ultima cifră a următoarelor puteri :
a) $2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6; 2^7; 2^8; 2^9; 2^{10}$;
b) $3^1; 3^2; 3^3; 3^4; 3^5; 3^6; 3^7; 3^8; 3^9; 3^{10}$;
c) $4^1; 4^2; 4^3; 4^4; 4^5; 4^6; 4^7; 4^8; 4^9; 4^{10}$;
d) $5^1; 5^2; 5^3; 5^4; 5^5; 5^6; 5^7; 5^8; 5^9; 5^{10}$;
e) $6^1; 6^2; 6^3; 6^4; 6^5; 6^6; 6^7; 6^8; 6^9; 6^{10}$;
f) $9^1; 9^2; 9^3; 9^4; 9^5; 9^6; 9^7; 9^8; 9^9; 9^{10}$.

R. Ultima cifră o găsim realizînd calculele :

$2^1 = 2$; ultima cifră este 2;
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$; ultima cifră este 4;
$2^3 = 4 \cdot 2 = 8$; ultima cifră este 8;
$2^4 = 8 \cdot 2 = 16$; ultima cifră este 6;
$2^5 = 16 \cdot 2 = 32$; ultima cifră este 2;
$2^6 = 32 \cdot 2 = 64$; ultima cifră este 4;
$2^7 = 64 \cdot 2 = \ldots 8$; ultima cifră este 8;
$2^8 = 128 \cdot 2 = \ldots 6$; ultima cifră este 6;
$2^9 = 256 \cdot 2 = \ldots 2$; ultima cifră este 2;
$2^{10} = 512 \cdot 2 = \ldots 4$ ultima cifră este 4.

Se observă că ultima cifră se repetă în şirul de mai sus din patru în patru.

Pentru celelalte cazuri vom întocmi un tablou în care vom trece ultima cifră corespunzătoare:

exponentul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
exercițiul b)	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9
exercițiul c)	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6
exercițiul d)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
exercițiul e)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
exercițiul f)	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1

IV.109M;PO. Găsiți ultima cifră a următoarelor numere:

$$a)\ 6^{1977};\ b)\ 9^{1977};\ c)\ 3^{1977};\ d)\ 2^{1977}.$$

R. a) S-a observat în exercițiul anterior, IV.108 e), că ultima cifră a oricărei puteri cu baza 6 și exponentul număr natural pînă la 11 este 6. Aceasta se întîmplă în general. Deci ultima cifră a numărului 6^{1977} este 6.

b) S-a observat în exercițiul anterior, IV.108 f), că puterile cu exponent număr natural ale lui 9 au ultima cifră 9 cînd exponentul este număr impar sau au ultima cifră 1 cînd exponentul este număr par. În cazul nostru, 9^{1977}, exponentul este 1977, număr natural impar, deci ultima cifră este 9.

c) În exercițiul IV.108 b) s-a observat că puterile cu ultima cifră aceeași se repetă din patru în patru.

Astfel: cu ultima cifră 1 sînt: 3^4; 3^8; 3^{12}; 3^{16}; 3^{20}; 3^{24}... (puterile cu exponent multiplu de 4; orice multiplu de 4 se poate scrie astfel: $4n$). Deci 3^{4n}, n număr natural, are ultima cifră pe 1.

Ultima cifră 3 o au puterile: 3^1; 3^5; 3^9; 3^{13}; 3^{17}; 3^{21}... (puterile cu exponent multiplu de 4 plus 1; orice multiplu de 4 plus 1 se poate scrie astfel: $4n+1$) Deci 3^{4n+1}, n număr natural, are ultima cifră pe 3.

Ultima cifră 9 o au puterile: 3^2; 3^6; 3^{10}; 3^{14}; 3^{18}; 3^{22};... (puterile cu exponent multiplu de patru plus doi; orice multiplu de patru plus doi se poate scrie astfel: $4n+2$).

Deci 3^{4n+2}, n număr natural, are ultima cifră pe 9.

Ultima cifră 7 o au puterile cu exponent orice multiplu de patru plus trei. Deci 3^{4n+3}, n număr natural, are ultima cifră pe 7.

În cazul nostru, exponentul 1 977 prin împărțire la 4 dă cîtul 494 și restul 1. Putem deci scrie, folosind teorema împărțirii cu rest:

$$1\,977 = 4 \cdot 494 + 1.$$

Aceasta indică faptul că 1 977 este multiplu de 4 plus 1.

Rezultă că $3^{1\,977}$ se află printre numerele care au ultima cifră 3.

d) Puterile cu baza doi se împart în patru grupe, după ultima cifră (vezi exercițiul IV.108, a). Deoarece 1 977 este multiplu de 4 plus 1 înseamnă că $2^{1\,977}$ se află printre numerele care au ultima cifră 2.

IV.110. Un număr par ridicat la puterea a patra începe și se termină cu aceeași cifră. Care este această cifră?

Dați măcar un exemplu.

R. Aflăm cu ce cifre se termină puterile de ordin patru ale numerelor pare de o singură cifră:

$$0^4 = 0\,;\ 2^4 = 16\,;\ 4^4 = 256\,;\ 6^4 = 1\,296\,;\ 8^4 = 4\,096.$$

Deoarece numerele pare se termină cu 0 sau 2 sau 4 sau 6 sau 8, alte puteri nu avem de calculat.

Observăm că puterile de ordin patru ale numerelor pare se termină cu 0 sau cu 6. Dar cu zero nu poate începe un număr (doar în cazul particular cînd numărul este 0).

Singura cifră cu care poate să înceapă și să se termine puterea a patra a unui număr par este cifra 6.

Iată două exemple:

$$16^4 = 65\,536\,;\ 28^4 = 614\,656.$$

IV.111^{PO}. Găsiți un număr natural de trei cifre știind că este divizibil cu 22, împărțit la 5 dă restul 2, iar cifra sutelor este cu 4 mai mare decît cifra unităților.

(M. Țena, G.M., 5/1971)

R. Notăm numărul cu $\overline{abc}$. Deoarece cifra sutelor este cu 4 mai mare decît cifra unităților putem avea următoarele numere:

$$\overline{4b0},\ \overline{5b1},\ \overline{6b2},\ \overline{7b3},\ \overline{8b4},\ \overline{9b5}.$$

Deoarece numărul este divizibil cu 22, rezultă că este număr par și vom avea numai următoarele situații:

$$\overline{4b0},\ \overline{6b2},\ \overline{8b4}.$$

Deoarece numărul prin împărțire la 5 dă restul 2, înseamnă că nu este divizibil cu 5, așa cum este numărul $\overline{4b0}$.

Mai rămîn de cercetat numerele $\overline{6b2}$ și $\overline{8b4}$. Vom avea, folosind împărțirea cu rest:

$$\overline{6b2} = m \cdot 5 + 2\,;\ \overline{8b4} = n \cdot 5 + 2$$

adică $\overline{6b0} = m \cdot 5$ și $\overline{8b2} = n \cdot 5$.

Aceasta înseamnă că $\overline{6b0}$ este multiplu de 5, dar $\overline{8b2}$ nu este multiplu de 5. Deci a mai rămas numărul $\overline{6b2}$. Pentru ca acesta să fie divizibil cu 22 trebuie ca $b = 8$.

Deci numărul cerut este 682.

1. (3p) Se dau numerele:
14; 23; 0; 5; 140; 39; 42; 171; 1; 45; 12 790; 101; 10; 2; 13.
Enumerați:
a) numerele divizibile cu 2;
b) numerele divizibile cu 5;
c) numerele divizibile cu 3;
d) numerele divizibile cu 9;
e) numerele divizibile cu 10;
f) numerele prime;
g) numerele impare;
h) numerele pare.

2. (2p) Scrieți divizorii naturali ai numerelor:
a) 12; b) 16; c) 5; d) 20.

3. (5p) Scrieți sub formă de produs următoarele numere:
a) 12; b) 8; c) 6; d) 30; e) 120; f) 468; g) 160; h) 420; i) 3 200; j) 6 318.

4. (4p) Aflați cel mai mare divizor comun al următoarelor grupe de numere:
a) 6; 12; b) 4; 6; c) 12; 16; d) 20; 30; 40; e) 32; 16; 48; 52; f) 120; 110; 225; g) 42; 294; 420; h) 42; 37; 280.

5. (4p) Aflați cel mai mic multiplu comun al următoarelor grupe de numere:
a) 4; 12; b) 10; 5; c) 6; 8; d) 12; 24; e) 12; 16; 18; f) 2; 4; 6; 8; g) 40; 30; 50; h) 210; 2 800; 14 000.

6. (2p). a) Scrieți multiplii naturali ai lui 10 strict mai mici decît 70; b) Scrieți multiplii lui 8 mai mari ca 23 și mai mici sau egali decît 88.

Notă. Timp de lucru 50 minute.

TESTUL Nr. 11

1. (3p) Se dă mulțimea $A = \{x | x \in A;\ 239 \leqslant x < 250\}$.
Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$$B = \{x \mid x \in A,\ 2|x\},\ C = \{x \mid x \in A,\ 4|x\},\ D = \{x \mid x \in A,\ 9|x\},$$

$$E = \{x \mid x \in A,\ 25|x\},\ F = \{x \mid x \in A,\ 100|x\},\ G = \{x \mid x \in A,\ 6|x\}.$$

2. (4p) Enumerați elementele multimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x|8\},\ B = \{x \in \mathbb{N}, \mid x|12\},\ C = \{x \in \mathbb{N}, \mid x|9\},$$

$$A \cap B,\ B \cap C,\ A \cap C,\ A \cap B \cap C,\ A - (B \cup C).$$

3. (2p) Scrieți toți divizorii numărului $2 \cdot 3^3$.

4. (2p) Se dau numerele: 14; 5; 62; 45; 6; 2. Scrieți perechile de numere prime între ele ce se formează cu aceste numere.

5. (1p) Scrieți cel mai mare număr de 6 cifre diferite, divizibil cu 8.

6. (1p) Scrieți cel mai mare număr de 2 cifre divizibil cu 6 și 8.

[1] Rezultatele testelor se găsesc la pagina 338.

7. (2p) Scrieţi ca o sumă de numere prime următoarele numere: 24; 53; 55; 125.

8. (1p) Scrieţi 3 numere prime între ele, formate dintr-o singură cifră fiecare.

9. (2p) Scrieţi trei numere naturale care au ca cel mai mare divizor comun pe 321.

10. (2p) Găsiţi cea mai mare măsură comună în următoarele situaţii:

a) 12 km 240 m şi 306 m; b) 10 lei 50 bani şi 18 lei 75 bani.

Notă. Timp de lucru 50 minute.

TESTUL Nr. 12

1. (3p) Scrieţi numerele mai mici ca 30 care sînt produse numai de două numere prime.

2. (4p) Găsiţi trei numere naturale a căror sumă este cel mai mare divizor prim al numărului 44 320, astfel încît al doilea să fie de două ori mai mare ca primul şi cu 27 mai mic decît al treilea.

3. (2p) Găsiţi trei numere naturale care au cel mai mare divizor comun pe 24, iar cel mai mic multiplu comun pe 720.

4. (1p) Roata din faţă a unei căruţe are circumferinţa de 3 m, iar cea din spate 2 m.

Care este cea mai mică distanţă pe care trebuie să o parcurgă căruţa dacă fiecare roată face un număr întreg de învîrtituri?

5. (3p Numărăm merele dintr-un coş. Cînd le numărăm cîte două, rămîne un singur măr; aşa se întîmplă cînd le numărăm cîte trei, cîte patru, cîte cinci şi cîte şase. Cînd le numărăm cîte şapte nu a mai rămas nici un măr. Cîte mere sînt în coş, dacă numărul lor este cel mai mic posibil?

6. (2p) Suma dintre un număr prim şi un număr natural impar este 1 543. Aflaţi numerele.

(I.C. Ligor, G.M., 8/1978)

7. (3p) Găsiţi numerele de forma $\overline{abca}$, care sînt divizibile cu 15 ştiind că $a + b = 11$. Care din ele este divizibil cu 11?

(D. Săvulescu, G.M., 5/1978)

8. (2p) Arătaţi că numărul:

$$3^{9+2} \cdot 4^{9+3} + 3^{9+3} \cdot 4^{9+2}$$

este divizibil cu 63.

(R. Cornea, G.M., 2—3/1982)

Notă. Timp de lucru: 2 ore.

NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

Noțiuni teoretice

În acest capitol vom folosi următoarele cunoștințe:

1. Scrierea $\frac{m}{n}$ este o fracție în cazul cînd $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$; m se numește *numărător*, iar n, *numitor*.

2. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ pentru care avem $a \cdot d = b \cdot c$ se numesc **fracții** *echivalente*; se notează $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3. Se obțin fracții echivalente prin procedeele numite: *amplificare* și *simplificare*.

4. O fracție la care cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului este 1 se numește fracție *ireductibilă*.

5. Un număr rațional se scrie cu ajutorul oricărei fracții, *fracție-reprezentant* al său.

6. Mulțimea de fracții echivalente cu o fracție dată se numește număr *rațional*.

7. Avem:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

8. Pentru adunarea $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$, se aduc reprezentanții celor două numere raționale la același numitor.

9. Adunarea de numere raționale pozitive este o operație:

a) comutativă:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b};$$

b) asociativă:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right);$$

parantezele se pot așeza în orice ordine;

c) numărul rațional 0 este element neutru:

$$\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

10. Avem:

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

11. Pentru efectuarea scăderii $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$, se aduc reprezentanții celor două numere raționale la același numitor.

12. Scăderea de numere raționale pozitive este o operație:

a) necomutativă:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}-\frac{a}{b};$$

b) neasociativă:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)-\frac{m}{n}\neq\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right);$$

parantezele nu se pot așeza la întîmplare, ci numai așa cum sînt date.

13. Avem:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d};$$

14. Înmulțirea de numere raționale pozitive este o operație:

a) comutativă:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b};$$

b) asociativă:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right);$$

parantezele se pot așeza în orice ordine;

c) numărul rațional 1 este element neutru:

$$\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

15. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ se numește *inversul* numărului rațional $\frac{b}{a}\neq 0$. El are proprietatea:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

16. Avem:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

17. Împărţirea de numere raţionale pozitive este o operaţie:
a) necomutativă:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} : \frac{a}{b};$$

b) neasociativă:

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n} \neq \frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n}\right);$$

parantezele nu se pot aşeza la întîmplare, ci numai aşa cum sînt date.
Avem, de asemenea:

18. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

19. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}.$

20. $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{nm}.$

21. Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale este aceeaşi ca şi la numere naturale.

22. Dacă a şi b sînt numere raţionale atunci numărul raţional $\frac{a+b}{2}$ se numeşte *media aritmetică* a numerelor a şi b.

23. Exprimarea: $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}$ se traduce astfel:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

24. $\frac{p}{100}$ se mai scrie $p\%$.

25. $\frac{p}{1\,000}$ se mai scrie $p‰$.

26. Unitatea de măsură pentru arie este 1 m^2.

27. Avem transformările:
1 $km^2 = 10^2$ $hm^2 = 10^4$ $dam^2 = 10^6$ $m^2 = 10^8$ $dm^2 = 10^{10}$ $cm^2 =$ $= 10^{12}$ mm^2.

28. Aria pătratului este egală cu l^2, unde l este lungimea laturii pătratului.

29. Aria dreptunghiului este egală cu $L \cdot l$, unde L şi l sînt lungimile laturilor perpendiculare.

30. Aria triunghiului este egală cu $\frac{l \cdot i}{2}$, unde l este lungimea unei laturi, iar i lungimea înălțimii corespunzătoare acelei laturi.

31. Aria paralelogramului este egală cu $l \cdot i$, unde l și i sînt lungimile unei laturi și a înălțimii corespunzătoare laturii.

32. Unitatea de măsură pentru volum este $1\,m^3$.

33. Avem transformările $1\,km^3 = 10^3\,hm^3 = 10^6\,dam^3 = 10^9\,m^3 = 10^{12}\,dm^3 = 10^{15}\,cm^3 = 10^{18}\,mm^3$.

34. Volumul cubului este l^3, unde l este lungimea muchiei cubului.

35. Volumul paralelipipedului dreptunghic este $L \cdot l \cdot i$, unde L, l, i sînt, respectiv, lungimile bazei mari, bazei mici și înălțimii.

V.1. Din scrierile următoare, enumerați fracțiile:

$$\frac{2}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{0}{7};\ \frac{20}{0};\ \frac{0}{0};\ \frac{\frac{1}{2}}{5};\ \frac{0{,}5}{41};\ \frac{0}{480};\ \frac{19}{3};\ \frac{a}{2};\ \frac{410}{a}.$$

R. Fracții sînt $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{0}{7}$; $\frac{0}{480}$; $\frac{19}{3}$; $\frac{a}{2}$ dacă $a \in \mathbb{N}$ și $\frac{410}{a}$ dacă $a \in \mathbb{N}^*$.

V.2. Se dă mulțimea de fracții:

$$A = \left\{\frac{3}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{5}{4};\ \frac{0}{25};\ \frac{137}{43};\ \frac{7}{6};\ \frac{8}{12};\ \frac{2}{5};\ \frac{29}{4}\right\}.$$

Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$B = \{x \mid x$ este numărător al lui $y,\ y \in A\}$, $C = \{x \mid x$ este numitor al lui $y,\ y \in A\}$, $B \cup C$, $B \cap C$; $B - C$.

R. Avem $B = \{3;\ 8;\ 5;\ 0;\ 137;\ 7;\ 2;\ 29\}$, $C = \{5;\ 4;\ 25;\ 43;\ 6;\ 12\}$, și:

$B \cup C = \{3;\ 8;\ 5;\ 0;\ 137;\ 7;\ 2;\ 29;\ 4;\ 25;\ 43;\ 6;\ 12\}$,

$B \cap C = \{5\}$, $B - C = \{3;\ 8;\ 0;\ 137;\ 7;\ 2;\ 29\}$.

V.3. Scrieți mulțimea de fracții care au numărătorii egali cu 4 și numitorii numere strict mai mici ca 6.

R. Mulțimea cerută este $\left\{\frac{4}{1};\ \frac{4}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{4};\ \frac{4}{5}\right\}$.

V.4^{PP}. Scrieți mulțimea de fracții care au numărătorii divizorii naturali ai lui 4 și numitorii divizorii naturali ai lui 6.

R. Divizorii naturali ai lui 4 sînt: 1; 2; 4, iar divizorii naturali ai lui 6 sînt: 1; 2; 3; 6. Mulțimea cerută este:

$$\left\{\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{2}{1};\ \frac{2}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{6};\ \frac{4}{1};\ \frac{4}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{6}\right\}.$$

V.5. Scrieți mulțimea de fracții care au numitorii divizori naturali ai lui 2 și numărătorii divizori naturali ai lui 8.

R. Mulţimea cerută este $\left\{\frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{4}{1};\ \frac{8}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{2};\ \frac{4}{2};\ \frac{8}{2}\right\}$.

V.6. Se dă mulţimea:

$$A = \left\{\frac{2}{3};\ \frac{5}{6};\ \frac{10}{10};\ \frac{3}{9};\ \frac{17}{4};\ \frac{9}{1};\ \frac{15}{15};\ \frac{20^2}{399};\ \frac{2^3}{3^2};\ \frac{4^3}{3^4}\right\}.$$

Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

$B = \{x \mid x\ x \in A$, este fracţie subunitară$\}$,

$C = \{x \mid x \in A$, x este fracţie supraunitară$\}$,

$D = \{y \mid y \in A$, y este fracţie echiunitară$\}$,

$B \cup C,\ B \cap C;\ B \cup C \cup D.$

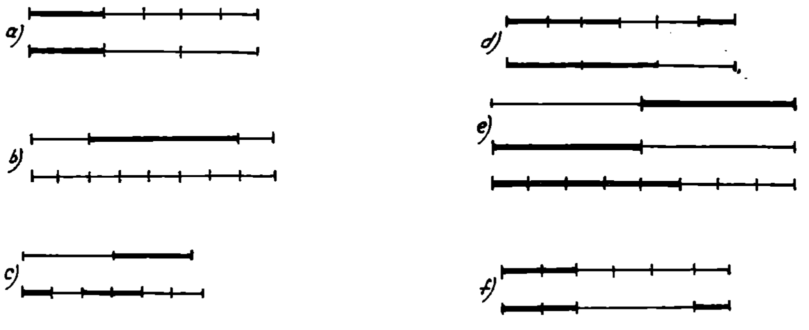
R. Avem: $B = \left\{\frac{2}{3};\ \frac{5}{6};\ \frac{3}{9};\ \frac{2^3}{3^2};\ \frac{4^3}{3^4};\right\}$; $C = \left\{\frac{17}{4};\ \frac{9}{1};\ \frac{20^2}{399}\right\}$,

$D = \left\{\frac{10}{10};\ \frac{15}{15}\right\}$, $B \cup C = A - D$, $B \cap C = \Phi$, $B \cup C \cup D = A$.

V.7. Se dau mulţimile $A = \{2;\ 3;\ 5\}$ şi $B = \{0;\ 1;\ 2\}$. Enumeraţi elementele mulţimii $M = \left\{x \mid x \text{ este fracţie};\ x = \frac{a}{b};\ a \in A;\ b \in B\right\}$.

R. Mulţimea cerută este $\left\{\frac{2}{1};\ \frac{2}{2};\ \frac{3}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{1};\ \frac{5}{2}\right\}$.

V.8. Caracterizaţi cu fracţii echivalente segmentele îngroşate în în situaţiile ce urmează (acolo unde este cazul):



R. a) Avem fracţiile echivalente $\frac{2}{6}$ şi $\frac{1}{3}$; b) avem fracţiile echivalente $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$; c) $\frac{1}{2}$ echivalentă cu $\frac{3}{6}$; d) $\frac{4}{6}$ echivalentă cu $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{2}$ echivalentă cu $\frac{2}{4}$ echivalentă cu $\frac{4}{8}$; f) $\frac{2}{6}$ nu este echivalentă cu $\frac{3}{6}$.

V.9. Găsiţi valoarea logică a următoarelor propoziţii:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; b) $\frac{3}{6} = \frac{10}{20}$; c) $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$; e) $\frac{4}{9} = \frac{2}{4}$;

f) $\frac{5}{2}=\frac{15}{5}$; ; g) $\frac{0}{3}=\frac{1}{4}$; ; h) $\frac{0}{5}=\frac{0}{7}$; i) $\frac{20}{10}=\frac{4}{2}$; j) $\frac{200}{300}=\frac{20}{30}$;
k) $\frac{100}{40}=\frac{1\,000}{200}$.

R. a) Verificăm dacă fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ sînt echivalente. Deoarece $1\cdot 4=2\cdot 2$ avem $v(a)=1$; b) Analog, deoarece $3\cdot 20=6\cdot 10$ avem $v(b)=1$; c) $v(c)=1$; d) $v(d)=1$; e) $v(e)=0$; f) $v(f)=0$; g) $v(g)=0$; h) $v(h)=1$; i) $v(i)=1$; j) $v(j)=1$; k) $v(k)=0$.

V.10. Găsiți $x\in\mathbb{N}$ astfel încît să obțineți propoziții adevărate în fiecare caz:

a) $\frac{1}{2}=\frac{x}{4}$; b) $\frac{2}{13}=\frac{x}{12}$; c) $\frac{x}{4}=\frac{3}{2}$; d) $\frac{4}{x}=\frac{13}{6}$; e) $\frac{21}{3}=\frac{7}{x}$;
f) $\frac{3}{4}=\frac{x}{12}$; g) $\frac{3}{25}=\frac{x}{100}$; h) $\frac{x}{23}=\frac{3}{46}$; i) $\frac{25}{x}=\frac{100}{7}$; j) $\frac{304}{x}=\frac{25}{75}$.

R. a) Avem $1\cdot 4=2x$, sau $2x=4$, deci $x=2$; b) Avem $2\cdot 12=13\cdot x$ sau $13\cdot x=24$; evident $x\notin\mathbb{N}$; c) $2x=12$, $x=6$; d) $4\cdot 6=13\cdot x$; $13x=24$; $x\notin\mathbb{N}$; e) $x=1$; f) $x=9$; g) $x=12$; h) $x\notin\mathbb{N}$; i) $x\notin\mathbb{N}$; j) $x=912$.

V.11. Aflați x din fracțiile de mai jos, astfel încît fiecare fracție să fie echivalentă cu $3/4$:

$$\frac{x}{8},\ \frac{12}{2x},\ \frac{15}{7x},\ \frac{x+1}{12},\ \frac{5x+4}{32},\ \frac{27}{2x-5},\ \frac{18}{\frac{1}{x}}.$$

R. Avem, succesiv:

$$\frac{x}{8}=\frac{3}{4};\quad x=\frac{3\cdot 8}{4};\quad x=6.$$
$$\frac{12}{2x}=\frac{3}{4};\quad x=\frac{12\cdot 4}{2\cdot 3};\quad x=8$$
$$\frac{15}{7x}=\frac{3}{4};\quad x=\frac{15\cdot 4}{7\cdot 3};\quad x=\frac{20}{7}.$$
$$\frac{x+1}{12}=\frac{3}{4};\quad x=\frac{12\cdot 3}{4}-1;\quad x=8.$$
$$\frac{5x+4}{32}=\frac{3}{4};\quad x=\left(\frac{32\cdot 3}{4}-4\right):5;\quad x=4.$$
$$\frac{27}{2x-5}=\frac{3}{4};\quad x=\left(\frac{27\cdot 4}{3}+5\right):2;\quad x=20{,}5.$$
$$\frac{18}{\frac{1}{x}}=\frac{3}{4};\quad x=\frac{3}{18\cdot 4};\quad x=\frac{1}{24}.$$

20 — c. 650

V.12. Un elev fiind întrebat cîte probleme a rezolvat din tema avută acasă, a răspuns că a rezolvat $\frac{2}{3}$ din numărul de probleme. Putea să răspundă folosind fracţii echivalente? Dacă da, daţi trei astfel de răspunsuri.

R. Da. De exemplu, putea spune fracţiile echivalente $\frac{4}{6}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{20}{30}$ etc.

V.13[PP]. Scrieţi mulţimile de fracţii echivalente între ele, care au numitorii divizori naturali ai lui 4 şi numărătorii divizori naturali ai lui 12.

R. Vom scrie mulţimea de fracţii care au numitorii divizori naturali ai lui 4 şi numărătorii divizori naturali ai lui 12:

$$\left\{\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{4}{1}; \frac{6}{1}; \frac{12}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{6}{2}; \frac{12}{2}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{6}{4}; \frac{12}{4}\right\}.$$

Dintre acestea avem mulţimile:

$$\left\{\frac{1}{1}; \frac{2}{2}; \frac{4}{4}\right\}; \left\{\frac{2}{1}; \frac{4}{2}\right\}; \left\{\frac{3}{1}; \frac{6}{2}; \frac{12}{4}\right\}; \left\{\frac{4}{1}\right\}; \left\{\frac{6}{1}; \frac{12}{2}\right\};$$

$$\left\{\frac{12}{1}\right\}; \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}\right\}; \left\{\frac{3}{2}; \frac{6}{4}\right\}; \left\{\frac{1}{4}\right\}; \left\{\frac{3}{4}\right\}.$$

V.14. Scrieţi mulţimile de fracţii echivalente între ele, care au numărătorii divizorii naturali ai lui 2 şi numitorii divizorii naturali ai lui 4.

R. Mulţimile cerute sînt:

$$\left\{\frac{1}{1}; \frac{2}{2}\right\}; \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}\right\}; \left\{\frac{1}{4}\right\}; \left\{\frac{2}{1}\right\}.$$

V.15. Amplificaţi cu 5 elementele mulţimii de fracţii:

$$\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{0}{2}; \frac{4}{3}; \frac{10}{10}; \frac{21}{3}; \frac{1\,001}{300}; \frac{2}{1}; \frac{10}{5}\right\}.$$

R. Obţinem mulţimea:

$$\left\{\frac{5}{10}; \frac{15}{25}; \frac{0}{10}; \frac{20}{15}; \frac{50}{50}; \frac{105}{15}; \frac{5\,005}{1\,500}; \frac{10}{5}; \frac{50}{25}\right\}.$$

V.16. Aduceţi la acelaşi numitor următoarele fracţii:

a) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{12}$; e) $\frac{1}{120}$; $\frac{1}{160}$;

$\frac{1}{150}$; f) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; g) $\frac{11}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{24}$; h) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{12}$; i) $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{36}$; j) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{18}$; k) $\frac{1}{45}$; $\frac{1}{90}$; $\frac{1}{5}$; l) $\frac{3}{46}$; $\frac{1}{69}$; m) $\frac{1}{98}$; $\frac{7}{168}$; $\frac{1}{440}$.

R. a) Fracţia $\frac{1}{3}$ se amplifică cu 2 ; avem : $\frac{2}{6}$ şi $\frac{1}{6}$; b) Avem $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}$; c) numitorii sînt numere prime între ele deci c.m.m.m.c. al lor este $6 \cdot 5 = 30$. Avem fracţiile $\frac{5}{30}$; $\frac{12}{30}$. d) Aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor. Cum $15 = 3 \cdot 5$; $12 = 3 \cdot 2^2$ rezultă că c.m.m.m.c. al lor este $3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 20 = 60$. Prima fracţie se amplifică cu $60 : 15 = 4$, iar a doua se amplifică cu $60 : 12 = 5$. Avem fracţiile $\frac{^{4)}2}{15} = \frac{8}{60}$ şi $\frac{^{5)}3}{12} = \frac{15}{60}$.

e) Aflăm cel mai mic multiplu comun potrivit schemei:

$$\begin{array}{r|l}
120 & 2 \cdot 5 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
160 & 2 \cdot 5 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
150 & 2 \cdot 5 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$160 = 2^5 \cdot 5$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

c.m.m.m.c. $= 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 = 8 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 3 = 8 \cdot 100 \cdot 3 = 2\,400$.

Fracţiile se amplifică cu $2\,400 : 120 = 20$, $2\,400 : 160 = 15$ şi respectiv $2\,400 : 150 = 16$.

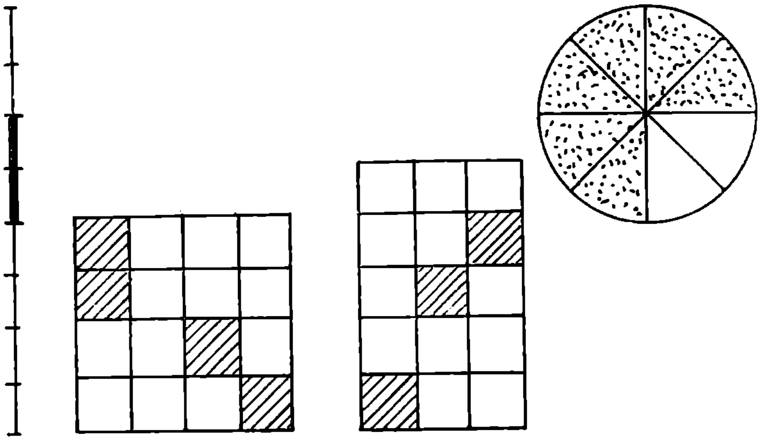
Avem :

$$\frac{^{20)}1}{120} = \frac{20}{2\,400}; \quad \frac{^{15)}1}{160} = \frac{15}{2\,400}; \quad \frac{^{16)}1}{150} = \frac{16}{2\,400};$$

În continuare obţinem rezultatele :

f) $\frac{2}{8}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{4}{8}$; g) $\frac{44}{24}$; $\frac{2}{24}$; $\frac{1}{24}$; h) $\frac{4}{36}$; $\frac{3}{36}$; i) $\frac{3}{36}$; $\frac{1}{36}$; j) $\frac{1}{36}$; $\frac{2}{36}$; k) $\frac{2}{90}$; $\frac{1}{90}$; $\frac{18}{90}$; l) $\frac{9}{138}$; $\frac{2}{138}$; m) $\frac{660}{2^3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$; $\frac{7^2 \cdot 5 \cdot 11}{2^3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$; $\frac{147}{2^3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$.

V.17. Scrieţi fracţiile corespunzătoare părţilor marcate cu haşuri şi puncte în figurile de mai jos şi apoi simplificaţi :



R. Avem, succesiv, fracţiile $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{6}{8}$ şi apoi, simplificînd obţinem fracţiile $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$.

V.18. Simplificaţi cu puteri cu exponent număr natural ale lui 2, următoarele fracţii :

$$\frac{2}{4};\ \frac{8}{12};\ \frac{16}{6};\ \frac{24}{60};\ \frac{9}{12};\ \frac{400}{500};\ \frac{16}{32}.$$

R. Puterile lui 2 cu exponent număr natural sînt : $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ etc.

Avem deci fracţiile :

$$\frac{2^{(2}}{4} = \frac{1}{2};\quad \frac{8^{(4}}{12} = \frac{2}{3};\quad \frac{16^{(2}}{6} = \frac{8}{3};\quad \frac{24^{(4}}{60} = \frac{6}{15};\quad \frac{9^{(1}}{12} = \frac{9}{12};\quad \frac{400^{(4}}{500} = \frac{100}{125};$$
$$\frac{16^{(16}}{32} = \frac{1}{2}.$$

V.19. Simplificaţi cu cel mai mare divizor comun al numărătorului şi al numitorului următoarele fracţii :

a) $\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 3}$; b) $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 5}$; c) $\frac{23 \cdot 4^2}{29 \cdot 4^3}$; d) $\frac{5 \cdot 2^3 \cdot 7^5}{10 \cdot 7^3 \cdot 11}$; e) $\frac{3 \cdot 5^2}{2 \cdot 5}$; f) $\frac{7 \cdot 2 \cdot 3^2}{5 \cdot 3 \cdot 2^2}$.

R. Fracţiile sînt :

a) $\frac{2 \cdot 5^{(2}}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$; b) $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5^{(2^2 \cdot 5}}{2^3 \cdot 5} = \frac{3}{2}$; c) $\frac{23 \cdot 4^{2^{(4^2}}}{29 \cdot 4^3} = \frac{23}{29 \cdot 4} = \frac{23}{116}$;
d) $\frac{5 \cdot 2^3 \cdot 7^5\ ^{(10 \cdot 7^3}}{10 \cdot 7^3 \cdot 11} = \frac{2^2 \cdot 7^2}{11} = \frac{196}{11}$; e) $\frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$; f) $\frac{21}{10}$.

V.20. Simplificați cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului, următoarele fracții :

a) $\frac{6}{8}$; b) $\frac{20}{30}$; c) $\frac{338}{130}$; d) $\frac{840}{1\,320}$; e) $\frac{12}{8}$; f) $\frac{30}{42}$; g) $\frac{120}{40}$; h) $\frac{42}{16}$;
i) $\frac{46}{24}$; j) $\frac{25}{50}$; k) $\frac{1\,302}{2\,604}$; l) $\frac{324}{162}$; m) $\frac{528}{256}$; n) $\frac{5\,290}{1\,580}$.

R. Avem a) $\frac{6^{(2}}{8}=\frac{3}{4}$; b) Avem $\frac{20^{(10}}{30}=\frac{2}{3}$; c) Avem schema :

$$\begin{array}{l} 338 = 2\cdot 13^2 \\ 130 = 2\cdot 13\cdot 5 \\ \hline \text{c.m.m.d.c.} = 2\cdot 13 = 26 \end{array}$$

Deci $\frac{338^{(26}}{130}=\frac{13}{5}$.

d) Avem descompunerile :

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2\cdot 5 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1320 & 2\cdot 5 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 840 = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \\ 1\,320 = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11 \\ \hline \text{c.m.m.d.c.} = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120 \end{array}$$

deci $\frac{840^{\,(120}}{1\,320}=\frac{7}{11}$.

În continuare, avem rezultatele :

e) $\frac{3}{2}$; f) $\frac{5}{7}$; g) $\frac{3}{1}$; h) $\frac{21}{8}$; i) $\frac{23}{12}$; j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{1}{2}$; l) $\frac{2}{1}$; m) $\frac{33}{16}$;
n) $\frac{529}{158}$.

V.21. Scrieți fracțiile echivalente cu fracția $\frac{3}{4}$ astfel încît să aibă numitori pe :

a) 12; b) 108; c) 2; d) 400; e) 1 080; f) 36; g) 14.

R. a) Amplificăm fracția dată cu 3 și obținem $\frac{9}{12}$; b) amplificăm fracția dată cu $108 : 4 = 27$ și obținem $\frac{81}{108}$; c) deoarece fracția dată are numitorul mai mare decît cea pe care o cere problema, înseamnă că fracția dată trebuie simplificată cu 2 ; aceasta nu se simplifică cu 2, căci este ireductibilă deci nu există o fracție echivalentă cu $\frac{3}{4}$ care să aibă numitorul 2 ;

În continuare, avem rezultatele:

c) $\frac{300}{400}$; d) $\frac{810}{1080}$; f) $\frac{27}{36}$; g) nu există.

Observație. Mai putem rezolva și astfel: notăm cu $\frac{x}{12}$ fracția cerută și vom avea $\frac{x}{12}=\frac{3}{4}$ deci $4x = 12 \cdot 3$ adică $x = 36 : 4 = 9$. Așadar, fracția cerută este $\frac{9}{12}$ etc.

V.22[PP]. Se dau fracțiile:

$$\frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{4}{6};\ \frac{0}{9};\ \frac{6}{9};\ \frac{10}{4};\ \frac{20}{30};\ \frac{0}{6};\ \frac{21}{30};\ \frac{17}{34};\ \frac{200}{300};\ \frac{6}{8};\ \frac{34}{51}.$$

Care din ele au fost obținute prin amplificarea fracției $\frac{2}{3}$ și cu ce număr?

R. Simplificăm fiecare fracție pînă devine fracție ireductibilă. Alegem pe acelea care conduc la $\frac{2}{3}$. Avem:

$$\frac{4}{6}^{(2}=\frac{2}{3};\ \frac{6}{9}^{(3}=\frac{2}{3};\ \frac{10}{4}^{(2}=\frac{5}{2};\ \frac{20}{30}^{(10}=\frac{2}{3};\ \frac{21}{30}^{(3}=\frac{7}{10};\ \frac{17}{34}^{(17}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{200}{300}^{(100}=\frac{2}{3};\ \frac{6}{8}^{(2}=\frac{3}{4};\ \frac{34}{51}^{(17}=\frac{2}{3}.$$

Deci fracțiile cerute sînt:

$$\frac{4}{6};\ \frac{6}{9};\ \frac{20}{30};\ \frac{200}{300};\frac{34}{51}.$$

Au fost amplificate cu numerele cu care am simplificat. Ele sînt:

2; 3; 10; 100; 17.

V.23. Se dau fracțiile:

$$\frac{10}{4};\ \frac{9}{6};\ \frac{12}{3};\ \frac{4}{6};\ \frac{30}{20};\ \frac{15}{10};\ \frac{8}{16}.$$

Care din ele au fost obținute prin amplificarea fracției $\frac{3}{2}$ și cu ce număr?

R. Au fost obținute fracțiile $\frac{9}{6}$; $\frac{30}{20}$; $\frac{15}{10}$, prin amplificarea cu 3; 10 și respectiv 5.

V.24[PP]. Scrieți fracțiile echivalente cu fracțiile $\frac{24}{16}$ și $\frac{27}{24}$ care să aibă numitorii egali, folosind simplificarea.

R. Fracţia $\frac{24}{16}$ se simplifică cu 2, 4 şi 8 şi obţinem, respectiv, fracţiile $\frac{12}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{3}{2}$.

Fracţia $\frac{27}{24}$ se simplifică cu 3 şi obţinem fracţia $\frac{9}{8}$. Aşadar, fracţiile cerute sînt, respectiv, $\frac{12}{8}$ şi $\frac{9}{8}$.

V.25. Scrieţi fracţiile echivalente cu fracţiile $\frac{30}{15}$; $\frac{12}{20}$ şi $\frac{4}{10}$ care să aibă numitorii egali, folosind simplificarea.

R. Fracţiile căutate sînt $\frac{10}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$.

V.26. Folosind simplificarea, scrieţi toate fracţiile echivalente cu fracţia:

a) $\frac{24}{16}$; b) $\frac{36}{120}$; c) $\frac{0}{12}$; d) $\frac{8}{12}$; e) $\frac{10}{20}$; f) $\frac{36}{48}$.

R. Avem rezultatele: a) $\frac{12}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{24}{16}$; b) $\frac{18}{60}$; $\frac{9}{30}$; $\frac{6}{20}$; $\frac{36}{120}$; $\frac{12}{40}$; $\frac{3}{10}$; c) $\frac{0}{6}$; $\frac{0}{3}$; $\frac{0}{4}$; $\frac{0}{2}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{0}{12}$; d) $\frac{8}{12}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{2}{3}$; e) $\frac{10}{20}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}$; f) $\frac{36}{48}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{3}{4}$.

V.27. Alegeţi fracţiile ireductibile dintre următoarele fracţii: $\frac{2}{4}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{29}{16}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{207}{909}$; $\frac{77}{121}$; $\frac{143}{309}$; $\frac{39}{143}$; $\frac{410}{205}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{53}{225}$; $\frac{53}{371}$.

R. Fracţiile ireductibile sînt $\frac{7}{4}$; $\frac{29}{16}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{143}{309}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{53}{225}$.

V.28. Care fracţie este mai mare: $\frac{99}{199}$ sau $\frac{999}{1999}$? De ce?

R. Aducem fracţiile la acelaşi numărător:

$$^{111)}\frac{99}{199} = \frac{99 \cdot 111}{199 \cdot 111} = \frac{10\,989}{22\,089}$$

şi:

$$^{11)}\frac{999}{1\,999} = \frac{999 \cdot 11}{1\,999 \cdot 11} = \frac{10\,989}{21\,989}$$

de unde:

$$\frac{10\,989}{22\,089} < \frac{10\,989}{21\,989},$$

iar de aici rezultă $\frac{99}{199} < \frac{999}{1\,999}$.

Mai mare este fracţia $\frac{999}{1\,999}$, pentru că, adusă la acelaşi numărător cu fracţia cealaltă, aceasta are numitorul mai mic.

V.29. Puneţi semnul corespunzător $<$, $>$, $=$ între fracţiile de mai jos:

a) $\frac{12}{87}$, $\frac{24}{153}$; b) $\frac{131}{221}$, $\frac{261}{442}$; c) $\frac{13}{35}$, $\frac{52}{140}$; d) $\frac{137}{92}$, $\frac{50}{80}$.

R. Fie fracţiile a) $\frac{12}{87}$ şi $\frac{24}{153}$. Aducem fracţiile la acelaşi numărător:

$$\frac{12}{87} = \frac{24}{174}$$

de unde $\frac{24}{174} < \frac{24}{153}$, sau $\frac{12}{87} < \frac{24}{153}$.

b) Fie fracţiile $\frac{131}{221}$ şi $\frac{261}{442}$. Aducem fracţiile la acelaşi numitor:

$$\frac{131}{221} = \frac{262}{442}$$

şi din $\frac{262}{442} > \frac{261}{442}$, rezultă $\frac{131}{221} > \frac{261}{442}$.

c) Fie fracţiile $\frac{13}{35}$ şi $\frac{52}{140}$. Simplificăm fracţia $\frac{52}{140}$ cu 4 şi obţinem fracţia $\frac{52}{140} = \frac{13}{35}$, deci fracţiile sînt echivalente.

d) Fie fracţiile $\frac{137}{92}$ şi $\frac{50}{80}$. Avem $\frac{137}{92} > 1$, $\frac{50}{80} < 1$, iar de aici rezultă că $\frac{137}{92} > \frac{50}{80}$.

V.30. Găsiţi toate numerele naturale x, astfel încît:

a) $\frac{x}{51} < \frac{12}{17}$; b) $\frac{12}{17} < \frac{x}{51}$; c) $\frac{12}{18} < \frac{x}{9}$.

R. a) Pentru ca $\frac{x}{51} < \frac{12}{17}$ trebuie să avem $17x < 51 \cdot 12$. Aceasta este o inecuaţie care se rezolvă în $\mathbb{N}$ şi se găseşte că $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 35\}$.

Observăm, totuşi, că dacă amplificăm fracţia $\frac{12}{17}$ cu 3 obţinem fracţia $\frac{36}{51}$. Aşadar $\frac{x}{51} < \frac{36}{51}$ de unde $x < 36$ şi $x \in \mathbb{N}$, adică $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 35\}$; b) Avem $x > 36$, $x \in \mathbb{N}$, adică $x \in \{37 ; 38 ; \ldots\}$; c) Avem $6 < x$, $x \in \mathbb{N}$, adică $x \in \{7 ; 8 ; 9 ; \ldots\}$.

V.31°. Scrieţi toate fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{\overline{12x14}}{\overline{3y32}}$, care se simplifică cu 6.

R. Pentru ca fracţia să se simplifice cu 6 trebuie ca numerele $\overline{12x14}$ şi $\overline{3y32}$ să fie divizibile cu 6, adică cu 2 şi 3. Amîndouă numerele sînt divizibile cu 2. Pentru ca numărul $\overline{12x14}$ să fie divizibil cu 3 trebuie ca $1 + 2 + x + 1 + 4$, adică $8 + x$ să fie divizibil cu 3. Aceasta este posibil pentru $x \in \{1 ; 4 ; 7\}$.

Pentru ca numărul $\overline{3y32}$ să fie divizibil cu 3 trebuie ca $3 + y + 3 + 2$, adică $8 + y$, să fie divizibil cu 3. Aceasta este posibil pentru $y \in \{1 ; 4 ; 7\}$.

Vom avea deci nouă fracţii :

$$\frac{12\,114}{3\,132};\ \frac{12\,114}{3\,432};\ \frac{12\,114}{3\,732};\ \frac{12\,414}{3132};\ \frac{12\,414}{3\,432};\ \frac{12\,414}{3\,732};\ \frac{12\,714}{3\,132};\ \frac{12\,714}{3\,432};\ \frac{12714}{3732}.$$

V.32°. Aflaţi toate fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{2\,970}{7\,920}$ în aşa fel încît suma dintre numărătorul şi numitorul fracţiei respective să fie cuprins între 50 şi 100.

(C. Ionescu — Ţiu, G.M., 6/1971)

R. După simplificare cu $3^2 \cdot 11 \cdot 10$ fracţia dată este echivalentă cu fracţia $\frac{3}{8}$.

Fracţiile căutate vor fi de forma $\frac{3x}{8x}$, unde x este un număr natural pe care trebuie să-l determinăm în condiţia dată de problemă şi tradusă astfel:

$$50 < 3x + 8x < 100,$$

adică $50 < 11x < 100$. Această dublă inecuaţie ne permite să găsim că $x \in \{6 ; 7 ; 8 ; 9\}$. Aşadar, fracţiile cerute sînt :

$$\frac{18}{48};\ \frac{21}{56};\ \frac{24}{64};\ \frac{27}{72}.$$

V.33. Scrieţi 4 fracţii, reprezentanţi ai numărului raţional $\frac{2}{5}$.

R. Putem considera fracțiile $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{20}{50}$; $\frac{200}{500}$.

V.34. Scrieți reprezentanții numărului rațional $\frac{4}{3}$ care au numitorii multiplii de 10 mai mici ca 150.

R. Avem fracțiile $\frac{40}{30}$; $\frac{80}{60}$; $\frac{120}{90}$; $\frac{160}{120}$.

V.35. Se dau mulțimile:

$$A=\left\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{4}{8};\ \frac{10}{20}\right\};\quad B=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{20}{30};\ \frac{4}{12};\ \frac{200}{300};\ \frac{6}{12}\right\};$$

$$C=\left\{\frac{0}{2};\ \frac{0}{4};\ \frac{0}{5};\ \frac{0}{7};\ \frac{0}{9}\right\};\quad D=\left\{\frac{30}{6};\ \frac{25}{5};\ \frac{100}{20};\ \frac{200}{50};\ \frac{5}{1}\right\}.$$

Care din aceste mulțimi poate fi submulțime a unui număr rațional?

R. Poate fi A, pentru că toate fracțiile ce aparțin ei sînt echivalente cu fracția $\frac{1}{2}$. B nu este, căci $\frac{6}{12}^{(6} = \frac{1}{2}$ și nu este echivalentă cu $\frac{2}{3}$. C este submulțime a numărului rațional 0. D nu este, pentru că $\frac{200}{50}^{(50} = \frac{4}{1}$ care nu este echivalentă cu $\frac{5}{1}$.

V.36. a) Numărul rațional x este reprezentat prin fracția $\frac{201}{402}$, iar numărul rațional y prin fracția $\frac{4}{8}$. Ce relație este între x și y?

b) Numărul rațional x este reprezentat de fracția $\frac{14}{36}$, iar numărul rațional y este reprezentat de $\frac{7}{18}$. Ce relație există între x și y?

R. a) Deoarece $\frac{201}{402}^{(201} = \frac{1}{2}$ și $\frac{4}{8}^{(4} = \frac{1}{2}$, rezultă ca fracțiile $\frac{201}{402}$ și $\frac{4}{8}$ sînt echivalente deci $x = y$.

b) Avem $x = y$, căci $\frac{14}{36}$ și $\frac{7}{18}$ sînt echivalente.

V.37. Se dau numerele raționale:

$$x=\frac{4}{6},\ y=\frac{3}{12};\ z=\frac{10}{15};\ t=\frac{14}{21};\ u=\frac{10}{40}.$$

Care din ele sînt egale?

R. Avem $x = z = t$ și $y = u$.

V.38. Un elev a avut de scris o mulţime ale cărei elemente sînt numere raţionale. A dat următorul răspuns: $\left\{\frac{5}{10};\ \frac{3}{7};\ \frac{9}{5};\ \frac{4}{8};\ \frac{0}{7}\right\}$. Ce a greşit el?

R. De regulă, în scrierea elementelor unei mulţimi nu se admite repetarea aceluiaşi element. Fiecare element se scrie o singură dată. El nu a ţinut seama că numărul raţional $\frac{5}{10}$ este egal cu numărul raţional $\frac{4}{8}$. Deci a scris acelaşi număr raţional de două ori, folosind ca reprezentanţi fracţiile echivalente $\frac{5}{10}$ şi $\frac{4}{8}$ care, ca fracţii, sînt diferite.

V.39. Se dă următoarea mulţime de numere raţionale:

$$A = \left\{\frac{14}{3};\ \frac{18}{2};\ \frac{18}{4};\ \frac{36}{18};\ \frac{25}{50};\ \frac{210}{70};\ \frac{70}{210};\ \frac{0}{70}\right\}.$$

Enumeraţi elementele mulţimii $B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in \mathbb{N}\}$.

R. Deoarece $\frac{18^{(2}}{2} = \frac{9}{1} = 9$; $\frac{36^{(18}}{18} = \frac{2}{1} = 2$; $\frac{210^{(70}}{70} = \frac{3}{1} = 3$ şi $\frac{0}{70} = 0$, mulţimea cerută este $B = \left\{\frac{18}{2};\ \frac{36}{18};\ \frac{210}{70};\ \frac{0}{70}\right\}$, care se mai scrie $B = \{9;2;3;0\}$.

V.40. Enumeraţi elementele mulţimii $A = \{x \mid x \in B \text{ şi } x \notin \mathbb{N}\}$ unde:

$$B = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{4}{2};\ 7;\ \frac{30}{10};\ \frac{4}{7};\ \frac{9}{17};\ \frac{0}{30};\ \frac{300}{200};\ \frac{300}{6}\right\}.$$

R. Mulţimea cerută este $A = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{4}{7};\ \frac{9}{17};\ \frac{300}{200}\right\}$.

V.41. Se dau mulţimile: $A = \{0;2;4;6\}$ şi $B = \{0;4;5;6\}$. Enumeraţi elementele mulţimii:

$$C = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{a}{b},\ a \in A,\ b \in B\right\}.$$

R. Mulţimea cerută este:

$$C = \left\{\frac{0}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{6};\ \frac{4}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{4}{6};\ \frac{6}{4};\ \frac{6}{5}\right\}.$$

V.42. Găsiţi numărul natural x astfel încît, numărul raţional $\frac{6}{x}$ să fie număr natural.

R. Pentru ca numărul $\frac{6}{x}$ să fie natural trebuie ca x să fie divizor natural al lui 6. Avem $x \in \{1; 2; 3; 6\}$. Pentru fiecare avem numerele naturale următoare:

$$\frac{6}{1} = 6; \frac{6}{2} = 3; \frac{6}{3} = 2; \frac{6}{6} = 1.$$

V.43. Se dau următoarele numere raţionale:

$$\frac{2}{5}; -3; -\frac{2}{5}; 6; \frac{4}{3}; -2; -\frac{1}{5}; -35; \frac{29}{7}; 2; 1; 0; -10; \frac{1}{2}; \frac{16}{4}.$$

Din acestea alegeţi pe cele care sînt:

a) numerele naturale;
b) numerele întregi;
c) numerele întregi pozitive;
d) numerele întregi negative;
e) numerele raţionale pozitive;
f) numerele raţionale negative.

R. Avem rezultatele a) $6; 2; 1; 0; 4$; b) $-3; 6; -2; -35; 2; 1; 0; -10; 4$; c) $6; 2; 1; 4$; d) $-3; -2; -35; -10$; e) $\frac{2}{5}; 6; \frac{4}{3}; \frac{29}{7}; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{16}{4}$; f) $-3; -\frac{2}{5}; -2; -\frac{1}{5}; -35; -10$.

V.44. Se dă mulţimea:

$$A = \left\{-5; \frac{1}{2}; 2; -10; \frac{4}{3}; \frac{17}{5}; -\frac{1}{2}; 10; 0; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}; -\frac{2}{9}; \frac{2}{9}; 1; \frac{6}{2}; -\frac{6}{2}\right\}.$$

Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

$B = \{x \mid x \in A, x \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \mid x \in A, x \text{ întreg}\}$;
$D = \{x \mid x \in A, x \text{ întreg pozitiv}\}$; $E = \{x \mid x \in A, x \text{ întreg negativ}\}$;
$F = \{x \mid x \in A, x \in \mathbb{Q}\}$, $G = \{x \mid x \in A, x \in \mathbb{Q}_-\}$;
$H = \{x \mid x \in A, x \in \mathbb{Q}_+\}$; $L = \{x \mid x \in A; x \in \mathbb{Q}^*\}$.

R. Rezultatele sînt:
$B = \{2; 10; 0; 1; 3\}$; $C = \{-5; 2; -10; 0; 1; 3; -3; 10\}$;
$D = \{2; 10; 1; 3\}$; $E = \{-5; -10; -3\}$; $F = A$;
$G = \left\{-5; -10; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{9}; -\frac{6}{2}\right\}$; $H = \left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{4}{3}; \frac{17}{5}; 10; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}; \frac{2}{9}; 1; \frac{6}{2}\right\}$; $L = A - \{0\}$.

V.45. Calculați:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{71}+\frac{2}{71}$; c) $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}$; d) $\frac{1}{24}+\frac{3}{24}$; e) $\frac{1}{33}+\frac{31}{33}$; f) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; h) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$; i) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; k) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$; l) $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$; m) $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$; n) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$; o) $\frac{1}{2}+\frac{7}{12}$; p) $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$; r) $\frac{1}{12}+\frac{5}{6}$; s) $\frac{1}{12}+\frac{7}{3}$; t) $\frac{7}{15}+\frac{1}{3}$; u) $\frac{8}{15}+\frac{3}{5}$; v) $\frac{15}{13}+\frac{2}{26}$; w) $\frac{1}{120}+\frac{5}{12}$.

R. Avem rezultatele:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{71}+\frac{2}{71}=\frac{3+2}{71}=\frac{5}{71}$; c) $\frac{9}{5}$; d) $\frac{1}{24}+\frac{3}{24}=\frac{1+3}{24}=\frac{4^{(4}}{24}=\frac{1}{6}$; e) $\frac{32}{33}$; f) 1; g) ${}^{2)}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$; h) $\frac{3}{4}$; i) $\frac{1}{6}+{}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1+3}{6}=\frac{4^{(2}}{6}=\frac{2}{3}$; j) ${}^{2)}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3^{(3}}{6}=\frac{1}{2}$; k) $\frac{3}{8}$; l) $\frac{5}{8}$; m) $\frac{1}{2}$; n) ${}^{3)}\frac{3}{4}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9+5}{12}=\frac{14^{(2}}{12}=\frac{7}{6}$; o) $\frac{13}{12}$; p) $\frac{1}{3}$; r) $\frac{11}{12}$; s) $\frac{29}{13}$; t) $\frac{4}{5}$; u) $\frac{17}{15}$; v) $\frac{16}{13}$; w) $\frac{17}{40}$.

V.46. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{17}+\frac{3}{17}\right)+\frac{4}{17}$; b) $\frac{2}{17}+\left(\frac{3}{17}+\frac{4}{17}\right)$; c) $\left(\frac{4}{123}+\frac{17}{123}\right)+\frac{23}{123}$; d) $\frac{4}{123}+\left(\frac{17}{123}+\frac{23}{123}\right)$; e) $\left(\frac{3}{19}+\frac{4}{19}\right)+\frac{5}{19}$; f) $\frac{3}{19}+\left(\frac{4}{19}+\frac{5}{19}\right)$; g) $\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}+\frac{7}{15}\right)$; h) $\frac{1}{15}+\left(\frac{2}{15}+\frac{4}{15}\right)+\frac{7}{15}$; i) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}$; j) $\frac{2}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)$.

R. Avem rezultatele:

a) $\left(\frac{2}{17}+\frac{3}{17}\right)+\frac{4}{17}=\frac{2+3}{17}+\frac{4}{17}=\frac{5}{17}+\frac{4}{17}=\frac{5+4}{17}=\frac{9}{17}$; b) $\frac{2}{17}+$ $+\left(\frac{3}{17}+\frac{4}{17}\right)=\frac{2}{17}+\frac{3+4}{17}=\frac{2}{17}+\frac{7}{17}=\frac{2+7}{17}=\frac{9}{17}$.

Observație. Constatăm că:

$$\left(\frac{2}{17}+\frac{3}{17}\right)+\frac{4}{17}=\frac{2}{17}+\left(\frac{3}{17}+\frac{4}{17}\right),$$

ceea ce probează faptul că adunarea numerelor raționale este asociativă.
În continuare avem rezultatele:

c) $\frac{44}{123}$; d) $\frac{44}{123}$; e) $\frac{12}{19}$; f) $\frac{12}{19}$; g) $\frac{3}{15}+\frac{11}{15}=\frac{14}{15}$; h) $\frac{14}{15}$;

i) $\left(\frac{^{2)}2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$;

j) $\frac{2}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{^{3)}1}{2}\right)=\frac{2}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=\frac{6}{6}=1$.

V.47. Calculați, folosind faptul că adunarea numerelor raționale este comutativă și asociativă:

a) $\frac{2}{17}+\frac{29}{17}+\frac{8}{17}$; b) $\frac{19}{23}+\frac{42}{23}+\frac{81}{23}+\frac{58}{23}$; c) $\frac{1}{101}+\frac{2}{101}+\frac{3}{101}+$ $+\frac{4}{101}+\frac{5}{101}+\frac{6}{101}+\frac{7}{101}+\frac{8}{101}+\frac{9}{101}$; d) $\frac{91}{271}+\frac{92}{271}+\frac{9}{271}+\frac{8}{271}$;
e) $\frac{1}{14}+\frac{5}{14}+\frac{9}{14}+\frac{5}{14}$; f) $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}$; g) $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}+\frac{2}{7}$; h) $\frac{3}{13}+$ $+\frac{1}{26}+\frac{3}{13}+\frac{7}{26}$; i) $\frac{7}{11}+\frac{3}{22}+\frac{2}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{11}$; j) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+$ $+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$; k) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{8}$.

R. Avem rezultatele:

a) $\frac{2}{17}+\frac{29}{17}+\frac{8}{17}=\left(\frac{2}{17}+\frac{8}{17}\right)+\frac{29}{17}=\frac{10+29}{17}=\frac{39}{17}$; b) $\frac{19}{23}+$ $+\frac{42}{23}+\frac{81}{23}+\frac{58}{23}=\left(\frac{19}{23}+\frac{81}{23}\right)+\left(\frac{42}{23}+\frac{58}{23}\right)=\frac{100}{23}+\frac{100}{23}=\frac{200}{23}$;

c) $\left(\frac{1}{101}+\frac{9}{101}\right)+\left(\frac{2}{101}+\frac{8}{101}\right)+\left(\frac{3}{101}+\frac{7}{101}\right)+\left(\frac{4}{101}+\frac{6}{101}\right)+\frac{5}{101}=$ $=\frac{10}{101}+\frac{10}{101}+\frac{10}{101}+\frac{10}{101}+\frac{5}{101}=\frac{45}{101}$; d) $\frac{200}{271}$; e) $\frac{20^{(2}}{14}=\frac{10}{7}$; f) $\frac{1}{5}+$ $+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{10}=\frac{{}^{2)}2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$; g) $\frac{11}{14}$;

h) $\left(\frac{3}{13}+\frac{3}{13}\right)+\left(\frac{1}{26}+\frac{7}{26}\right)=\frac{6}{13}+\frac{8^{(2}}{26}=\frac{6}{13}+\frac{4}{13}=\frac{10}{13}$; i) $\frac{12}{11}$;

j) $\frac{11}{4}$; k) $\frac{29}{8}$.

V.48. a) Se ştie că $a+b=\frac{2}{5}$ şi $c=\frac{9}{7}$. Calculaţi $a+(b+c)$;

b) Se ştie că $x=\frac{3}{7}$ şi $y+z=\frac{3}{14}$. Calculaţi $(x+y)+z$;

c) Calculaţi $x+(y+z)+t$, ştiind că $x+y=\frac{2}{3}$ şi $z+t=\frac{4}{9}$;

d) Calculaţi $x+(y+z)+t$ ştiind că $x+y=\frac{7}{3}$ şi $z+t=\frac{5}{6}$.

R. a) Folosim faptul că adunarea de numere raţionale este o operaţie asociativă şi avem :

a) $a+(b+c)=(a+b)+c=\frac{{}^{7)}2}{5}+\frac{{}^{5)}9}{7}=\frac{14}{35}+\frac{45}{35}=\frac{14+45}{35}=$ $=\frac{59}{35}$;

Avem, în continuare, rezultatele :

b) $\frac{9}{14}$; c) $x+(y+z)+t=(x+y)+(z+t)=\frac{{}^{3)}2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}+$ $+\frac{4}{9}=\frac{10}{9}$; d) $\frac{19}{6}$.

V.49. Calculaţi :

a) $2+\frac{1}{3}$; b) $3+\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}+5$; d) $5+\frac{2}{7}$; e) $16+\frac{2}{5}$;

f) $2+\frac{1}{3}+5+\frac{1}{3}$; g) $31+\frac{1}{7}$; h) $7+\frac{3}{7}+2+\frac{1}{2}+5+\frac{3}{14}$;

i) $8+\frac{2}{9}+3+12+\frac{13}{18}$.

R. Avem :

a) $^{3)}2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$; b) $^{2)}3 + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$; c) $\frac{1}{4} + {}^{4)}5 = \frac{1}{4} + \frac{5 \cdot 4}{4} = \frac{1 + 5 \cdot 4}{4} = \frac{21}{4}$;

d) $\frac{5 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{37}{7}$; e) $\frac{82}{5}$; f) Adunarea în $\mathbb{Q}$ este asociativă, deci $(2 + 5) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 7 + \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}$; g) $\frac{218}{7}$; h) $(7+2+5) + \left(\frac{^{2)}3}{7} + \frac{^{7)}1}{2} + \frac{3}{14}\right) = 14 + \frac{6 + 7 + 3}{14} = 14 + \frac{16^{(2}}{14} = 14 + \frac{8}{7} = \frac{14 \cdot 7 + 8}{7} = \frac{106}{7}$; i) $\frac{431}{18}$.

V.50. a) Se dau sumele :

$$2 + \frac{1}{3};\ 3 + \frac{2}{5};\ 4 + \frac{7}{9};\ \ 12 + \frac{1}{7};\ \ 23 + \frac{1}{9};\ 271 + \frac{9}{17};\ 246 + \frac{19}{23}.$$

Scrieţi aceste sume sub forma de „număr mixt”.
b) Se dau „numerele mixte” următoare :

$$14\frac{3}{5};\ \ 3\frac{1}{2};\ \ 4\frac{1}{6};\ \ 5\frac{1}{7};\ \ 9\frac{3}{7};\ \ 12\frac{4}{13};\ \ 12\frac{139}{141}.$$

Scrieţi-le ca adunări.
R. Avem :

a) $2\frac{1}{3}$; $3\frac{2}{5}$; $4\frac{7}{9}$; $12\frac{1}{7}$; $23\frac{1}{9}$; $271\frac{9}{17}$; $246\frac{19}{23}$;

b) $14 + \frac{3}{5}$; $3 + \frac{1}{2}$; $4 + \frac{1}{6}$; $5 + \frac{1}{7}$; $9 + \frac{3}{7}$; $12 + \frac{4}{13}$; $12 + \frac{139}{141}$.

Se observă că scrierea nu este unică. De exemplu, $14\frac{3}{5}$ se mai poate scrie : $4 + 10 + \frac{3}{5}$ sau $4 + 10 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$.

V.51. Efectuaţi adunările („introduceţi întregii în fracţie”) :

a) $12\frac{1}{2}$; b) $3\frac{2}{5}$. c) $7\frac{3}{4}$; d) $4\frac{2}{5}$; e) $2\frac{1}{3}$; f) $3\frac{1}{4}$; g) $5\frac{2}{9}$; h) $11\frac{21}{5}$; i) $22\frac{5}{2}$; j) $104\frac{2}{7}$; k) $5\frac{2}{2}$.

R. Avem :

a) $12\frac{1}{2} = 12 + \frac{1}{2} = \frac{12 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{25}{2}$; b) $3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$; c) $7\frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{31}{4}$; d) $4\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}$; e) $\frac{7}{3}$; f) $\frac{13}{4}$; g) $\frac{47}{9}$: h) $\frac{76}{5}$; i) $\frac{49}{2}$; j) $\frac{730}{7}$; k) 6.

V.52. În scrierea $2\frac{3}{4}$, 2 și $\frac{3}{4}$ au semnificațiile : 2 este *partea întreagă* a numărului rațional $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, iar $\frac{3}{4}$, *partea fracționară* a lui.

În scrierea $3\frac{8}{5}$, 3 și $\frac{8}{5}$ nu au aceeași semnificație. În general, dacă $a\frac{b}{c}$ este un număr rațional pozitiv, unde $a \in \mathbb{N}$, iar b și c sînt numere naturale cu condiția $b < c$ (adică dacă fracția $\frac{b}{c}$ este subunitară) spunem că a este partea întreagă, iar $\frac{b}{c}$ partea fracționară, a numărului respectiv $(c \neq 0)$.

a) Se dau următoarele scrieri :

$3\frac{2}{5}$; $8\frac{1}{5}$; $2\frac{4}{3}$; $5\frac{13}{9}$; $8\frac{12}{12}$; $9\frac{3}{171}$; $3 + \frac{2}{7}$; $18\frac{9}{61}$; $13 + \frac{9}{5}$; $12 + \frac{1}{9}$; $108\frac{0}{5}$; $\frac{2}{9}$.

La care din aceste scrieri nu este pusă în evidență partea întreagă?

b) Scrieți partea întreagă corespunzătoare următoarelor numere raționale :

$2\frac{1}{3}$; $7\frac{1}{5}$; $9\frac{2}{7}$; $\frac{1}{3}$; $3 + \frac{1}{8}$; $\frac{2}{5} + 7$; $90\frac{531}{408}$; $2\frac{0}{8}$.

R. a) Nu este pusă în evidență partea întreagă în următoarele cazuri : $2\frac{4}{3}$; $5\frac{13}{9}$; $8\frac{12}{12}$; $13 + \frac{9}{5}$; b) Partea întreagă a numerelor date este, pentru fiecare număr : 2 ; 7 ; 9 ; 0 ; 3 ; 7 ; 90 ; 2.

V.53. Puneți în evidență partea întreagă a următoarelor numere raționale („scoateți întregii din fracție") :

a) $\frac{15}{2}$; b) $\frac{7}{3}$; c) $\frac{29}{3}$; d) $\frac{423}{13}$; e) $9\frac{8}{3}$; f) $\frac{9}{4}$; g) $\frac{12}{5}$; h) $\frac{17}{8}$; i) $\frac{28}{5}$;

j) $\frac{45}{7}$; k) $2\frac{3}{5}$; l) $28\frac{28}{7}$; m) $17+\frac{3}{7}$; n) $18+\frac{3}{2}$; o) $15+\frac{8}{9}$;

p) $17+\frac{9}{5}$; r) $\frac{256}{17}$; s) $\frac{1234}{481}$; t) $\frac{64}{8}$; u) $\frac{32}{8}$.

R. a) Împărțim numărătorul la numitor și avem $15 = 7 \cdot 2 + 1$. Scriem :

$$\frac{15}{2} = \frac{7 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7 \cdot 2^{(2}}{2} + \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Deci partea întreagă este 7.

b) Avem $7 = 2 \cdot 3 + 1$, deci $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; c) Avem $29 = 9 \cdot 3 + 2$, deci $\frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$; d) Avem $423 = 32 \cdot 13 + 7$ deci $\frac{423}{13} = 32\frac{7}{13}$.

Avem, în continuare, rezultatele :

e) $9\frac{8}{3} = 9 + \frac{8}{3} = 9 + 2\frac{2}{3} = 11\frac{2}{3}$; f) $2\frac{1}{4}$; g) $2\frac{2}{5}$; h) $2\frac{1}{8}$;

i) $5\frac{3}{5}$; j) $6\frac{3}{7}$; k) $2\frac{3}{5}$; l) $28\frac{28}{7} = 28 + \frac{28}{7} = 28+4=32$; m) $17\frac{3}{7}$;

n) $18 + 1 + \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$; o) $15\frac{8}{9}$; p) $18\frac{4}{5}$; r) $15\frac{1}{17}$; s) $2\frac{272}{481}$;

t) 8; u) 4.

V.54. Calculați :

a) $2\frac{1}{13} + 3\frac{7}{13}$; b) $3\frac{2}{5} + 5\frac{1}{5}$; c) $12\frac{1}{7} + 2\frac{3}{7}$; d) $3\frac{4}{9} + 5\frac{1}{9}$; e) $3\frac{2}{11} + 5\frac{3}{11}$; f) $11\frac{1}{6} + 2\frac{5}{6}$; g) $5\frac{1}{8} + 2\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$;

h) $3\frac{1}{2} + 25\frac{1}{4}$; i) $5\frac{2}{5} + 3\frac{1}{10} + \frac{1}{2}$; j) $\frac{2}{5} + 7\frac{13}{15} + 8\frac{1}{30}$; k) $\frac{2}{7} + 3\frac{1}{21} + 5\frac{1}{14} + 15\frac{2}{21}$.

R. Avem :

a) $2\frac{1}{13} + 3\frac{7}{13} = 2 + \frac{1}{13} + 3 + \frac{7}{13} = (2+3) + \left(\frac{1}{13} + \frac{7}{13}\right) = 5 + \frac{8}{13} = 5\frac{8}{13}$; b) $3\frac{2}{5} + 5\frac{1}{5} = 3 + \frac{2}{5} + 5 + \frac{1}{5} = (3+5) + \left(\frac{2}{5} +\right.$

$+\frac{1}{5}\Big) = 8 + \frac{3}{5} = 8\frac{3}{5}$. c) $14\frac{4}{7}$; d) $8\frac{5}{9}$; e) $8\frac{5}{11}$; f) $11\frac{1}{6} + 2\frac{5}{6} =$

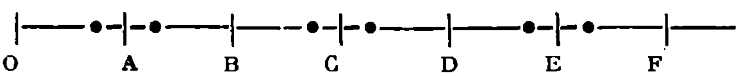
$= 13\,\frac{1+5}{6} = 13\,\frac{6}{6} = 13+1 = 14$; g) $7\,\frac{1+3+5}{8} = 7\frac{8}{8} = 7+1 = 8$;

h) $3\,\frac{^{2)}1}{2} + 25\frac{1}{4} = 3\frac{2}{4} + 25\frac{1}{4} = 28\frac{3}{4}$; i) $5\,\frac{^{2)}2}{5} + 3\frac{1}{10} + \frac{^{5)}1}{2} =$

$= 5\frac{4}{10} + 3\frac{1}{10} + \frac{5}{10} = 8\,\frac{4+1+5}{10} = 8\frac{10}{10} = 9$; j) $15\,\frac{39^{(3}}{30} = 15\,\frac{13}{10} =$

$= 15 + \frac{13}{10} = 15 + 1\frac{3}{10} = 16\frac{3}{10}$; k) $23\frac{1}{2}$.

V.55. Pe dreapta din figură punctul O este originea coordonatelor. Unitatea de măsură este de $1\frac{1}{2}$ cm. Enumerați punctele ce au coordonata număr natural; scrieți și coordonatele respective.



R. Punctele sînt O, B, D, F, iar coordonatele respective sînt **0, 3, 6, 9.**

V.56. Calculați :

a) $\frac{12}{13} - \frac{3}{13}$; b) $\frac{25}{7} - \frac{15}{7}$; c) $\frac{27}{119} - \frac{25}{119}$ d) $\frac{25}{114} - \frac{15}{114}$; e) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$; f) $\frac{17}{43} - \frac{10}{43}$; g) $\frac{17}{20} - \frac{3}{20}$; h) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; i) $\frac{1}{20} - \frac{1}{40}$; j) $\frac{3}{14} - \frac{1}{28}$; k) $\frac{1}{6} - \frac{1}{8}$; l) $\frac{12}{17} - \frac{3}{34}$. m) $\frac{5}{28} - \frac{1}{64}$; n) $\frac{3}{100} - \frac{7}{1\,000}$; o) $\frac{1}{128} - \frac{1}{132}$; p) $\frac{17}{48} - \frac{5}{64}$.

R. Avem :

$$\text{a) } \frac{12}{13} - \frac{3}{13} = \frac{12-3}{13} = \frac{9}{13}; \quad \text{b) } \frac{25}{7} - \frac{15}{7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}; \quad \text{c) } \frac{2}{119};$$

$$\text{d) } \frac{25}{114} - \frac{15}{114} = \frac{25-15}{114} = \frac{10^{(2}}{114} = \frac{5}{57}; \quad \text{e) } \frac{5}{9}; \quad \text{f) } \frac{7}{43}; \quad \text{g) } \frac{14^{(2}}{20} = \frac{7}{10};$$

$$\text{h) } \frac{{}^{2)}1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \quad \text{i) } \frac{{}^{2)}1}{20} - \frac{1}{40} = \frac{2}{40} - \frac{1}{40} = \frac{1}{40}; \quad \text{j) } \frac{5}{28};$$

$$\text{k) } \frac{{}^{4)}1}{6} - \frac{{}^{3)}1}{8} = \frac{4}{24} - \frac{3}{24} = \frac{1}{24}; \quad \text{l) } \frac{21}{34};$$

m) Calculăm c.m.m.m.c. al numerelor 28 şi 24 potrivit schemei :

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 = 2^2 \cdot 7 \\ 64 = 2^6 \\ \hline \text{c.m.m.m.c.} = 2^6 \cdot 7 = 64 \cdot 7 = 448 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 448 : 28 = 16 \\ 448 : 64 = 7 \end{array}$$

Avem :

$$\frac{{}^{16)}5}{28} - \frac{{}^{7)}1}{64} = \frac{80}{448} - \frac{7}{448} = \frac{73}{448}$$

În continuare, avem rezultatele :

$$\text{n) } \frac{23}{1\,000}; \quad \text{o) } \frac{1}{2^7 \cdot 33}; \quad \text{p) } \frac{53}{2^6 \cdot 3}.$$

V.57. Calculaţi :

$$\text{a) } \left(\frac{7}{15} - \frac{4}{15}\right) - \frac{2}{15}; \quad \text{b) } \frac{7}{15} - \left(\frac{4}{15} - \frac{2}{15}\right); \quad \text{c) } \left(\frac{12}{17} - \frac{7}{17}\right) - \frac{5}{17};$$

$$\text{d) } \frac{12}{17} - \left(\frac{7}{17} - \frac{5}{17}\right); \quad \text{e) } \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}; \quad \text{f) } \frac{4}{5} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right).$$

Ce observaţi ?

R. Avem :

$$\text{a) } \left(\frac{7}{15} - \frac{4}{15}\right) - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15};$$

$$\text{b) } \frac{7}{15} - \left(\frac{4}{15} - \frac{2}{15}\right) = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} = \frac{5^{(5}}{15} = \frac{1}{3};$$

Se observă că:

$$\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}\right)-\frac{2}{15}\neq\frac{7}{15}-\left(\frac{4}{15}-\frac{2}{15}\right),$$

adică scăderea numerelor raționale pozitive nu este asociativă.

În continuare, avem rezultatele:

c) $\frac{5}{17}-\frac{5}{17}=\frac{0}{17}=0$; d) $\frac{12}{17}-\frac{2}{17}=\frac{10}{17}$; e) $\left(\frac{^{3)}4}{5}-\frac{^{5)}1}{3}\right)-\frac{1}{6}=$ $=\frac{12-5}{15}-\frac{1}{6}=\frac{^{3)}9}{15}-\frac{1}{6}=\frac{^{6)}3}{5}-\frac{^{5)}1}{6}=\frac{13}{30}$; f) $\frac{3}{10}$.

Se observă, deci, că scăderea nu este o operație asociativă, adică rezultatul este diferit dacă parantezele se așează la întîmplare. Se face totuși convenția ca, în cazul cînd a, b, c sînt numere raționale pozitive și avem scrierea $(a-b)-c$, să eliminăm parantezele și să scriem $a-b-c$, înțelegînd $(a-b)-c$ și nu $a-(b-c)$.

V.58. Calculați:

a) $\frac{15}{17}-\frac{4}{17}+\frac{3}{17}$; b) $\frac{25}{19}+\frac{7}{19}-\frac{4}{19}-\frac{3}{19}+\frac{1}{19}$; c) $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}+$ $+\frac{1}{10}$; d) $\frac{20}{13}-\frac{17}{13}+\frac{5}{13}-\frac{2}{13}-\frac{1}{13}-\frac{2}{13}$; e) $\frac{4}{5}-\frac{1}{10}+\frac{7}{20}$; f) $\frac{3}{4}-$ $-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$; g) $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}$; h) $21\frac{2}{3}+2\frac{1}{6}-4\frac{1}{12}$; i) $14\frac{3}{4}-$ $-2\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}$; j) $7\frac{5}{6}-3\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$; k) $12\frac{5}{8}-2\frac{3}{16}+1\frac{5}{6}-3\frac{7}{12}$.

R. Dacă într-un exercițiu sînt adunări și scăderi de numere raționale pozitive, le efectuăm în ordinea în care sînt scrise. Obținem rezultatele:

a) $\frac{15}{17}-\frac{4}{17}+\frac{3}{17}=\frac{11}{17}+\frac{3}{17}=\frac{14}{17}$; b) $\frac{32}{19}-\frac{4}{19}-\frac{3}{19}+\frac{1}{19}=$ $=\frac{28}{19}-\frac{3}{19}+\frac{1}{19}=\frac{25}{19}+\frac{1}{19}=\frac{26}{19}$; c) $\frac{4}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5^{(5}}{10}=\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{13}$; e) $\frac{^{4)}4}{5}-\frac{^{2)}1}{10}+\frac{7}{20}=\frac{16}{20}-\frac{2}{20}+\frac{7}{20}=\frac{14}{20}+\frac{7}{20}=\frac{21}{20}$; f) $\frac{^{6)}3}{4}-\frac{^{3)}1}{8}+$ $\frac{^{2)}1}{12}=\frac{18}{24}-\frac{3}{24}+\frac{2}{24}=\frac{15}{24}+\frac{2}{24}=\frac{17}{24}$; g) $\frac{13}{18}$; h) $21\frac{^{4)}2}{3}+2\frac{^{2)}1}{6}-4\frac{1}{12}=$ $=21\frac{8}{12}+2\frac{2}{12}-4\frac{1}{12}=23\frac{10}{12}-4\frac{1}{12}=19\frac{9^{(3}}{12}=19\frac{3}{4}$; i) $9\frac{9}{16}$; j) $3\frac{23}{24}$; k) $8\frac{11}{16}$.

V.59. Scrieți ca o adunare de două numere raționale următoarele numere raționale:

a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{2}{4}$; c) $\frac{4}{7}$; d) $\frac{8}{3}$; e) $\frac{29}{6}$; f) $2\frac{1}{5}$; g) $4\frac{4}{13}$.

R. Avem:

a) $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; c) $\frac{4}{7}+0$; d) $\frac{5}{3}+1$ sau $2+\frac{2}{3}$; e) $\frac{9}{2}+\frac{1}{3}$ sau $\frac{10}{3}+\frac{3}{2}$; f) $2+\frac{1}{5}$; g) $2+2\frac{4}{13}$.

Observație. Scrierea nu este unică.

V.60. Calculați:

a) $2\cdot\frac{3}{5}$; b) $4\cdot\frac{7}{8}$; c) $\frac{2}{3}\cdot 12$; d) $\frac{4}{31}\cdot 62$; e) $\frac{2}{9}\cdot 1$; f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}$; g) $\frac{2}{9}\quad\frac{5}{3}$; h) $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}$; i) $\frac{3}{10}\cdot\frac{20}{9}$; j) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$; k) $2\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}$; l) $\frac{9}{7}\cdot 1\frac{3}{5}$; m) $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}$; n) $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{7}$; o) $\frac{12}{13}\cdot\frac{26}{24}$; p) $\frac{7}{25}\cdot\frac{50}{42}$; r) $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$; s) $3\frac{2}{5}\cdot 4\frac{1}{3}$; t) $12\frac{3}{5}\cdot 0$; u) $\frac{4}{7}\cdot 1$; v) $\frac{6}{17}\cdot\frac{170}{42}$; w) $\frac{25}{17}\cdot\frac{17}{25}$.

R. Avem:

a) $2\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}$; b) $4\cdot\frac{7}{8}=\frac{4\cdot 7^{(4}}{8}=\frac{1\cdot 7}{2}=\frac{7}{2}$; c) $\frac{2}{3}\cdot 12=\frac{2\cdot 12^{(3}}{3}=\frac{2\cdot 4}{1}=8$; d) 8; e) $\frac{2}{9}$; f) $\frac{6}{35}$; g) $\frac{10}{27}$; h) $\frac{3}{14}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7\cdot 3^{(3}}{3\cdot 4}=\frac{7\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{7}{4}$; k) $\frac{12}{7}$; l) $\frac{72}{35}$; m) $\frac{8}{5}$; n) $\frac{3}{28}$; o) $\frac{12\cdot 26}{13\cdot 24}^{(12\cdot 13}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}=1$; p) $\frac{1}{3}$; r) $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}=\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{6}=8\frac{1}{6}$; s) $14\frac{11}{15}$; t) 0; u) $\frac{4}{7}$; v) $\frac{10}{7}$; w) 1.

V.61. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{5}{8}$; b) $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}\right)$; c) $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{9}$; d) $\frac{3}{7}\cdot$

$\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}\right)$; e) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right)$; f) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{5}$; g) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{4}{9}$; h) $\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot 1\cdot 3$; i) $2\cdot\frac{3}{5}\cdot 4\cdot\frac{5}{2}$; j) $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{19}{25}\cdot\frac{25}{19}$; k) $\frac{27}{13}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{13}{27}$; l) $\frac{251}{423}\cdot\frac{13}{71}\cdot\frac{423}{251}\cdot\frac{71}{13}\cdot 2$.

R. Avem:

a) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{5}{8}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{2\cdot 3\cdot 5^{(2\cdot 5}}{5\cdot 7\cdot 8}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{1\cdot 7\cdot 4}=\frac{3}{28}$;

b) $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3\cdot 5}{7\cdot 8}=\frac{2\cdot 3\cdot 5^{(2\cdot 5}}{5\cdot 7\cdot 8}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{1\cdot 7\cdot 4}=\frac{3}{28}$.

Se observă că rezultatul este acelaşi:

$$\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{5}{8}=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}\right)$$

ceea ce probează că înmulţirea de numere raţionale este asociativă.

În continuare:

c); d) $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{9}=\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}\right)=\frac{3\cdot 4\cdot 2^{(3}}{7\cdot 5\cdot 9}=\frac{1\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=$
$=\frac{8}{105}$;

e) $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{2\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 7\cdot 2\cdot 5}^{(2\cdot 3}=\frac{4}{7\cdot 5}=\frac{4}{35}$;

f) $\frac{4}{35}$; g) $\frac{2\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 9}=\frac{40}{189}$; h) $\frac{99}{35}$; i) 12; j) 1; k) 1; l) 2.

V.62. a) Se ştie că $a\cdot b=\frac{2}{5}$ şi $c=\frac{1}{9}$. Calculaţi $a\cdot(b\cdot c)$;

b) Se ştie că $a\cdot b=\frac{9}{5}$ şi $c=\frac{2}{3}$. Calculaţi $a\cdot(b\cdot c)$;

c) Se ştie că $a\cdot b=\frac{2}{7}$ şi $c\cdot d=\frac{3}{8}$. Calculaţi $a\cdot(b\cdot c)\cdot d$;

d) Se ştie că $m\cdot n=\frac{7}{5}$ şi $p\cdot t=\frac{5}{7}$. Calculaţi $m\cdot(n\cdot p)\cdot t$;

e) Calculaţi $a\cdot(b\cdot c\cdot d)\cdot m$ ştiind că $a\cdot b\cdot c=\frac{1}{9}$ şi $d\cdot m=9$.

R. a) Deoarece înmulţirea de numere raţionale este asociativă scriem:

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{45}$

În continuare, avem:

b) $\frac{6}{5}$; c) $a \cdot (b \cdot c) \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3^{(2}}{7 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 4} =$

$= \frac{3}{28}$; d) 1; e) 1.

V.63. Calculaţi în două moduri:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right)$; b) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\right)$; c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)$;

d) $\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$; e) $2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right)$; f) $2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{15}\right)$

R. a) Avem:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2 \cdot 4^{(8}}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3}.$$

Se ştie că înmulţirea numerelor raţionale este distributivă faţă de adunarea de numere raţionale, deci:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{2^{(2}}{3 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 3^{(6}}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3 \cdot 4} +$$
$$+ \frac{^{3)}1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

În continuare:

b) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{^{2)}1}{8} + \frac{3}{16}\right) = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2 + 3}{16}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{16} = \frac{2 \cdot 5^{(2}}{7 \cdot 16} = \frac{5}{7 \cdot 8} =$

$= \frac{5}{56}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{16} = \frac{2}{7 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 16} = \frac{^{2)}1}{7 \cdot 4} + \frac{3}{7 \cdot 8} = \frac{2 + 3}{56} = \frac{5}{56}$;

c) $\frac{1}{15}$; d) $\frac{37}{180}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{2}{15}$.

V.64. a) Se ştie că $a \cdot b = \frac{2}{5}$ şi $a \cdot c = \frac{5}{2}$. Calculaţi $a \cdot (b + c)$;

b) Se ştie că $a \cdot b = \frac{13}{8}$ şi $a \cdot c = \frac{1}{13}$. Calculaţi $(b + c) \cdot a$ şi $(b - c) \cdot a$;

c) Calculaţi $a \cdot (b + c - d)$ ştiind că $a \cdot b = \frac{2}{7}$ şi $a \cdot c = \frac{13}{2}$ şi $a \cdot d = \frac{1}{2}$;

d) Calculați $m\cdot(n+t-a)$ știind că $m\cdot n=\frac{3}{5}$ și $m\cdot t=5$ și $m\cdot a=\frac{1}{4}$.

R. a) Folosind faptul că înmulțirea numerelor raționale este distributivă față de adunare și de scădere, avem:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)=\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=\frac{4+25}{10}=\frac{29}{10}.$$

Avem, în continuare, următoarele rezultate:

b) $\frac{177}{104}$; $\frac{161}{104}$; c) $a\cdot(b+c-d)=a\cdot b+a\cdot c-a\cdot d=\frac{2}{7}+\frac{13}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4+91}{14}-\frac{1}{2}=\frac{^{2)}95}{7}-\frac{^{7)}1}{2}=\frac{190-7}{14}=\frac{183}{14}$; d) $5\frac{7}{20}$.

V.65. Scrieți ca înmulțiri de două numere raționale următoarele numere raționale:

a) $\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}$; b) $\frac{2\cdot 9}{13\cdot 7}$; c) $\frac{5\cdot 3}{9\cdot 4}$; d) $\frac{8\cdot 7}{3\cdot 5}$; e) $\frac{25\cdot 3\cdot 4}{13\cdot 2\cdot 9}$; f) $\frac{11\cdot 13\cdot 2}{17\cdot 22\cdot 5}$

R. Avem: a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ sau $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}$ sau $\frac{2\cdot 3}{5}\cdot\frac{1}{7}$; b) $\frac{2}{13}\cdot\frac{9}{7}$; c) $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}$; d) $\frac{8}{5}\cdot\frac{7}{3}$ sau $\frac{2}{5}\cdot\frac{4\cdot 7}{3}$; e) $\frac{25}{13\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{9}$; f) $\frac{11\cdot 13\cdot 2}{17}\cdot\frac{1}{22\cdot 5}$.

Observație. **Scrierea nu este unică.**

A.66. În calculele ce urmează, indicați factorul comun care este pus în evidență:

a) $\frac{2}{3}\cdot 5+\frac{3}{7}\cdot 5+5\cdot\frac{1}{9}$; b) $4\cdot 5+\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{13}{2}\cdot 4$; c) $\frac{4}{9}\cdot 3+3\cdot\frac{1}{5}-3$; d) $\frac{2}{5}\cdot 7+\frac{2}{5}\cdot 3-\frac{2}{5}\cdot 9$; e) $a\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot b+\frac{2}{3}\cdot 7$; f) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{7}$; g) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{13}$; h) $2\cdot\frac{7}{11}+2\cdot\frac{4}{23}-4$; i) $\frac{2}{3}\cdot 5+\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{3}{2}\cdot 7$.

R. Avem: a) 5; b) 4; c) 3; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{2}{9}$; g) $\frac{2}{5}$; h) 2; i) nu este pus în evidență.

V.67. Calculați:

a) $2+3\cdot\frac{1}{5}$; b) $15-4\cdot\frac{1}{11}$; c) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$; d) $\frac{13}{5}-\frac{2}{5}\cdot 5$; e) $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$; f) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$; g) $\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\cdot\frac{2}{3}$; h) $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$; i) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{2}$; j) $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{4}\cdot 2$; k) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$; l) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\left(1+\frac{2}{5}\right)$; m) $2\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{5}+3\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)$; n) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot 3$; o) $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\cdot 0$; p) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot 1$; r) $\frac{8}{15}+3\cdot\left(\frac{4}{15}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$.

R. Avem: a) $2+3\cdot\frac{1}{5}=2+\left(3\cdot\frac{1}{5}\right)=2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}$;

b) $15-4\cdot\frac{1}{11}=15-\left(4\cdot\frac{1}{11}\right)=15-\frac{4}{11}=\frac{165-4}{11}=\frac{161}{11}=14\frac{7}{11}$;

c) $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{^{4)}2}{3}+\frac{^{3)}2}{4}=\frac{8+6}{12}=\frac{14^{(2}}{12}=\frac{7}{6}$; d) $\frac{13}{5}-\frac{10}{5}=\frac{3}{5}$; e) $\frac{3}{8}$;

f) $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{6}{5}+\frac{1}{3}=\frac{23}{15}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\frac{7}{10}$; i) 3; j) $\frac{35}{18}$;

k) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{^{2)}2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$; l) $\frac{43}{35}$; m) $\frac{7}{3}$; n) $\frac{8}{5}$; o) $\frac{4}{7}$;

p) 1; r) $\frac{1}{30}$.

V.68. Scrieți inversele următoarelor numere raționale:

$\frac{3}{7}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{25}{7}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{1}$; $\frac{25}{1}$; $\frac{16}{18}$; 9; 3; $\frac{1}{3}$; 27; 0; $2\frac{1}{3}$; $3\frac{2}{5}$; $\frac{215}{15}$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$; $\frac{9}{3}+\frac{4}{6}$.

R. Inversele sînt:

$\frac{7}{13}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{7}{25}$; 9; 8; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{18}{16}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{1}{27}$;

nu are invers; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{17}$; $\frac{15}{215}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{6}{22}$.

V.69. Calculaţi:

a) $\frac{251}{427} \cdot 2 \cdot \frac{427}{251}$; b) $\frac{251}{423} \cdot \frac{121}{73} \cdot \frac{423}{251} \cdot \frac{73}{121} \cdot 47$; c) $\frac{191}{37} \cdot 12 \cdot \frac{37}{191} \cdot 2$;

d) $\frac{425}{326} \cdot \frac{326}{425} \cdot \frac{13}{19} \cdot 2 \cdot \frac{19}{13}$; e) $2\frac{1}{17} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{17}{35}$.

R. a) Înmulţirea este asociativă şi comutativă:

$$\frac{251}{247} \cdot 2 \cdot \frac{427}{251} = \frac{251}{427} \cdot \frac{427}{251} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2.$$

b) Avem:

$$\left(\frac{251}{423} \cdot \frac{423}{251}\right) \cdot \left(\frac{121}{73} \cdot \frac{73}{12}\right) \cdot 47 = 1 \cdot 1 \cdot 47 = 47.$$

În continuare, avem rezultatele:

c) 24; d) 2; e) $\frac{35}{17} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

V.70. Se dau: mulţimea $A = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right\}$ şi mulţimea B formată din inversele elementelor mulţimii A.

a) Stabiliţi mulţimea de perechi $(x;\ y)$ astfel încît $2 < x + y < 3$, $x \in A$, $y \in B$;

b) Stabiliţi mulţimea de perechi $(x;y)$ astfel încît $x \cdot y = 1$, $x \in A$, $y \in B$.

(C. Armini, G.M., 10/1971)

R. a) Enumerăm elementele mulţimii B:

$B = \left\{2;\ 3;\ 4;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3}\right\}$. Obţinem deci, realizînd calculele cerute, mulţimea $\left\{\left(\frac{1}{2};\ 2\right); \left(\frac{1}{3};\ 2\right); \left(\frac{1}{4};\ 2\right); \left(\frac{2}{3};\ 2\right); \left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right);\right.$ $\left.\left(\frac{3}{4};\ 2\right); \left(\frac{3}{4};\ \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right)\right\}$.

b) Obţinem mulţimea:

$$\left\{\left(\frac{1}{2};\ 2\right); \left(\frac{1}{3};\ 3\right); \left(\frac{1}{4};\ 4\right); \left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right)\right\}.$$

V.71. Calculați :

$$\text{a)}\ \frac{2}{5} : \frac{3}{7};\ \text{b)}\ \frac{5}{8} : \frac{3}{4};\ \text{c)}\ 2\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5};\ \text{d)}\ 4\frac{1}{2} : \frac{3}{7};\ \text{e)}\ \frac{2}{3} : \frac{3}{7};$$

$$\text{f)}\ \frac{2}{5} : \frac{3}{10};\quad \text{g)}\ \frac{2}{17} : \frac{5}{34};\quad \text{h)}\ \frac{1}{2} : \frac{14}{17};\ \text{i)}\ \frac{2}{3} : 1;\ \text{j)}\ 1 : \frac{2}{5};\ \text{k)}\ 1 : 2\frac{1}{5};$$

$$\text{l)}\ 2\frac{1}{9} : \frac{19}{18};\ \text{m)}\ 3\frac{1}{7} : 2\frac{2}{5};\ \text{n)}\ \frac{35}{8} : 2\frac{1}{16}.$$

R. Avem :

$$\text{a)}\ \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15};\ \text{b)}\ \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4^{(4}}{8 \cdot 3} =$$

$$= \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6};\ \text{c)}\ 2\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5} = \frac{7}{3} : \frac{17}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{35}{51};\ \text{d)}\ \frac{9}{2} : \frac{3}{7} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{9 \cdot 7^{(3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2};\ \text{e)}\ \frac{14}{9};\ \text{f)}\ \frac{4}{3};\ \text{g)}\ \frac{4}{5};\ \text{h)}\ \frac{17}{28};$$

$$\text{i)}\ \frac{2}{3};\ \text{j)}\ \frac{5}{2};\ \text{k)}\ \frac{5}{11};\ \text{l)}\ 2;\ \text{m)}\ \frac{55}{42};\ \text{n)}\ \frac{70}{33}.$$

V.72. Calculați :

$$\text{a)}\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2;\ \text{b)}\ \frac{7}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - 4 : \frac{7}{2};\ \text{c)}\ 2 + 3 \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right);\ \text{d)}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{1}{2};\ \text{e)}\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} : \frac{1}{2};$$

$$\text{f)}\ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10};\ \text{g)}\ \frac{1}{7} + \frac{2}{5} : \frac{1}{25};\ \text{h)}\ \frac{3}{2} - \frac{1}{3} : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right);\ \text{i)}\ \frac{1}{20} -$$

$$- \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right).$$

R. Avem :

$$\text{a)}\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{2} = \frac{3}{5} + \frac{3 \cdot 5^{(3 \cdot 5}}{5 \cdot 6} + 1 = {}^{2)}\frac{3}{5} + {}^{5)}\frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{5}{10} + 1 = \frac{11}{10} + 1 = 2\frac{1}{10};\ \text{b)}\ {}^{3)}\frac{7}{3} + \frac{2}{9} - 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{21}{9} + \frac{2}{9} -$$

$$- \frac{8}{7} = {}^{7)}\frac{23}{9} - {}^{9)}\frac{8}{7} = \frac{161 - 72}{63} = \frac{89}{63}.$$

c) $2+3\cdot\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right)+\frac{1}{2}:\left(\frac{4}{10}-\frac{1}{10}\right)=2+3\cdot\frac{11}{10}+\frac{1}{2}:\frac{3}{10}=2+$

$+\frac{33}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}=2+\frac{33}{10}+\frac{10^{(2}}{2\cdot 3}=2\,\frac{^{3)}33}{10}+\frac{^{10)}5}{3}=2\,\frac{99}{30}+\frac{50}{30}=2\,\frac{149}{30}=$

$=6\,\frac{29}{30}$; d) $1\,\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{47}{150}$; g) $10\,\frac{1}{7}$; h) $\frac{1}{4}$; i) $\frac{2}{45}$

V.73. Calculați :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3:\frac{8}{25}$; d) $\frac{3}{2}:\left(\frac{1}{2}\right)^2$; e) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2$; f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{60}:\left(\frac{3}{5}\right)^{58}\cdot\frac{25}{9}$; g) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{12}{5}$; h) $\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{15}:\left(\frac{3}{5}\right)^{16}\cdot 5^3$; i) $\left(2\,\frac{1}{3}\right)^2+\left(3\,\frac{1}{3}\right)^2$.

R Avem :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$; b) $\frac{1}{125}$; c) $\frac{8}{125}\cdot\frac{25}{8}=\frac{8\cdot 25}{125\cdot 8}=\frac{1}{5}$; **d) 6**;

e) $\frac{1}{16}$; f) 1; g) $\frac{49}{60}$; h) 45; i) $\frac{149}{9}$.

V.74. Calculați :

$$\left[5-\frac{5\cdot 5-1}{5\cdot(5+1)-1}\right]\cdot\frac{5}{5-\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5-\dfrac{1}{5}}}}.$$

R. Avem, succesiv :

$$\left(5-\frac{24}{29}\right)\cdot\frac{5}{5-\dfrac{5}{5+5:\dfrac{24}{5}}}=\frac{145-24}{29}\cdot\frac{5}{5-\dfrac{5}{5+\dfrac{25}{24}}}=\frac{121}{29}.$$

$$\frac{5}{5-5:\dfrac{145}{24}}=\frac{121}{29}\cdot\frac{5}{5-\dfrac{120}{145}}=\frac{121}{29}\cdot\frac{5}{\dfrac{725-120}{145}}=\frac{121}{29}\cdot\frac{5\cdot 145}{605}=5.$$

V.75. Calculați :

$$\frac{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{1}{5}}}}}{5-\dfrac{5\cdot 105-1}{5^{5-1}}}\cdot 5.$$

R. Avem, succesiv :

$$\frac{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{24}{25}}}}{5-\dfrac{524}{625}}\cdot 5=\frac{5-\dfrac{5}{5-\dfrac{125-24}{25\cdot 5}}}{5-\dfrac{524}{625}}\cdot 5=\frac{5-\dfrac{625-101}{625}}{5-\dfrac{524}{625}}\cdot$$

$$\cdot 5=\frac{5-\dfrac{524}{625}}{5-\dfrac{524}{625}}\cdot 5=1\cdot 5=5.$$

V.76. Calculați :

$$\frac{\left(2^{2^{2^2}}\cdot 3^{2^{2^2}}\right):(6^2)^{2^2}}{5^{3^2}:(5^3)^2\cdot 2^{3^2}:(2^3)^2}\cdot\frac{10^3}{3^8}:(2^3\cdot 2^5.$$

R. Avem, succesiv :

$$\frac{2^{16}\cdot 3^{16}:6^8}{5^9:5^6\cdot 2^9:2^6}\cdot\frac{2^3\cdot 5^3}{3^8}:2^8=\frac{2^8\cdot 3^8}{5^3\cdot 2^3}\cdot\frac{2^3\cdot 5^3}{3^8}:2^8=1.$$

V.77[M]. Un elev are o sumă de bani. În prima zi, el cheltuiește jumătate din ea, a doua zi o treime din rest, a treia zi jumătate din noul rest, iar a patra zi o treime din suma rămasă.

După aceste cheltuieli îi mai rămîn 12 lei. Ce sumă a avut elevul la început?

R. Pentru a ușura rezolvarea problemei, întocmim următoarea schemă:

Elevul în ziua	a cîta parte din sumă a cheltuit	a cîta parte din sumă i-a rămas
prima	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
a doua	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
a treia	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
a patra	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

Deci suma rămasă după cheltuială, 12 lei, corespunde la $\frac{1}{9}$ din sumă. Elevul a avut $9 \cdot 12$ lei $= 108$ lei.

V.78. Un excursionist a parcurs în prima zi $\frac{1}{5}$ din drumul ce avea de făcut și încă 50 km. A doua zi a parcurs $\frac{1}{3}$ din drumul rămas și astfel pentru a treia zi i-a rămas de parcurs $\frac{1}{6}$ din drumul total și încă 40 km.

a) Aflați cîți km avea de parcurs excursionistul;

b) Cîți km a parcurs în fiecare zi?

R. a) Întregul drum este 200 km.

b) În prima zi a parcurs 90 km. În a doua zi a parcurs $36\frac{2}{3}$ km. În a treia zi a parcurs $73\frac{1}{3}$ km.

V.79. Împărțiți în mod egal 7 mere la 12 copii astfel încît nici un măr să nu fie tăiat în 12 părți egale.

R. Aflăm a cîta parte dintr-un măr îi revine unui copil:

$$7 : 12 = \frac{7}{12}$$

Pe $\frac{7}{12}$ îl putem exprima ca $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Dacă tăiem un măr în trei părţi egale, iar un alt măr în patru părţi egale, putem da la trei copii cîte $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ dintr-un măr şi mai rămîne $\frac{1}{4}$ dintr-un măr.

Repetăm acest procedeu încă de două ori. Aceasta înseamnă că dăm la 9 copii cîte $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ dintr-un măr la fiecare. Ne-au mai rămas 3 copii, un măr întreg şi 3 bucăţi de 1/4 dintr-un măr. Tăiem mărul in trei părţi egale şi mai dăm la fiecare copil cîte $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ dintr-un măr.

Deci putem împărţi 7 mere la 12 copii în aşa fel încît să nu împărţim nici un măr în 12 părţi egale, împărţind 4 mere în cîte 3 părţi egale şi 3 mere în cîte 4 părţi egale. Astfel, fiecare copil va primi :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \text{ de măr.}$$

V.80. Se dau numerele:

$$a = 2^{335} - 2^{334} - 2^{333}, \quad b = 3^{224} - 3^{223} - 3^{222},$$
$$c = 4^{113} - 4^{112} - 4^{111}.$$

Aşezaţi în ordine crescătoare următoarele numere : a, b şi $x = \frac{c}{11}$.

R. Avem :

$a = 2^{335} - 2^{334} - 2^{333} = 2^{333} \cdot (2^2 - 2 - 1) = (2^3)^{111} \cdot 1 = 8^{111}$,

$b = 3^{224} - 3^{223} - 3^{222} = 3^{222} \cdot (3^2 - 3 - 1)] = (3^2)^{111} \cdot 5 = 9^{111} \cdot 5$,

$c = 4^{113} - 4^{112} - 4^{111} = 4^{111} \cdot (4^2 - 4 - 1) = 4^{111} \cdot 11$.

Deoarece $x = 4^{111}$, avem :

$$4^{111} < 8^{111} < 9^{111} \cdot 5,$$

deci :

$$x < a < b.$$

V.81. Aflaţi a 128-a parte din $2^{23} \cdot 23^2$, fără să calculaţi valoarea lui $2^{23} \cdot 23^2$.

R. Deoarece $128 = 2^7$, avem :

$$\frac{1}{2^7} \cdot 2^{23} \cdot 23^2 = 2^{16} \cdot 23^2.$$

V.82. Trei brigăzi pot termina o lucrare, fiecare lucrînd singură, respectiv în 3 zile, 4 zile şi 12 zile.

În cîte zile pot termina cele trei brigăzi lucrarea, lucrînd împreună, dacă prima brigadă participă la lucrare numai cu jumătate din efectiv?

R. Aflăm a cîta parte a lucrării o termină într-o zi:

— prima brigadă: $1 : 3 = \frac{1}{3}$;

— a doua brigadă: $\frac{1}{4}$;

— a treia brigadă: $\frac{1}{12}$;

— jumătate din efectivul primei brigăzi: $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

— a cîta parte a lucrării termină toate brigăzile într-o zi lucrînd împreună:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Lucrarea se poate termina în $1 : \frac{1}{2} = 2$ (zile).

V.83. O lucrare poate fi terminată de un muncitor în 18 zile, iar de altul în 12 zile, lucrînd cîte 8 ore pe zi.

Aflați în cît timp (zile, ore, minute) pot termina aceeași lucrare lucrînd împreună.

R. Aflăm în cîte ore termină primul muncitor lucrarea: $18 \cdot 8 = 144$ (ore).

Al doilea muncitor termină lucrarea în $12 \cdot 8 = 96$ (ore).

Primul muncitor termină într-o oră: $1 : 144 = \frac{1}{144}$ din lucrare.

Al doilea muncitor termină într-o oră: $1 : 96 = \frac{1}{96}$ din lucrare.

Cei doi muncitori într-o oră, lucrînd împreună termină:

$$\frac{1}{144} + \frac{1}{96} = \frac{5}{288} \text{ din lucrare.}$$

Ambii lucrători termină lucrarea în: $1 : \frac{5}{288} = \frac{288}{5} = 57\frac{3}{5}$ ore.

Lucrarea deci se termină de cei doi muncitori, lucrînd împreună, în 7 zile 1 h și 36 min.

V.84. Se dă mulţimea $A = \{3 ; 5 ; 7 ; 9\}$. Alegeţi o pereche de elemente diferite ale acestei mulţimi, a căror medie aritmetică să aparţină tot acestei mulţimi.

R. Sînt două posibilităţi : 3 şi 7 precum şi 5 şi 9. Avem deci $\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$, respectiv $\frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

V.85. O bucată de material a fost vopsită în felul următor : $\frac{1}{3}$ şi apoi $\frac{1}{4}$ din ea în negru, iar restul de 8 m în gri.

Cîţi metri are materialul?

R. Parte vopsită în negru este $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ din întreg materialul.

Partea vopsită în gri este $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ din întreg materialul.

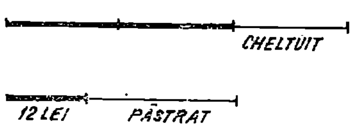
Deci $\frac{5}{12}$ corespund la 8 m, iar $\frac{1}{12}$ corespunde la $\frac{8}{5}$ m şi, prin urmare, materialul are o lungime de $12 \cdot \frac{8}{5} = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5}$ m.

V.86. Un elev a cheltuit o treime din banii săi. Două treimi din banii rămaşi i-a păstrat pentru economii. I-au mai rămas 12 lei.

Cîţi lei a avut iniţial?

R. *Soluţia întîi.* Dacă a cheltuit $\frac{1}{3}$ din bani, i-au rămas $\frac{2}{3}$ din bani. A păstrat $\frac{2}{3}$ din $\frac{2}{3}$ din sumă, adică $\frac{4}{9}$ din suma totală. Îi lipsesc $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ din bani. I-au rămas $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$ din bani, adică 12 lei. Atunci la $\frac{1}{9}$ din suma iniţială corespund 6 lei, iar suma iniţială a fost $9 \cdot 6$ lei $= 54$ lei.

Soluţia a doua. Reprezentăm suma iniţială printr-un segment :

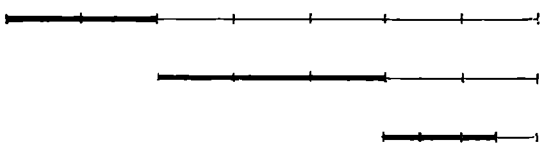


Dacă a păstrat $\frac{2}{3}$ din banii rămaşi după cheltuială, înseamnă că 12 lei corespund pentru $\frac{1}{3}$ din aceşti bani, deci după cheltuială i-au rămas $12 \cdot 3 = 36$ lei. Aceşti 36 lei corespund la $\frac{2}{3}$ din suma iniţială, deci suma iniţială a fost : 36 lei $: \frac{2}{3} = 54$ lei.

V.87. Într-o fabrică, $\frac{2}{7}$ din personalul muncitor sînt tineri, $\frac{3}{5}$ din rest sînt bărbați, $\frac{3}{4}$ din noul rest sînt femei, iar restul sînt elevi care se califică la locul de muncă.

Cîți muncitori sînt în fabrică, dacă numărul tinerilor este cu 337 mai mare decît numărul femeilor?

R. Reprezentăm numărul muncitorilor prin segmente:



$\frac{2}{7}$ (tineri)

$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$ (bărbați)

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$ (femei)

Soluția I. Observăm că diferența dintre numărul tinerilor și numărul femeilor este $\frac{1}{14}$ din numărul muncitorilor. Atunci în fabrică lucrează $337 \cdot 14 = 4\,718$ muncitori din care tineri: $\frac{2}{7} \cdot 4\,718 = 1\,348$; bărbați: $\frac{3}{7} \cdot 4\,718 = 2\,022$; femei: $\frac{3}{14} \cdot 4\,718 = 1\,011$; elevi: $\frac{1}{14} \cdot 4\,718 = 337$.

Soluția a II-a. Se vede pe figură că diferența dintre numărul tinerilor și numărul femeilor este tocmai numărul elevilor. Deci sînt 337 elevi. Femei sînt de trei ori mai multe decît elevi, adică 1011 pentru că $337 \cdot 3 = 1011$.

Numărul tinerilor este egal cu numărul femeilor plus numărul elevilor. Tinerii sînt în număr de $1\,011 + 337 = 1\,348$.

Numărul bărbaților este $\frac{3}{2}$ din numărul tinerilor, adică $\frac{3}{2} \cdot 1\,348 = 2\,022$ (sau bărbați sînt de două ori cît femei).

Numărul personalului muncitor este:

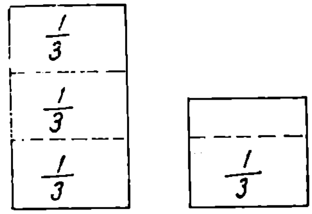
$$1\,348 + 2\,022 + 1\,011 + 337 = 4\,718.$$

V.88. O brigadă are de cosit iarba de pe două parcele dintre care una este de două ori mai mare decît cealaltă.

După ce brigada a cosit jumătate de zi parcela mai mare, jumătate din numărul cosașilor s-au dus să cosească parcela mai mică. Cosașii rămași pe parcela mare au terminat (pînă seara) cositul parcelei. Pe parcela mică a mai rămas o parte, pe care a cosit-o un cosaș în ziua următoare lucrînd toată ziua. Cîți cosași au fost în brigadă?

R. Dacă jumătate din numărul cosașilor au terminat în jumătate de zi ce a rămas din parcela mare, atunci ei au cosit după masă $\frac{1}{3}$ din parcelă, iar înainte de masă întreaga brigadă a cosit $\frac{2}{3}$ din parcelă.

Pentru uşurarea rezolvării folosim următoarea figură :



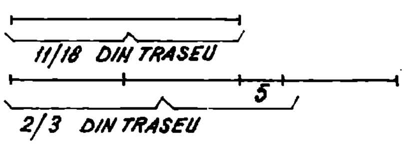
Cosaşii care s-au dus pe parcela mică (jumătate din brigadă), au cosit tot atît cît cei rămaşi pe parcela mare. Dar parcela mică este jumătate din parcela mare. Pentru ziua următoare a rămas deci $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ din parcelă (din parcela mare).

Un cosaş a cosit într-o zi deci $\frac{1}{6}$ de parcelă, dar în ziua precedentă s-au cosit în total $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$ din parcelă ; deci în brigadă au fost 8 cosaşi.

Observaţie. Problema este cunoscută ca „problema lui LEV TOLSTOI sau „problema profesorului TINGER". Ea a fost concepută de PETROV, prietenul lui LEV TOLSTOI, cu ocazia practicii pedagogice a studenţilor.

V.89. Un excursionist, după ce a parcurs $\frac{11}{18}$ din întregul traseu propus, a constatat că dacă ar mai fi mers 5 km, atunci ar fi efectuat $\frac{2}{3}$ din întregul traseu. Aflaţi lungimea întregului traseu.

R. Folosim metoda figurativă :



prima parte parcursă

întreg traseul

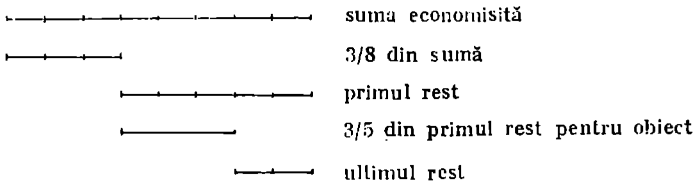
Se constată că $\frac{2}{3}-\frac{11}{18}$, adică $\frac{1}{18}$ din întregul traseu reprezintă 5 km. Rezultă că întregul traseu este de $5\text{ km}\cdot 18 = 90$ km.

Verificare. $\frac{11}{18}\cdot 90\text{ km} = 55\text{ km}: 55\text{ km} + 5\text{ km} = 60\text{ km}$ deci $90\cdot\frac{2}{3} = 60$ (km).

V.90PO; PP**.** Un elev are la C.E.C. economisită o sumă din care ridică 3/8 pentru a efectua o excursie şi-i rămîn 75 lei de la aceasta, care cu 3/5 din ce-i mai rămăsese pe C.E.C. îşi cumpără un obiect decorativ. Aflaţi costul excursiei şi al obiectului ştiind că la C.E.C. au mai rămas 400 lei.

(I. Stepan, G.M., 3/1971).

R. Apelăm la metoda figurativă :



Se constată că ultimul rest rămas la C.E.C., de 400 lei, reprezintă $\frac{2}{5}$ din primul rest. Deci $\frac{1}{5}$ din primul rest este reprezentat de 400 lei : 2, adică de 200 lei. Aşadar, obiectul costă $3 \cdot 200$ lei $+$ 75 lei, adică 675 lei.

Primul rest este de $\frac{5}{5}$ deci de $5 \cdot 200$ lei $=$ 1000 lei. Se mai constată că $\frac{1}{5}$ din primul rest este cît $\frac{1}{8}$ din toată suma. Deoarece prima dată s-au scos de la C.E.C. $\frac{3}{8}$ din toată suma, adică $3 \cdot 200$ lei $=$ 600 lei şi au mai rămas 75 lei de la excursie, excursia a costat 600 lei — 75 lei $=$ $=$ 525 lei.

V.91. Un elev are la C.E.C. economisită o sumă din care ridică $\frac{4}{9}$ pentru a cumpăra un obiect decorativ şi-i rămîn 75 lei de la acesta. Cu $\frac{3}{5}$ din ce-i mai rămăsese pe C.E.C. îşi organizează o excursie. Aflaţi costul excursiei şi costul obiectului, ştiind că la C.E.C. au mai rămas 500 lei.

R. Excursia costă 825 lei, iar obiectul 925 lei.

V.92. Matematicianul grec din antichitate, METRODOROS, autorul multor probleme, a formulat următoarea problemă, cu ajutorul datelor biografice ale lui DIOPHANT, marele gînditor al Antichităţii: „Aici se odihnesc osemintele lui DIOPHANT. Numerele pot să spună cît i-a fost pe pămînt drumul vieţii. Partea a şasea din aceasta s-a scurs în fericita sa copilărie. A 12-a parte din viaţă a petrecut-o în adolescenţă. În căsătorie a mai trecut a şaptea parte din viaţă şi încă cinci ani pînă i s-a născut fiul, căruia destinul i-a hărăzit pe pămînt doar jumătate din viaţa senină în comparaţie cu a tatălui său. În mîhnire adîncă şi-a încheiat DIOPHANT drumul vieţii supravieţuind cu 4 ani fiului său".

Problema se află pe epitaful lui DIOPHANT. Cîţi ani a trăit DIOPHANT?

R. *Soluția I.* Adunăm fracțiile:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{75}{84}.$$

Pînă la vîrsta lui DIOPHANT mai lipsește a 9/84-a parte pentru care, după datele problemei, corespund 4 ani + 5 ani = 9 ani.

La $\frac{1}{84}$ — a parte corespunde un an, deci DIOPHANT a trăit 84 ani.

Soluția a II-a. Notăm cu x vîrsta la care a murit DIOPHANT. Pe baza datelor problemei avem:

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4,$$

$$84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336,$$

deci $9x = 756$, sau $x = 84$ ani.

Aflăm deci următoarele date biografice: DIOPHANT pînă la 14 ani a fost copil; pînă la 21 ani, adolescent; în căsătorie au trecut 12+5= = 17 ani pînă i s-a născut fiul; la 80 ani și-a pierdut fiul și el a murit la 84 ani.

V.93^{PO}. Un număr natural de patru cifre are primele trei cifre numere consecutive, iar ultima cifră este 9.

Împărțind numărul la un număr natural de două cifre obținem un cît de $7\frac{2}{9}$ ori mai mare decît împărțitorul și un rest egal cu jumătatea împărțitorului, fiind un număr natural de o cifră.

Aflați deîmpărțitul, împărțitorul cîtul și restul.

Rezolvăm problema folosind relația:

deîmpărțit = împărțitor · cît + rest.

În cazul nostru, cîtul și restul se pot exprima în funcție de împărțitor și avem:

$$d = i\cdot i\cdot 7\frac{2}{9}+\frac{i}{2}$$

Dăm factor comun împărțitorul și obținem:

$$d = i\cdot\left(\frac{65}{9}\,i+\frac{1}{2}\right),$$

de unde, aducînd la acelaşi numitor, rezultă:

$$d = i \cdot \frac{130\, i + 9}{18}.$$

Deîmpărţitul este numărul căutat de patru cifre, deci este un număr natural. Înseamnă că produsul $i \cdot (130\, i + 9)$ trebuie să se dividă cu 18. În suma $130\, i + 9$, al doilea termen nu se divide cu 2 deci suma nu se divide cu 18. Atunci împărţitorul trebuie să fie multiplu de 18. Fie împărţitorul chiar 18. Atunci restul este 9, cîtul este $\frac{65}{9} \cdot 18 = 130$, iar deîmpărţitul este $18 \cdot 130 + 9 = 2\ 349$.

Acest număr are primele trei cifre numere consecutive, iar ultima cifră este 9, deci este soluţie a problemei.

Căutăm dacă problema mai are alte soluţii. Fie împărţitorul 36. Atunci restul este 18 (jumătate din împărţitor). Dar 18 nu este un număr de o cifră. Deci împărţitorul nu poate fi 36 şi nici alt număr mai mare decît 36. Singura soluţie este, deci, 2 349.

V.94^{M}. La o întîlnire amicală de şah iau parte 4 concurenţi. Fiecare a jucat cu fiecare cîte o partidă. Cîte partide s-au jucat în total? Dar dacă la întîlnire iau parte 5 oameni? Dar 6? Dar 30?

Primul om joacă trei partide cu cei trei amici. Al doilea om joacă două partide (cu al treilea şi cu al patrulea). Al treilea om joacă o partidă cu al patrulea. Astfel, a jucat fiecare cu fiecare cîte o partidă.

În total s-au jucat $3 + 2 + 1 = 6$ partide.

Dacă la întîlnire iau parte 5 oameni, după raţionamentul de mai sus se joacă $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ partide.

Dacă la întîlnire iau parte 6 oameni, se joacă:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ partide.}$$

V.95. O vînzătoare a vîndut primului cumpărător jumătate din numărul merelor de vînzare şi încă o jumătate de măr. Celui de-al doilea cumpărător i-a vîndut jumătate din cantitatea de mere rămase şi încă o jumătate de măr. La al treilea cumpărător i-a dat jumătate din cantitatea rămasă după cele două vînzări şi încă o jumătate de măr.

Continuînd vînzarea în ideea de mai sus, după al şaselea cumpărător, vînzătoarea a constatat că mai are 9 mere.

a) Cîte mere a avut vînzătoarea la început?

b) Ce cantitate de mere a cumpărat fiecare cumpărător dacă 10 mere au greutatea de 1 kg?

c) Ce sumă a încasat vînzătoarea dacă 1 kg de mere costă 5 lei și 50 bani?

a) Dacă al șaselea cumpărător n-ar fi cumpărat jumătatea de măr, ar fi rămas 9 mere și jumătate care este jumătate din cantitatea rămasă după al cincilea cumpărător. Deci, după al cincilea cumpărător au rămas $9\frac{1}{2}\cdot 2 = 19$ mere.

Dacă al cincilea cumpărător n-ar fi cumpărat jumătatea de măr, ar fi rămas 19 mere și jumătate, care este jumătate din cantitatea rămasă după al patrulea cumpărător. Deci, după al patrulea cumpărător au rămas 39 mere.

Continuînd raționamentul, obținem că după al treilea cumpărător au rămas 79 mere, după al doilea cumpărător au rămas 159 mere, după primul cumpărător au rămas 319 mere și inițial au fost 639 mere.

b) Primul cumpărător a cumpărat $639 : 2 + \frac{1}{2} = 320$ mere, adică 32 kg mere, al doilea a cumpărat $319 : 2 + \frac{1}{2} = 160$ mere adică 16 kg, al treilea a cumpărat $159 : 2 + \frac{1}{2} = 80$ mere adică 8 kg, al patrulea a cumpărat $79 : 2 + \frac{1}{2} = 40$ mere adică 4 kg, al cincilea a cumpărat $39 : 2 + \frac{1}{2} = 20$ mere adică 2 kg, al șaselea a cumpărat $19 : 2 + \frac{1}{2} =$ $= 10$ mere adică 1 kg.

c) Cele 639 mere cîntăresc 63 kg și 900 g. Cantitatea de 63 kg costă $63 \cdot 5$ lei și $63 \cdot 50$ bani adică 315 lei și 3 150 bani.

Suma de 3 150 bani înseamnă 31 lei și 50 bani. Deci 63 kg costă 346 lei și 50 bani.

O sută de grame costă 55 de bani. 9 mere înseamnă 900 de grame care costă $9 \cdot 55$ adică 495 de bani, adică 4 lei și 95 bani.

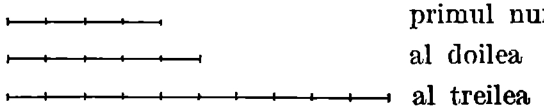
Așadar, toate merele costă 351 lei și 45 bani.

V.96. Despre treinumere se știu următoarele: primul este $\frac{4}{5}$ din al doilea, iar al treilea este **dublul** celui de al doilea. Aflați numerele, în cazul cînd media aritmetică a lor este:

a) 171; b) 95; c) 100.

(C. Cărbunaru)

a) Folosim metoda figurativă.



Observăm că se poate exprima fiecare număr cu ajutorul cincimilor din al doilea număr, astfel: $\frac{4}{5}$ din al doilea este primul; $\frac{5}{5}$ din al doilea este al doilea și $2 \cdot \frac{5}{5}$, adică $\frac{10}{5}$ din al doilea este al treilea. Folosim faptul că în problemă este dată media aritmetică a lor: suma celor trei numere este $\frac{4}{5}+\frac{5}{5}+\frac{10}{5}$, adică $\frac{19}{5}$ din al doilea care reprezintă de trei ori media aritmetică a celor trei numere, care este $3 \cdot 171$ adică 513.

Deci, $\frac{19}{5}$ din al doilea reprezintă 513. Rezultă că al doilea număr este $513 : \frac{19}{5}$, adică $513 \cdot \frac{5}{19} = \frac{513 \cdot 5}{19} = 27 \cdot 5 = 135$. Al treilea număr este $135 \cdot 2 = 270$ iar primul $135 \cdot \frac{4}{5} = \frac{135 \cdot 4}{5} = 108$.

Verificare. Media aritmetică este $(108 + 135 + 270) : 3 = 171$;
Avem, în continuare:

b) 60; 75; 150; c) $\frac{1200}{19}$; $\frac{1\,500}{19}$; $\frac{3\,000}{19}$.

V.97. Media aritmetică a patru numere este 25,5. Aflați primul număr știind că al doilea este cu 2 mai mare decît media aritmetică, al treilea este jumătate din al doilea număr, iar al patrulea este media aritmetică a numărului al doilea și al treilea.

Aflăm numărul al doilea: $25{,}5 + 2 = 27{,}5$;
Aflăm numărul al treilea: $27{,}5 : 2 = 13{,}75$;
Aflăm numărul al patrulea: $(27{,}5 + 13{,}75) : 2 = 20{,}625$;
Aflăm suma celor patru numere: $25{,}5 \cdot 4 = 102$;
Aflăm suma celor trei numere cunoscute:
$27{,}5 + 13{,}75 + 20{,}625 = 61{,}875$;
Aflăm primul număr: $102 - 61{,}875 = 40{,}125$.

V.98. Petru a adunat de 5 ori, iar Paul de 6 ori mai mulți bani decît Eva. Pentru un cadou, cumpărat mamei lor, Petru a dat $\frac{3}{10}$ din banii economisiți, Paul $\frac{1}{4}$ din bani, iar Eva a dat toți banii.

Cîți bani au economisit și cu cît a contribuit fiecare copil, cînd cadoul a costat 180 lei?

Soluția I. Reprezentăm sumele de bani cu ajutorul segmentelor:

	bani economisiți	cheltuiți
Eva	|—|	|—|
Petru	|—|—|—|—|—|	|—|–|
Paul	|—|—|—|—|—|—|	|—|–|

Aflăm de cîte ori a dat Petru mai mult decît Eva: $\frac{3}{10} \cdot 5 = 1{,}5$.

Aflăm de cîte ori a dat Paul mai mult decît Eva: $\frac{1}{4} \cdot 6 = 1{,}5$.

Prețul cadoului este de $1 + 1{,}5 + 1{,}5 = 4$ ori mai mare decît suma economisită de Eva. Deci Eva a avut 180 lei : 4 = 45 lei, iar Petru a avut 45 lei · 5 = 225 lei, iar Paul a avut 45 lei · 6 = 270 lei.

Aflăm cu cît au contribuit Petru și Paul: 45 lei · 1,5 = 67,50 lei.

Verificare: 45 lei + 67,50 lei + 67,50 lei = 180 lei.

Soluția a II-a. Rezolvăm cu ajutorul ecuațiilor: presupunem că Eva are x lei, atunci Petru are $5x$ iar Paul are $6x$ lei. Cadoul a costat 180 lei deci avem relația:

$$x + \frac{3}{10} \cdot 5x + \frac{1}{4} \cdot 6x = 180,$$

sau:

$$x \cdot \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 180,$$

deci $x = 180 : 4$, sau $x = 45$.

De aici raționamentul se repetă și se obține pentru contribuția lui Petru, respectiv Paul suma de 67,50 lei.

V.99. Un om poate săpa o parcelă în 4 ore, altul o poate săpa în 4,5 ore. Urgența lucrării i-a determinat să-și mărească randamentul muncii și astfel împreună au terminat săpatul parcelei în **1,5 ore** săpînd fiecare porțiuni egale.

De cîte ori și-au mărit fiecare randamentul muncii?

Primul om poate săpa într-o oră $\frac{1}{4}$ din **parcelă**, iar în 1,5 ore poate săpa $\frac{1}{4} \cdot 1{,}5 = \frac{3}{8}$ din parcelă. Dar el a săpat $\frac{1}{2}$ din parcelă deci și-a mărit randamentul de $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ ori.

După același raționament, al doilea om poate săpa într-o oră $\frac{1}{4{,}5} = \frac{2}{9}$ din parcelă, iar în 1,5 ore poate săpa $\frac{2}{9} \cdot 1{,}5 = \frac{1}{3}$-a parte. El și-a mărit randamentul de $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ ori.

V.100. Un bazin se poate umple prin trei robinete în felul următor: primul și al doilea robinet împreună îl pot umple în 1,2 h; al doilea și al treilea robinet împreună îl pot umple în 2 h; primul și al treilea robinet împreună îl pot umple în 1 h și 30 min.

a) În cît timp se poate umple bazinul de cele trei robinete funcționînd împreună?

b) În cît timp se poate umple bazinul de primul robinet, de al doilea robinet și de al treilea robinet dacă merg singure?

a) Primul și al doilea robinet umplu într-o oră $\frac{1}{1,2}$, adică $\frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$ din bazin. Al doilea și al treilea robinet umplu într-o oră $\frac{1}{2}$ din bazin. Primul și al treilea robinet umplu într-o oră $\frac{1}{1,5}$, adică $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ din bazin.

Constatăm că dacă ar fi cîte două robinete din fiecare, ele ar umple într-o oră $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ din bazin. Deci toate trei robinetele umplu într-o oră $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{5+3+4}{6} : 2 = 2 : 2 = 1$ adică întreg bazinul. Așadar, toate cele trei robinete, curgînd împreună, umplu bazinul într-o oră.

b) Dacă cele trei robinete, curgînd împreună, umplu bazinul într-o oră, iar primul și al doilea robinet umplu într-o oră $\frac{5}{6}$ din bazin, atunci al treilea robinet umple într-o oră $\frac{1}{6}$ din bazin, deci întregul bazin îl umple în 6 ore.

După același raționament obținem că primul robinet umple bazinul în 2 ore, iar al doilea robinet îl umple în 3 ore.

V.101. La 10 cai și 14 vaci se dau zilnic 180 kg fîn. După ce rația zilnică s-a mărit la cai cu $\frac{1}{4}$ din rația lor, iar la vaci cu $\frac{1}{3}$ din rația lor, cantitatea de fîn necesară pentru o zi, pentru aceleași animale, este de 232 kg.

Ce cantitate de fîn s-a dat înainte și ce cantitate se dă acum la un cal și o vacă într-o zi?

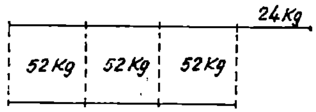
Aflăm cîte kg de fîn corespund la $\frac{1}{4}$ din cantitatea dată cailor şi la $\frac{1}{3}$ din cantitatea dată vacilor, adică cu cît s-a mărit:

$$232 \text{ kg} - 180 \text{ kg} = 52 \text{ kg}.$$

Reprezentăm cantităţile de fîn date cailor şi vacilor cu ajutorul segmentelor:

cantitatea primită de cai

cantitatea primită de vaci



Dacă $\frac{1}{4}$ din cantitatea de fîn dată la cai şi cu $\frac{1}{3}$ din cantitatea de fîn dată la vaci este 52 kg, atunci de trei ori atîta, adică $\frac{3}{3}$ este întreaga cantitate dată la vaci şi $\frac{3}{4}$ din cantitatea dată la cai este $52 \text{ kg} \cdot 3 = 156 \text{ kg}$.

La $\frac{1}{4}$ din cantitatea dată la cai corespund $180 \text{ kg} - 156 \text{ kg} = 24 \text{ kg}$.

Întreaga cantitate dată cailor a fost de $24 \text{ kg} \cdot 4 = 96 \text{ kg}$, iar cantitatea de fîn dată vacilor a fost de $180 \text{ kg} - 96 \text{ kg} = 84 \text{ kg}$.

Un cal a primit $96 \text{ kg} : 10 = 9{,}6$ kg fîn, iar acum primeşte $9{,}6 \text{ kg} + 9{,}6 \text{ kg} \times \frac{1}{4} = 9{,}6 \text{ kg} + 2{,}4 \text{ kg} = 12$ kg fîn.

O vacă a primit $84 \text{ kg} : 14 = 6$ kg fîn şi acum primeşte $6 \text{ kg} + \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ kg} = 6 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 8$ kg fîn.

V.102. Ştim că forma Pămîntului nu este a unui corp geometric perfect. Pămîntul este un „geoid", semănînd cu o sferă turtită la cei doi poli şi cu o suprafaţă foarte ondulată.

Aflaţi raza medie a Pămîntului ştiind că raza ecuatorială este 6 378,160 km, iar raza polară este 6 356,778 m.

Cu cît este mai mare raza ecuatorială decît raza polară?

Aflăm raza medie a Pămîntului:

$$(6\,378{,}160 \text{ km} + 6\,356{,}778 \text{ km}) : 2 = 12\,734{,}938 \text{ km} : 2 = 6\,367{,}469 \text{ km}.$$

Cu cît este mai mare raza ecuatorială decît raza polară?! Ea este mai mare cu:

$$6\,378{,}160 \text{ km} - 6\,356{,}778 \text{ km} = 21{,}382 \text{ km}.$$

V.103. Laura, Ioana, Marinică şi Virgil au adunat fier vechi. Laura a adunat 0,084 t fier vechi. Virgil a adunat cît Ioana şi Marinică împreună. Marinică a adunat de trei ori mai mult decît media aritmetică a cantităţi-lor adunate de Laura și Ioana. Ioana a adunat cu 0,42 q mai mult decît Laura.

Cîte kilograme de fier vechi au adunat în total cei patru copii?

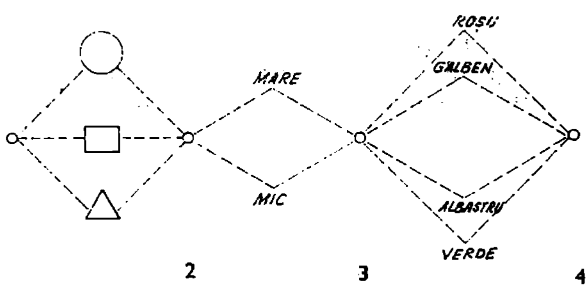
Aflăm cîte kilograme a adunat Laura: 0,084 t = 84 kg.
Aflăm cîte kilograme a adunat Ioana: 0,42 q = 42 kg; deci ea a adunat 84 kg + 42 kg = 126 kg.
Aflăm cît este media aritmetică a cantităților adunate de Laura și Ioana: (84 kg + 126 kg) : 2 = 105 kg.
Aflăm cîte kilograme a adunat Marinică: 105 kg·3=315 kg.
Aflăm cîte kilograme a adunat Virgil: 126 kg + 315 kg = 441 kg.
Aflăm cîte kilograme de fier vechi au adunat în total cei patru copii:

$$84 \text{ kg} + 126 \text{ kg} + 315 \text{ kg} + 441 \text{ kg} = 866 \text{ kg}.$$

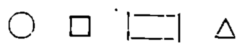
V.104. Se dă mulțimea:
$A = \{$pătrat, triunghi, dreptunghi, cerc$\}$.
Enumerați elementele următoarelor mulțimi:
$B = \{x \mid x \in A$ și x nu este figură geometrică rotundă$\}$;
$C = \{x \mid x \in A$ la care aria se calculează cu formula: latura $\times$ înălțimea corespunzătoare$\}$;
$D = \{x \mid x \in A$ la care perimetrul este egal cu $4 \times$ latura$\}$.

Avem $B = \{$pătrat, triunghi, dreptunghi$\}$;
$C = \{$pătrat, dreptunghi$\}$, $D = \{$pătrat$\}$.
Observație. Se pot scrie următoarele incluziuni: $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $D \subseteq A$, $D \subseteq C$, $C \subseteq B$, $D \subseteq B$, sau concentrat, $D \subseteq C \subseteq B \subseteq A$.

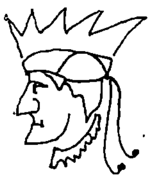
V.105. Studiați cu atenție figura:



Ajungeți, pe diferite căi, din punctul 1 în punctul 4, trecînd prin punctele 2 și 3 citind de exemplu: Cerc „mare roșu", triunghi „mic galben".
Cîte posibilități sînt în total?
Studiați și cazul cînd avem figurile:



mărimile: mare, mijlociu, mic și culorile: roșu, galben, albastru, alb, verde.
Desenați figura și în acest caz.



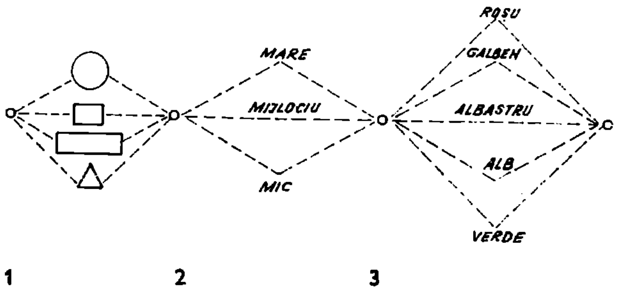
Pornind de la „cerc" prin „mare" avem patru posibilități ca să ajungem în punctul 4, prin cele patru culori.

Pornind de la „cerc" prin „mic" avem tot 4 posibilități. Observăm că pornind de la „cerc", altă posibilitate nu mai este. Deci, la o figură avem atîtea posibilități cît este produsul dintre numărul mărimilor și al culorilor.

În total deci vom avea atîtea posibilități cît este produsul dintre numărul figurilor, a mărimilor și al culorilor, adică:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ posibilități}$$

Figura pentru al doilea caz este :



Numărul posibilităților de parcurgere a drumurilor este $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

V.106. Într-o cutie de formă paralelipipedică cu dimensiunile de 30 cm, 20 cm și 15 cm, cîte cuburi cu muchia cea mai mare posibilă putem așeza încît să se umple complet cutia?

Se observă că problema poate fi rezolvată folosind modelul următor:

se dau numerele 30; 20; 15; care este numărul cel mai mare care divide pe aceste trei numere? (cu alte cuvinte, care este cel mai mare divizor comun al celor trei numere?). Avem schema:

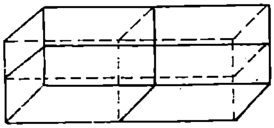
$$\begin{array}{rl} 30 & = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 20 & = 2^2 \cdot 5 \\ 15 & = 3 \cdot 5 \\ \hline \text{c.m.m.d.c.} & = \qquad 5. \end{array}$$

Așadar, vom folosi cuburi cu cea mai mare muchie posibilă, de 5 cm. Rezultă că ele vor fi, în total, în număr de $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$.

Observație. Numărul de cuburi se mai poate calcula și astfel: aflăm volumul paralelipipedului : $30 \cdot 20 \cdot 15 = 9\,000$ u.v. ; aflăm volumul cubului cu latura de 5 u.l., $5^3 = 125$; aflăm numărul de cuburi, $9\,000 : 125 = 72$.

V.107. Un pachet în formă de paralelipiped dreptunghic este legat cu o sfoară, ca în figura de mai jos. Lungimea sforii este 1 m 80 cm, lățimea pachetului este cît înălțimea, iar lungimea este cu 10 cm mai mare decît lățimea.

Aflați dimensiunile pachetului.



Notăm cu L, l și i, respectiv lungimea, lățimea și înălțimea pachetului în centimetri. Pe baza datelor problemei avem $L = l + 10$, $i = l$.

Observăm că în lungimea sforii intră: lungimea paralelipipedului de 2 ori, lățimea paralelipipedului de 4 ori, iar înălțimea paralelipipedului de 2 ori, adică:

1 m 80 cm $= 2\ L + 4\ l + 2i$; 180 cm $= 2(L + 2l + i)$, sau 90 cm $= l + 10 + 2\ l + l$, sau 80 cm $= 4 \cdot l$, deci $l = 20$ cm.

Atunci și $i = 20$ cm, iar lungimea este $L = 30$ cm.

V.108$^{\mathrm{po}}$. Aveți la dispoziție două găleți, una de 4 l, iar alta de 9 l. Puneți într-un vas mai mare o cantitate de apă de 6 l folosind cele două găleți.

Se umple găleata de 9 l. Din aceasta se umple cea de 4 l și rămîn, bineînțeles, 5 l. Se golește găleata mică și se umple din nou cu apă din cea mare. Rămîne, astfel, în cea mare 1 l.

Acest litru de apă se toarnă în găleata mică. Se mai umple încă odată găleata mare și din acești 9 l se toarnă peste litrul din găleata mică pînă se umple.

Au rămas deci în găleata mare 6 l care se pun în vas.

Observație. După ce s-a obținut 1 l în găleata mare, acesta se poate pune în vas; se repetă operațiile pînă se mai obține încă un litru în găleata mare, după care se pune și acesta în vas.

Se obțin în vas 2 litri peste care se mai pot pune încă patru, cu găleata mică și sînt 6 l. Cerința s-a realizat în acest caz cu operații mai multe.

V.109$^{\mathrm{po}}$. Într-o gospodărie sînt trei vase: A, B și C. Vasul A este de 3 l, vasul B este de 5 l, iar vasul C este mult mai mare decît A și B. Arătați cum măsurați 4 l în vasul C, folosind vasele A și B.

R. Umplem vasul A și-l răsturnăm în B. Avem în B 3 l. Umplem din nou vasul A și din el punem în B pînă se umple, adică 2 l. A mai rămas în A 1 l, pe care-l punem în vasul C. Umplem din nou vasul A, cu 3 l, și-l golim în C. În C avem 1 l + 3 l = 4 l.

Observație. Se mai poate proceda și altfel, dar cu mai multe operații: umplem vasul B. Turnăm din B în A pînă se umple, adică 3 l. Rămîn în B 2 l pe care-i golim în C. Golim și vasul A. Repetăm experiența și mai obținem 2 l în B pe care-i turnăm în C, unde mai erau 2 l, deci în total sînt 4 l.

V.110$^{\mathrm{pr}}$. Două corpuri în formă de cub cu laturile de aceeași lungime se așează unul peste altul. Calculați aria noului corp obținut, în cazul cînd latura este de: a) 2 cm; b) 3,2 dm; c) a cm.

a) S-a format un paralelipied dreptunghic, avînd baza un pătrat de latură cît latura cubului și înălțimea cît dublul laturii cubului. Suprafața este formată din suprafețele a patru dreptunghiuri, cu laturile de lungimi egale și suprafețele a două pătrate cu laturile de lungimi egale. Avem aria unuia din dreptunghiuri $2 \cdot 4 = 8$, iar aria unuia din pătrate $2 \cdot 2 = 4$ deci $4 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 32 + 8 = 40$ (cm^2).

b) Avem $4 \cdot (3{,}2 \cdot 6{,}4) + 2 \cdot (3{,}2 \cdot 3{,}2) = 4 \cdot 20{,}48 + 2 \cdot 10{,}24 = 81{,}92 + 20{,}48 = 102{,}40$ (dm^2).

c) Aria unui dreptunghi este $a \cdot 2a = 2a^2$.

Aria a patru dreptunghiuri este $4 \cdot 2a^2 = 8a^2$.

Aria unui pătrat este $a \cdot a = a^2$.

Aria a două pătrate este $2a^2$.

Aria întregului corp este $8a^2 + 2a^2 = 10a^2$ (cm^2).

Observație. Mai comod ar fi fost să rezolvăm punctul c), în general, și apoi pentru punctul a) în loc de a punem 2 și obținem același rezultat:

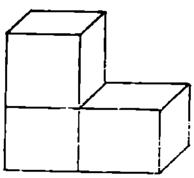
$$10 \cdot 2^2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ (cm)}^2.$$

Pentru punctul b):

$$10 \cdot 3{,}2^2 = 10 \cdot 10{,}24 = 102{,}4 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

V.111. Trei corpuri în formă de cub cu laturile egale se așează ca în desenul alăturat. Calculați aria și volumul corpului obținut în cazul cînd latura are:

a) 4 cm; b) $\frac{25}{7}$ dm; c) 8,2 m; d) a cm.



R. Rezolvăm mai întîi cazul general de la punctul d) și apoi înlocuim pe a cu datele respective de la a), b) și c).

Aria corpului este formată din 14 arii ale pătratului care este față a unui cub. Deci aria este $14a^2$ iar volumul este $3a^3$.

Așadar:

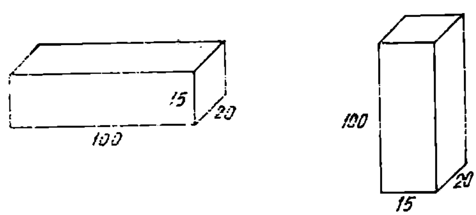
a) $\mathscr{A} = 14 \cdot 4^2 = 14 \cdot 16 = 224$(cm^2); $\mathscr{V} = 3 \cdot 4^3 = 3 \cdot 64 = 192$(cm^3);

b) $\mathscr{A} = \frac{1\,250}{7}$ dm^2; $\mathscr{V} = \frac{46\,875}{343}$ dm^3;

c) $\mathscr{A} = 941{,}36$ m^2; $\mathscr{V} = 1\,654{,}104$ m^3.

V.112. Aflați numărul cuburilor cu latura de 1 cm care se găsesc în corpurile desenate în figură în formă de paralelipiped dreptunghic.

Dimensiunile sînt în centimetri



R. În prima situație avem:

$$(100 \cdot 20) \cdot 15 = 2\,000 \cdot 15 = 30\,000 \ (\text{cm}^3).$$

În a doua situație avem:

$$(15 \cdot 20) \cdot 100 = 300 \cdot 100 = 30\,000 \ (\text{cm}^3).$$

Observație. Volumele sînt egale. Dimensiunile sînt aceleași. Calculul $(100 \cdot 20) \cdot 15 = (15 \cdot 20) \cdot 100$ ne ilustrează faptul că înmulțirea este o operație comutativă și asociativă.

V.113. a) Se dau 7 cuburi cu muchia de 6 cm și 6 cuburi cu muchia de 7 cm. Decideți care ocupă un volum mai mare.

b) Reluați problema pentru 10 cuburi cu muchia de 5 cm și 5 cuburi cu muchia de 10 cm.

c) Asemănător, pentru cazul general: a cuburi cu muchia de b cm și pentru b cuburi cu muchia de a cm.

a) Avem $\mathscr{V}_1 = 7 \cdot 6^3$; $\mathscr{V}_2 = 6 \cdot 7^3$.
Împărțim ambele numere cu $7 \cdot 6$ pentru că nu se va schimba comparația. Constatăm că obținem pentru comparare 6^2 cu 7^2. Deoarece $6^2 < 7^2$ rezultă $\mathscr{V}_1 < \mathscr{V}_2$.
În continuare: b) $10 \cdot 5^3 < 5 \cdot 10^3$; c) $a \cdot b^3 < b \cdot a^3$ cînd $b < a$, iar $b \cdot a^3 < a \cdot b^3$ cînd $a < b$.

V.114. O stivă de scînduri ocupă un volum de 12 m^3. Fiecare scîndură are lungimea de 4 m, lățimea de 25 cm și grosimea de 3 cm. Aflați numărul de scînduri din stivă. Dar dacă stiva ocupă 30 m^3?

R. Calculăm volumul unei scînduri care în urma experienței din toate zilele are forma de paralelipiped dreptunghic. Formula de calcul este:

$$\mathscr{V} = L \cdot l \cdot g$$

(L este lungimea, l este lățimea iar g este grosimea). Deci:

$$\mathscr{V} = 4 \text{ m} \cdot 25 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 400 \cdot 25 \cdot 3 \text{ cm}^3 = 30\,000 \text{ cm}^3.$$

Transformăm: 12 m^3=12 000 000 cm^3. În cazul cînd între scînduri nu sînt spații goale (adică avem o problemă ideală) numărul de scînduri este $12\,000\,000 : 30\,000 = 400$. În celălalt caz avem 1 000 de scînduri.

V.115. Calculați aria în cm^2 a unui triunghi avînd latura și înălțimea corespunzătoare:

a) 4 cm și 8 cm;	e) 0,1 km și $\frac{2}{5}$ m;
b) 25 cm și 3 dm;	f) 80 mm și 16 cm;
c) 0,2 m și 10 dm;	g) 256 mm și 0,3 dam;
d) 8 m și 2,3 hm;	h) 12,4 mm și 0,002 cm.

R. a) Aria unui triunghi se calculează cu formula:

$$\mathscr{A} = \frac{l \cdot i}{2}.$$

Avem :

$$\mathscr{A} = \frac{4 \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2.$$

b) Avem $\mathscr{A} = \dfrac{25 \text{ cm} \cdot 3 \text{ dm}}{2} = \dfrac{25 \cdot 30}{2} \text{ cm}^2 = 375 \text{ cm}^2.$

În continuare :

c) $0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$; $\mathscr{A} = 1\,000 \text{ cm}^2$.

d) $\mathscr{A} = 92 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$; e) $\mathscr{A} = 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$; f) $\mathscr{A} = 64 \text{ cm}^2$; g) $\mathscr{A} = 38\,400 \text{ cm}^2$; h) $\mathscr{A} = 0{,}00124 \text{ cm}^2$.

V.116. Calculați :

$$\frac{[3,(16) : 3,1(6) + 3,16] + \dfrac{1}{627}}{12\dfrac{1}{3} \cdot 2\dfrac{1}{4} - 5\dfrac{1}{2} \cdot 4\dfrac{2}{5}} \cdot \frac{71}{104}.$$

R. Avem, succesiv :

$$\frac{\left(3\dfrac{16}{99} : 3\dfrac{15}{90} + 3\dfrac{16}{100}\right) + \dfrac{1}{627}}{\dfrac{37}{3} \cdot \dfrac{9}{4} - \dfrac{11}{2} \cdot \dfrac{22}{5}} \cdot \frac{71}{104} = \frac{\dfrac{626}{627} + 3\dfrac{4}{25} + \dfrac{1}{627}}{\dfrac{111}{4} - \dfrac{121}{5}} \cdot \frac{71}{104} =$$

$$= 4\frac{4}{25} : \frac{71}{20} \cdot \frac{71}{104} = \frac{104}{25} \cdot \frac{20}{71} \cdot \frac{71}{104} = \frac{4}{5}.$$

V.117. Calculați :

$$\frac{1}{1\dfrac{5}{22}} + \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{0,(6)} - \frac{1}{\dfrac{1}{0,3(6)} - 1\dfrac{1}{2}}.$$

R. Avem, succesiv :

$$1 : \frac{27}{22} + \frac{1}{4} : \frac{6}{9} - 1 : \left(1 : \frac{36-3}{90} - 1\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{27} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} -$$

$$- 1 : \left(1 : \frac{11}{30} - 1\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{27} + \frac{3}{8} - 1 : \left(\frac{30}{11} - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{22}{27} + \frac{3}{8} - 1 : \frac{27}{22} = \frac{22}{27} + \frac{3}{8} - \frac{22}{27} = \frac{3}{8}.$$

V.118. Calculați:

$$\frac{5,(3)+3\frac{1}{2}\cdot\left(8\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}\right)-1\frac{1}{5}}{4\frac{4}{5}-1\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}\cdot 1,21(6):73}.$$

Avem, succesiv:

$$\frac{5\frac{1}{3}+\frac{7}{2}\cdot\left(8\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}\right)-1\frac{1}{5}}{4\frac{4}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{5}+\frac{9}{4}\cdot 1\frac{216-21}{900}:73}=$$

$$=\frac{5\frac{1}{3}+\frac{7}{2}\cdot\left(8\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)-1\frac{1}{5}}{4\frac{4}{5}-\frac{24}{5}+\frac{9}{4}\cdot 1\frac{195}{900}\cdot\frac{1}{73}}=\frac{5\frac{1}{3}+\frac{7}{2}\cdot 7\frac{2}{3}-1\frac{1}{5}}{\frac{9}{4}\cdot\frac{1\,095}{900}\cdot\frac{1}{73}}=$$

$$=\frac{\frac{16}{3}+\frac{161}{6}-\frac{6}{5}}{\frac{3}{80}}=\frac{160+805-36}{30}\cdot\frac{80}{3}=\frac{929\cdot 8}{3\cdot 3}=\frac{7\,432}{9}=825\frac{7}{9}.$$

V.119. Calculați:

$$10,1:\frac{1,2+\dfrac{2,1+\frac{1}{2}}{1,2}}{2,1+\dfrac{1,2}{2,1+\frac{1}{2}}}\cdot 1,(4).$$

Avem, succesiv:

$$10,1:\frac{1\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}:1\frac{1}{5}}{2\frac{1}{10}+1\frac{1}{5}:2\frac{3}{5}}\cdot 1\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{101}{10}:\left[\left(\frac{6}{5}+\frac{13}{6}\right):\left(\frac{21}{10}+\frac{6}{13}\right)\right]\cdot\frac{13}{9}=\frac{101}{10}:\left(\frac{101}{3}\cdot\frac{13}{333}\right)\cdot\frac{13}{9}=$$

$$=\frac{101}{10}\cdot\frac{3\cdot 333}{101\cdot 13}\cdot\frac{13}{9}=\frac{111}{10}=11,1.$$

V.120. Calculați :

$$\frac{2{,}1(6)+2{,}(18)+2{,}16}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+2:0{,}(2)}}}.$$

Avem, succesiv :

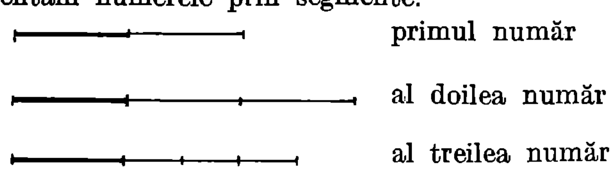
$$\frac{2\frac{15}{90}+2\frac{18}{99}+2\frac{16}{100}}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+2:\frac{2}{9}}}}=\frac{6\frac{275+300+264}{6\cdot 11\cdot 25}}{2+\cfrac{2}{2+\frac{2}{11}}}=$$

$$=\frac{6\frac{839}{1\,650}}{2+\cfrac{2}{\frac{24}{11}}}=\frac{6\frac{839}{1\,650}}{2+\frac{11}{12}}=6\frac{839}{1\,650}:2\frac{11}{12}=$$

$$=\frac{10\,739}{1\,650}\cdot\frac{12}{35}=\frac{21\,478}{9\,625}=2\frac{2\,228}{9\,625}.$$

V.121. Aflați trei numere știind că $\frac{1}{2}$ din primul este cît $\frac{1}{3}$ din al doilea și cît $\frac{2}{5}$ din al treilea, diferența dintre primele două numere fiind 2,1(6).

Reprezentăm numerele prin segmente.



Observăm că diferența dintre primele două numere este cît jumătate din primul număr și cît o treime din al doilea număr. Primul număr va fi $2\cdot 2{,}1(6)=2\cdot 2\frac{1}{6}=4\frac{1}{3}$. Al doilea număr va fi $3\cdot 2\frac{1}{6}=6\frac{1}{2}$. Mai observăm că $\frac{1}{5}$ din al treilea număr este cît $\frac{1}{4}$ din primul deci al treilea număr va fi $4\frac{1}{3}:4\cdot 5=5\frac{5}{12}$.

1. (4p) Simplificaţi următoarele fracţii aducîndu-le la forma ireductibilă:

a) $\frac{4}{6}$; b) $\frac{15}{20}$; c) $\frac{45}{36}$; d) $\frac{12}{54}$; e) $\frac{40}{80}$; f) $\frac{16}{56}$; g) $\frac{300}{21\,000}$; h) $\frac{400}{32\,000}$.

2. (2p) Aduceţi următoarele grupe de fracţii la numitorul comun cel mai mic:

a) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{4}$; d) $\frac{4}{15}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{1}{50}$.

3. (4p) Calculaţi:

a) $\frac{2}{17}+\frac{3}{17}+\frac{4}{17}$; b) $\frac{15}{17}-\frac{3}{17}-\frac{4}{17}$; c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$; e) $\frac{2}{3}-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}$; f) $\frac{4}{15}+\frac{3}{25}-\frac{1}{50}$; g) $\frac{3}{40}+\frac{1}{60}-\frac{1}{30}$; h) $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}-\frac{1}{140}$.

4. (4p) Calculaţi:

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}$; b) $\frac{1}{7}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$; d) $\frac{2}{15}\cdot\frac{30}{7}$; e) $\frac{12}{43}:\frac{3}{86}$; f) $1:\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}$; g) $2\cdot 2\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$; h) $3\cdot\frac{14}{63}:\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}$.

5. (2p) Calculaţi:

a) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot 5$; b) $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}:\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$;

d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:\left(2+\frac{1}{2}:2\cdot 4\right)$.

6. (2p) Calculaţi:

a) $2{,}5+3{,}42$; b) $4{,}31-2{,}151$; c) $2{,}3\cdot 0{,}4$; d) $14{,}31\cdot 1{,}02$; e) $4{,}5:1{,}5$; f) $2{,}9\cdot 2:0{,}5$; g) $8{,}05+1{,}95\cdot 0{,}2$; h) $0{,}12-0{,}13:0{,}5$.

7. (2p) Transformaţi în metri, respectiv în metri pătraţi:

a) 2,51 dam; b) 25,31 dm; c) 15,123 cm; d) 25,3125 dam^2; e) 43,2 dm^2; f) 45,31 km; g) 13,4 km^2; i) 145,29 dam^2.

Notă. Timp de lucru: 90 minute.

1. (2p). Scrieţi toate fracţiile echivalente cu $\frac{2}{3}$ care au numărătorul număr natural de forma $\overline{aa}$.

2. (2p) Calculaţi :

a) $\frac{11}{20}$ din 96 ; b) $\frac{13}{15}$ din 65 ; c) $\frac{23}{45}$ din 90 ; d) $\frac{2}{5}$ din $\frac{10}{21}$.

3. (2p). Aflaţi un număr ştiind că :

a) $\frac{2}{3}$ din el este 12 ; b) $\frac{2}{15}$ din el este $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{7}$ din el este $\frac{4}{9}$; d) $\frac{3}{10}$ din el este $\frac{6}{7}$.

4. (3p) Stabiliţi valoarea logică a următoarelor propoziţii :

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5}{15}$; b) $2{,}5+3{,}02=3{,}27$; c) $28{,}7-15{,}328=13{,}372$;

d) $\frac{2}{5}:\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$; e) $0{,}02\cdot 0{,}03=0{,}06$; f) $1:0{,}1=10$.

5. (2p) Calculaţi :

$$a)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}:\frac{5}{12}+\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{5};$$

$$b)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\quad\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\right];$$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}\right)^2$; d) $1:2:3:4:5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

6. (2p) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{2}{3}+x=\frac{3}{4}$; b) $x-\frac{5}{6}=\frac{2}{9}$; c) $\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$; d) $x:\frac{5}{6}=\frac{2}{9}$.

7. (4p) Scrieţi cu virgulă :

a) $\frac{13}{100}$; b) $\frac{129}{10}$; c) $\frac{431}{100}$; d) $\frac{21}{10\,000}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{4}$; g) $\frac{2}{5}$; h) $\frac{3}{8}$.

8. (3p) Scrieţi folosind fracţii ireductibile :

a) 0,2 ; b) 0,3 ; c) 2,4 ; d) 0,421 ; e) 2,11115 ; f) 0,1992 ; ; g) 1,10101.

Notă. Timp de lucru : 90 minute.

1. (3p) Cercetați dacă următoarele numere $\frac{301}{411}$; $\frac{301\,301}{411\,411}$; $\frac{301\,301\,301}{411\,411\,411}$ sînt egale.

(C. Cărbunaru)

2. (2p) Găsiți $a \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{12}{a+3} \in \mathbb{N}$.

3. (3p) Găsiți $a \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{a+7}{a-1} \in \mathbb{N}$.

4. (2p) Arătați că fracția $\frac{65n+3}{39n+2}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

(I. Stănică, G.M., 7/1984)

5. (2p) Suma a trei numere este 60. Dacă înmulțim al doilea număr cu $\frac{5}{4}$, obținem același rezultat ca atunci cînd îi adăugăm 5.

Știind că al treilea număr este cu 6 mai mare decît primul, aflați cele trei numere.

(D. Sorin, G.M., 4—5/1984)

6. (2p) Arătați că dacă:

$$x = \frac{1}{8},\ y = \frac{1}{4},\ z = \frac{3}{8},\ u = \frac{1}{2},\ v = \frac{5}{8},$$

atunci:

$$x + 2y + 6z + 4u + 5v = 8$$

și:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + u^2 + v^2 = 1.$$

(C. Ionescu—Țiu, G.M., 3/1984)

7. (2p) Determinați numărul natural n pentru care avem:

$$\frac{3}{20} < \frac{2}{n^2} < \frac{3}{10}.$$

(F.Ș. Dascălu, G.M., 1/1984)

8. (20p) Simplificați fracția:

$$\frac{2+4+6+8+\ldots+100}{6+12+18+24+\ldots+300}$$

(Ilie Gheorghilă)

9. (2p) Arătați că $x = \frac{10^n+8}{9}$ este număr natural oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

C. Cărbunaru

Notă. Timp de lucru: 2 ore.

T 1. *1*) 92 708; *2*) 3 310; *3*) 7 906 668; *4*) 903; *5*) 95; *6*) 30; *7*) 45; *8*) 90; *9*) 1 795; *10*) 24; *11*) 1; *12*) 11; *13*) 111; *14*) 1 111; *15*) 11 111; *16*) 729; *17*) 19 683; *18*) 19 683; *19*) 19 683; *20*) 800.

T 2. *1*) a) 24 000; b) 13 400; c) 49; *2*) a) 4 230; b) 3 776; c) 52; d) 80 000; *3*) 1 500; *4*) 790; *5*) 448 050; *6*) 12 800 000; *7*) 13; *8*) 60; *9*) 35.

T 3. *1*) 111; *2*) $x = 2$; *3*) 0; 0; 3 sau 0; 1; 2 sau 0; 2; 1 sau 0; 3; 0 sau 1; 0; 2 sau 1; 1; 1 sau 1; 2; 0 sau 2; 0; 1 sau 2; 1; 0 sau 3; 0; 0, etc.; *4*) 157; *5*) 50; 100; *6*) 48 și 5; *7*) 10; 45; 20.

T 4. *1*) a) 250 m; b) 2 000 m; c) 20 m; d) 2 900 m; 2) a) 21 000 kg; b) 400 kg; c) 2 kg; d) 43 kg; *3*) a) 5 200 cm; b) 20 000 cm; c) 1 920 cm; d) 140 cm; *4*) 1 000 dm; *5*) 150 m; *6*) 850 m; *7*) a) 4 320 minute; b) 209 minute.

T 5. *1*) a) 1 267 dam; b) 2 542 m; nu se poate exprima prin număr natural în decametri căci 2542 : 10 nu este număr natural.

2) a) $25 \cdot 10^4$ mm; b) $28 \cdot 10^3$ mm; c) 4 203 028 mm.

3) a) 4t; b) 322 t 2 kg; nu se poate exprima folosind numere naturale; c) 8 t; *4*) a) 7 ore; b) 12 ore; c) 77 ore; d) 744 ore; *5*) 378 m; *6*) 62 m; 223 km 200 m; *7*) 2 600 kg; 2 488 kg; 2 408 kg; 2 583 kg.

T 6. *1*) 882 t; *2*) Sînt două situații : 1 m; 5 m sau 2 m; 4 m. Avem și cazul cînd dreptunghiul devine pătrat cu latura de 3m; *3*) 44 ani; *4*) 6 kg 800 g; 13 kg 200 g; *5*) 23 ani; 46 ani; *6*) 10 m; 10 m; 40 m; 40 m pentru primul dreptunghi; 30 m; 30 m; 80 m; 80 m pentru al doilea dreptunghi.

T 7. *1*) $A = \{29; 30\}$, $B = \{40; 41; 42; 43; 44; 45\}$, $C = \Phi$.

2) a) $\{2; 3; 5; 1\}$; b) $\{4; 2\}$; c) $\{3\}$; d) Φ; e) $\{3; 6\}$; f) $\{1\}$; g) Φ; h) Φ; *3*) $a = 0$, $x = 1$; $a = 1$, $x = 3$; $a = 2$, $x = 4$; $a=3$, $x=3$; $a=4$, $x \notin \mathbb{N}$; *4*) a) $5x$; b) $11x$; c) $4x$; d) x; e) $5x$; f) $19x$; g) $3x$; h) $219x + 33y$; *5*) $v(p_1) = 0$; $v(p_2) = 1$; $v(p_3) = 0$; $v(p_4) = 0$; $v(p_5) = 1$; $v(p_6) = 0$; *6*) a) $S = \{4\}$; b) $S=\{5\}$; c) $S = \{0; 1\}$; d) $S = \{2\}$; e) $S = \{2\}$; f) $S = \{0; 1; 2; 3\}$ g) $S = \{80\}$; h) $S=\{3; 4; 5; \ldots\}=\mathbb{N} - \{0; 1; 2\}$.

T 8. *1*) a) $x = 2$; b) $x = 5$; c) $x = 2$; *2*) 130; *3*) $9a$; *4*) $D = \{3\}$; $E = \Phi$, $F = \{1; 2; 3; 4\}$; $G = \{4\}$; *5*) a) 9 900; b) 49 900; c) 0; d) $5\,449 \cdot 21$; e) $499 \cdot (x + 100)$; f) $9\,189 \cdot (a - b)$; *6*) a) $S=\{1\}$; b) $S = \Phi$; *7*) a) $S = \{1; 3\}$; b) $S = \{1; 4\}$; *8*) $x \notin \mathbb{N}$, deci $S = \Phi$.

T 9. *1*) $A = \{6; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; *2*) $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 1$; $v(p_4) = 1$; $v(p_5) = 1$, $v(p_6) = 1$; *3*) (1; 7), (4; 6); (6; 4); (7; 1); *4*) $x \notin \mathbb{N}$; $S=\Phi$; *5*) 100; 10; 150; 250; *6*) 5 000; 1 000; 100; 1 500; *7*) Unul din numere este 0, 1 sau 2.

T 10. *1*) a) 14; 0; 140; 42; 12 790; 10; 2; b) 0; 5; 140; 45; 12 790; 10; c) 0; 39; 42; 171; 45; d) 171; 45; e) 0; 140; 12 790;

10 ; f) 5 ; 101 ; 2 ; 13 ; g) 23 ; 5 ; 39 ; 171 ; 1 ; 45 ; 101 ; 13 ; h) 14 ; 0 ; 140 ; 42 ; 12 790 ; 10 ; 2 ; *2)* a) 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; c) 1 ; 5 ; d) 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; *3)* a) $2^2 \cdot 3$; b) 2^3 ; c) $2 \cdot 3$; d) $2 \cdot 3 \cdot 5$; e) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; f) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$; g) $2^5 \cdot 5$; h) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; i) $2^7 \cdot 5^2$; j) $2 \cdot 3^5 \cdot 13$; *4)* a) 6 ; b) 2 ; c) 4 ; d) 10 ; e) 4 ; f) 5 ; g) 42 ; h) 1 ; *5)* a) 12 ; b) 10 ; c) 24 ; d) 24 ; e) 144 ; f) 24 ; g) 600 ; h) 42 000 ; *6)* a) 0 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; b) 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; 56 ; 64 ; 72 ; 80 ; 88.

T 11. *1)* $B = \{240; 242; 246; 248\}$, $C = \{240; 248\}$, $D = \{243\}$, $E = \Phi$, $F = \Phi$, $G = \{240; 246\}$; *2)* $A = \{1; 2; 4; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $C = \{1; 3; 9\}$, $A \cap B = \{1; 2; 4\}$, $B \cap C = \{1; 3\}$; $A \cap C = \{1\}$; $A \cap B \cap C = \{1\}$; $A - (B \cup C) = \{8\}$; *3)* 1 ; 2 ; 3 ; $2 \cdot 3$; 3^2 ; $2 \cdot 3^2$; 3^3 ; $2 \cdot 3^3$; *4)* 14 şi 5 ; 14 şi 45 ; 5 şi 62 ; 5 şi 6 ; 5 şi 2 ; 62 şi 45 ; 45 şi 2 ; *5)* 999 992 ; *6)* 96 ; *7)* $24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$; 53 nu se scrie ; $55 = 2 + 53$; 125 nu se scrie ; *8)* 2 ; 3 ; 5 sau 2 ; 4 ; 5 sau 6 ; 9 ; 7 etc ; *9)* 321 ; $321 \cdot 2$; $321 \cdot 10$ sau $321 \cdot 4$; $231 \cdot 5$; $321 \cdot 7$ etc ; *10)* a) 306 m ; b) 75 bani.

T 12. *1)* $2 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 5$; $2 \cdot 7$; $2 \cdot 11$; $2 \cdot 13$; $3 \cdot 3$; $3 \cdot 5$; $3 \cdot 7$; $5 \cdot 5$; *2)* 50 ; 100 ; 127 ; *3)* 48 ; 72 ; 120 ; *4)* 6 m ; *5)* 301 ; *6)* 2 şi 1 541 ; *7)* 5 625 ; 5 655 ; 5 685 ; nici unul din cele 3 numere nu se divide la 11 ; *8)* $3^{11} \cdot 4^{11} \cdot 7 = (9 \cdot 7) \cdot (3^9 \cdot 4^{11}) = 63 \cdot (3^9 \cdot 4^{11})$.

T 13. *1)* a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{4}$; d) $\frac{2}{9}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{2}{7}$; g) $\frac{1}{70}$; h) $\frac{1}{80}$; *2)* a) $\frac{4}{6}$; $\frac{1}{6}$; b) $\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{5}{8}$; c) $\frac{8}{12}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{12}$; d) $\frac{40}{150}$; $\frac{18}{150}$; $\frac{3}{150}$; *3)* a) $\frac{9}{17}$; b) $\frac{8}{17}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{15}{8}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{11}{30}$; g) $\frac{7}{120}$; h) $\frac{54}{28}$. *4)* a) $\frac{6}{35}$; b) $\frac{2}{21}$, c) $\frac{14}{15}$; d) $\frac{4}{7}$; e) 8 ; f) $\frac{25}{4}$; g) 2 ; h) $\frac{2}{15}$; *5)* a) 4 ; b) $\frac{9}{5}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{4}{9}$; *6)* a) 5,92 ; b) 2,159 ; c) 0,92 ; d) 14,5962 ; e) 3 ; f) 11,6 ; g) 8,44 ; h) 0,055 ; *7)* a) 25,1 m ; b) 2,531 m ; c) 0,15123 m ; d) 2531,25 m^2 ; e) 0,432 m^2 ; f) 45 310 m ; g) 13 400 000 m^2 ; i) 14 529 m^2.

T 14. *1)* $\frac{22}{33}$; $\frac{44}{66}$; $\frac{66}{99}$; $\frac{88}{132}$; *2)* a) $\frac{264}{5}$; b) $\frac{169}{3}$; c) 46 ; d) $\frac{4}{21}$. *3)* a) 18 ; b) $\frac{75}{16}$; c) $\frac{14}{9}$; d) $\frac{20}{7}$; *4)* a) 0 ; b) 0 ; c) 1 ; d) 0 ; e) 0 ; f) 1 ; *5)* a) $\frac{129}{40}$; b) $\frac{40}{81}$; c) $6\frac{1}{2}$; d) 1 ; *6)* a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{19}{54}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{27}$; *7)* a) 0,13 ; b) 12,9 ; c) 4,31 ; d) 0,0021 ; e) 0,5 ; f) 0,75 ; g) 0,4 ;

h) 0,375. *8*) a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{10}$; c) $\frac{12}{5}$; d) $\frac{421}{1\,000}$; e) $\frac{42\,223}{20\,000}$; f) $\frac{249}{1\,250}$; g) $\frac{110\,101}{100\,000}$; h) $\frac{1}{10\,000}$.

T 15. *1*) Scriem astfel: $\frac{301 \cdot 1\,000 + 301}{411 \cdot 1\,000 + 411} = \frac{301 \cdot (1\,000 + 1)}{411 \cdot (10\,000 + 1)} = \frac{301}{411}$; $\frac{301 \cdot 100\,000 + 301 \cdot 1\,000 + 301}{411 \cdot 100\,000 + 411 \cdot 1\,000 + 411} = \frac{301(100\,000 + 1\,000 + 1)}{411(100\,000 + 1\,000 + 1)} = \frac{301}{411}$. *2*) $a \in \{0; 1; 3; 9\}$; *3*) $a \in \{2; 3; 5; 9\}$; *4*) Notăm cu $d \neq 1$, divizorul comun al numărătorului și numitorului; înseamnă că $d \mid 5(39n + 2) - 3(65n + 3) = 1$, adică $d \mid 1$, contrar ipotezei. *5*) 17; 20; 23; *7*) 3; *8*) $\frac{2(1 + 2 + \ldots + 50)}{6(1 + 2 + \ldots + 50)} = \frac{1}{3}$; *9*) $x = \frac{100\ldots00 + 8}{9} = \frac{100\ldots08}{9}$, numărătorul fiind divizibil cu 9 deoarece suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

CAPITOLUL VI

PROBLEME COMENTATE DIN REVISTE STRĂINE

Introducere orientativă

1. Culegerile de probleme şi metodologiile de rezolvare

Culegerile de probleme pot fi folositoare nu numai pentru asimilarea şi fructificarea cunoştinţelor matematice, pentru însuşirea unor metode şi tehnici de rezolvare, pentru antrenamentul la care supun capacităţile intelectuale ale celor care le studiază — ele pot fi şi deschizătoare de drumuri în cunoaşterea matematică, dacă sînt constituite cu scopul de a oferi cititorului pasionat metodologii atractive şi rodnice de investigaţie a necunoscutului problemelor.

Nu toate culegerile de probleme atestă preocupări metodologice deliberate, alegerea şi tratarea problemelor jucînd un rol de prim plan în afirmarea acestor preocupări. Nu este suficient să se colecţioneze probleme şi să se clasifice pe discipline şi capitole pentru a se alcătui o culegere, după cum nu este suficient să se colecţioneze tablouri şi să se aşeze pe categorii de subiecte pentru a avea o galerie. Este necesar să existe o linie metodologică bine trasată şi explicitată prin comentarii îndrumătoare şi sugestive.

Din acest punct de vedere, puţine sînt culegerile care urmăresc o astfel de linie metodologică şi cu atît mai puţine acelea care urmăresc în mod deliberat o astfel de linie. Desigur, în unele culegeri apar introduceri cu caracter pedagogic în care se prezintă în rezumat teoria pe care o vor exemplifica şi aprofunda exerciţiile şi problemele din capitolul respectiv şi astfel de introduceri sînt deosebit de binevenite, fiindcă îndrumă pe cititor şi-l scutesc de căutări aleatoare în diverse manuale şi tratate. Dar aceasta nu înseamnă, implicit, afirmarea şi exemplificarea unei linii metodologice în rezolvarea problemelor. Dacă ne gîndim bine şi ne întoarcem în amintirea începuturilor noastre ca rezolvitori de probleme, vom constata sau că am fost nişte autodidacţi, sau că am fost îndrumaţi de cineva binevoitor şi priceput, asimilarea tehnicilor şi metodelor fiind în ambele cazuri artizanală.

Ca profesori, noi cerem elevilor şi studenţilor să rezolve probleme, unele foarte dificile, dar nu ne întrebăm cine şi cum i-a învăţat să efectueze o astfel de performanţă intelectuală. Manualele nu o fac, sau, dacă o fac, procedează prin prezentarea de exemple tratate, mai mult sau mai puţin raportate la teoria pe care o ilustrează, fără a arăta explicit şi deliberat calea metodologică a descoperirii şi alcătuirii soluţiilor.

Avem manuale, monografii şi cursuri de metodică, dar acestea se referă la predarea unor discipline sau chiar capitole, nu şi la rezolvarea exerciţiilor şi problemelor. Există un consens general că a rezolva o problemă este un act natural, poate moştenit, în orice caz lipsit de cerinţa unei ucenicii metodice. Şi cît de departe de realitate este această convingere ne dăm seama zilnic, cînd constatăm că majoritatea elevilor nu ştiu să rezolve problemele pe care manualele le aşează în finalul capitolelor lor fără a fi îndrumaţi.

Cu toate acestea, nu se fac eforturi pe plan larg, în mediile profesorale, pentru a se ajunge la eliminarea acestei deficienţe atît de răspîndite, care dovedeşte că rezolvarea problemelor implică stăpînirea unei metodologii adecvate.

II. Probleme comentate, ca instrumente metodologice

O astfel de metodologie se cîştigă prin îmbinarea deliberată a însuşirii şi asimilării cunoştinţelor matematice din manuale, monografii, tratate, broşuri sau reviste de specialitate ce practică rezolvări de exerciţii şi probleme adecvate acestor cunoştinţe şi prezentate cu *soluţii comentate* în care să apară strategiile întrebuinţate pentru rezolvare, fiindcă o problemă poate conţine în ea însăşi cunoştinţe care nu sînt explicit cuprinse în teoremele folosite pentru rezolvarea ei. De asemenea, folosirea acestei teoreme poate fi greu de recunoscut la prima vedere. astfel încît căile de rezolvare să nu poată fi găsite fără eforturi. Aceste circumstanţe apar curent, în special în problemele de geometrie sintetică, unde adesea se impune efectuarea unor construcţii auxiliare pentru a se găsi astfel de căi. Dar nu numai geometria sintetică are astfel de exigenţe. Chiar şi în probleme de algebră lansarea fără un discernămînt prealabil pe liniile directoare ale unui calcul poate conduce la închiderea orizontului după numeroase operaţii fără efect.

Culegerile de probleme pot şi ar trebui să fie depozitarele expozitive ale metodologiilor celor mai instructive de rezolvare, cultivînd sistematic raţionamentul logic deductiv, bazele sigure de plecare în exploatarea drumului de la enunţ la soluţie.

De aceea, problemele comentate constituie o formă de angajare a redactorului soluţiilor ca ghid spiritual al cititorului pe acest drum şi, în acelaşi timp, ca autor al unor sugestii de extindere şi conexiune a enunţurilor la alte probleme inedite sau cunoscute într-un alt sector.

Aceasta este orientarea pe care culegerile editate de Societatea de Ştiinţe Matematice din R.S. România o urmăresc într-o măsură hotărîtă, cu scopul de a aduce un sprijin efectiv şi sistematic celor care vor să profite efectiv de eforturile pe care le fac prin rezolvarea de probleme.

Rubrica *Probleme comentate*, introdusă în *Gazeta Matematică*, partea metodologică, ce se adresează în special profesorilor, are ca obiectiv să atragă atenţia asupra avantajelor pe care le aduce punerea în evidenţă a metodologiilor de rezolvare. Cultivarea acestora în clasă, în cercuri, este menită să dea elevilor chei potrivite pentru deschiderea uşilor care duc la rezolvarea problemelor. Dar marele avantaj constă în adîncirea înţelegerii procesului de rezolvare a problemelor care, în mare, este folositor în rezolvarea oricărei situaţii, care ridică probleme de orice natură. Astfel, se realizează şi o educaţie a minţii elevilor care îi înarmează cu mijloace, bine studiate şi experimentate, de rezolvare a problemelor de concursuri de treaptă, admitere în învăţămîntul superior sau olimpiade.

III. Exemplu de problemă comentată

Pentru a ilustra aceste consideraţii vom da un exemplu de tratare metodologică a unei probleme. În *Proiectul britanic de matematică* (*School Mathematics Project Book T*, editat de Cambridge University Press în 1969) se găseşte la capitolul „Mulţimi", p. 27, exerciţiul 10 următor :

„*Un băiat distribuitor de jurnale aduce 27 exemplare din jurnalul « Daily Telegraph » şi 22 exemplare din « Daily Express » într-o stradă cu 40 case.*

Care este (*a*) *cel mai mic număr de case,* (*b*) *cel mai mare număr de case în care s-ar putea distribui ambele jurnale? Se menţionează că nici o casă nu primeşte mai mult de două jurnale.*

Soluţia, schiţată sumar, fără nici o altă explicaţie, prin diagrame VENN, arată că cel mai mic număr în care se distribuie ambele jurnale este 9, pe cînd D.T. singur revine la 18 case şi D.E., singur, la 13. Cel mai mare număr de case, care pot primi ambele jurnale, este 22, pe cînd D.T. mai poate fi distribuit singur în 5 case.

Analiza enunţului acestei probleme ne-a condus la concluzia că formularea sa nu este deosebit de clară, prin alăturarea cerinţei minimale de cea maximală. Apoi, lipsa oricărei explicaţii a raţionamentului întrebuinţat nu poate fi un sprijin pentru rezolvitor. Într-adevăr, introducerea condiţiilor de minime sau maxime într-o diagramă VENN necesită anumite analize de situaţie care nu sînt tipice şi care cer, deci, stăpînirea unui gen de raţionament de *modelare matematică*. De aceea, în Culegere, această problemă apare în formularea următoare :

Poştaşul aduce într-un bloc cu 64 apartamente, 43 scrisori şi 37 jurnale, cel mult cîte o scrisoare şi un jurnal pentru un apartament.

1) *Care este cel mai mic număr de apartamente în care ar fi putut aduce cîte o scrisoare şi un jurnal?*

2) *Care este cel mai mare număr de apartamente în care ar fi putut aduce atît o scrisoare cît şi un jurnal?*

Examinarea soluţiei date de noi (v. problema C. 1) în lumina consideraţiilor schiţate mai înainte, pune în evidenţă cîteva puncte ale strategiei de rezolvare, care sînt menţionate în comentariile făcute. De asemenea, în comentarii se atrage atenţia asupra necesităţii de a se analiza datele problemei. Dar orientări şi preveniri se găsesc chiar şi în formularea soluţiei, pentru a se conduce raţionamentul în beneficiul cititorului, care vrea să se instruiască nu numai sumar, ci în profunzime.

Metodologia generală de rezolvare a unei probleme poate fi schițată prin următoarele etape, care nu sînt exhaustive, dar ni se par indispensabile:

1) Analiza enunțului și eventuala raportare a acestuia, total sau parțial, la un alt enunț cunoscut și studiat anterior (chiar și la mai multe astfel de enunțuri).

2) Încercarea de a elabora o strategie de rezolvare, eventual a mai multor căi de atac.

3) Alegerea uneia și folosirea acesteia pînă la obținerea rezultatului dorit, punînd în mod deliberat marcaje în punctele de cotitură sau de posibilă ramificație.

4) În caz de închidere a drumului într-un punct, analiza situației și a barierelor care rezistă în vederea adoptării unor noi strategii, începînd din acel punct critic.

5) În caz că drumul direct nu conduce la soluție, refacerea drumului invers pînă la joncțiunea cu cel inițial și analiza racordării realizate.

6) În cazul în care inițial se întrevedeau și alte trasee, angajarea pe unal doilea și compararea cu primul pentru evaluarea caracteristicilor unei a doua soluții.

7) În cazul în care primul traseu s-a închis undeva, fără putință de a fi continuat, consultarea unor prieteni în vederea analizei în comun a obstacolelor și a obținerii unor eventuale sugestii.

8) Problema, odată rezolvată pe una sau mai multe căi, nu trebuie considerată închisă, dacă a fost efectiv o problemă de conținut. Ea trebuie realizată și parcursă ca un peisaj, care poate ascunde în planurile secundare sau terțiare colțuri atractive, frumoase și instructive.

9) Din această analiză poate rezulta ideea unei generalizări sau extinderi prin diverse consecințe stimulate de admirarea peisajului după rezolvarea problemei.

10) Observațiile de fond, de formă, de strategie, de tehnici și metode, dacă pot pune în evidență caracteristici specifice problemei tratate, trebuie împărtășite eventualilor cititori pentru a-i îndruma în înțelegerea cît mai profundă a problemei tratate și în viitoarele lor încercări de rezolvare a unor alte probleme. Aceste observații constituie *comentarii finale* ale rezolvitorului (sau ale autorului problemei), *însă comentarii se pot face și de-a lungul rezolvării*, acolo unde apar puncte importante pe parcurs și unde rezolvitorul se oprește pentru a privi traseul înainte și înapoi și chiar în jurul său.

Pentru ilustrarea acestor considerații vom da un al doilea exemplu de problemă comentată pe baza celor 10 puncte metodologice. Alegerea exemplelor din literatura matematică străină are ca scop de a aduce la cunoștința cititorilor atît unele probleme concepute în cadrul unor școli străine de matematică și publicate în reviste de specialitate cu soluții concepute și parcurse de rezolvitori sau autori, cît și unele metodologii de rezolvare care se desprind din parcurgerea mai mult sau mai puțin ușoară a soluțiilor sau a a schițelor de soluții ale acestor probleme.

În Culegerea „Probleme din Gazeta Matematică — ediție selectivă și metodologică", publicată în Editura Tehnică, în anul 1984, la p. 532 se găsește problema SC. 42 cu următorul enunț.

Fie ABCD *un patrulater convex. Dacă notăm prin* M *și* N *mijloacele diagonalelor, are loc relația :*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2;$$

în alți termeni, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor plus de patru ori pătratul distanței dintre mijloacele celor două diagonale.

Nu vom repeta aici soluția, care poate fi reluată din culegerea menționată. Vom sublinia doar că am urmat punctul 3) cu succes pînă la obținerea rezultatului sub o formă simplă. Am fost scutiți de punctele 4), 5), 6), 7) și ne-am găsit în fața punctului 8). Într-adevăr, problema nu a era închisă. Reluîndu-o sub aspectele ei globale, ne-am întrebat unde am folosit convexitatea și caracterul plan al patrulaterului și am constatat că nicăieri. Privind în spațiul tridimensional configurația studiată, aceasta apare ca un tetraedru, ceea ce ne-a oferit, fără nici o altă demonstrație, teorema următoare :

În tetraedrul DABC *format cu 4 puncte necoplanare, suma pătratelor lungimilor laturilor conturului poligonal închis* DABCD, *este egală cu suma pătratelor lungimilor muchiilor rămase,* AC *și* BD, *plus de 4 ori pătratul lungimii segmentului* MN *care unește mijloacele* M *și* N *ale acestor două muchii.*

Astfel, am folosit și punctul 9) obținînd o generalizare nebanală și poate chiar neașteptată, avînd în vedere caracterul metric al relației demonstrate. Dar pe această linie s-a putut merge și mai departe, demonstrația noastră aplicîndu-se, mai general, următorarei configurații :

Se dau 4 puncte A, B, C, D *în spațiu. Acestea pot fi unite sub forma unui patrulater în trei moduri, dacă nu ținem seama de sensul de parcurs* (ABCD, ACBD, ADBC). Să se demonstreze că : *suma pătratelor lungimilor laturilor fiecăruia dintre aceste patrulatere este egală cu suma pătratelor lungimilor celor două segmente obținute unind cele două puncte care nu au fost unite direct prin conturul poligonal, plus de patru ori pătratul lungimii segmentului, care unește mijloacele acestor două segmente.*

Cele trei segmente mediatoare sînt concurente într-un punct, care este mijlocul lor comun.

Într-adevăr, prin aceste construcții se formează un tetraedru *ABCD*, în care proprietatea metrică s-a dovedit că este valabilă, oricum am uni vîrfurile pentru a face un contur poligonal închis. În plus, constatăm că am introdus în joc și mediatoarele laturilor opuse, care, după cum se știe, sînt concurente.

Trecînd acum la punctul 10) privitor la comentariile asociate problemei, constatăm că în cursul rezolvării am făcut citeva care ne-au condus la generalizare și la extensiunile precedente.

În cadrul comentariilor finale vom mai adăuga alte conexiuni ale problemei și anume :

— Problema este generalizarea teoremei lui Apollonius relativă la paralelogram, care se obține cînd M și N se confundă.

— Este ușor de văzut că această condiție este și suficientă ca întreaga configurație să se reducă la un paralelogram.

— Celelalte două mediatoare ale laturilor opuse trec atunci prin centrul $M = N$ al paralelogramului.

— Generalizarea teoremei lui APOLLONIUS a fost obținută prima dată de EULER, iar cei doi autori au regăsit proprietatea în cazul patrulaterului convex, probabil fără a cunoaște existența unei demonstrații anterioare.

— O generalizare mult mai largă la cazul unei configurații de $2m$ puncte într-un spațiu n-dimensional formează obiectul unui articol intitulat „O generalizare a teoremei lui APOLLONIUS" publicat în *Mathematical Gazette*, vol. 65, nr. 43/1981, sub semnătura lui A. J. DOUGLAS.

V. Concluzii metodologice

În cele de mai sus am pledat pentru dezvoltarea deliberată a unor metodologii de rezolvare de probleme. Nu este just să considerăm că o problemă se pune și trebuie să-și găsească rezolvitori, independent de pregătirea metodologică a acestora. Desigur, revistele de matematică propun probleme și provoacă pe cititori să le rezolve, lansînd competiții de la care se așteaptă rezultate cît mai remarcabile. Publicarea soluțiilor se face, fie sumar, fie admirativ pentru calitatea enunțului și a rezolvării, ca într-o competiție. Nu este obligatoriu pentru o revistă să ceară prezentări metodologice, deși nu ar însemna deloc o diminuare a nivelului revistei. Totuși acolo unde probleme de conținut, ca cele pe care le-am prezentat în acest articol, își găsesc rezolvarea într-o revistă, ar fi un cîștig pentru toți cititorii și chiar pentru învățămîntul și cercetarea de matematică, publicarea de soluții elegante și profunde, cu comentarii finale sugestive.

Cît privește culegerile de probleme, care trebuie să aibă caracter didactic, la orice nivel ar fi redactate și oricui ar fi adresate, prezentarea metodologică a soluțiilor ni se pare o obligație ca și cea de a redacta manuale clare și atrăgătoare. Prezentările rapide și criptice de explicații nu sînt aducătoare nici de glorie, nici de suplemente de prestigiu pentru autori, ci pot îndepărta pe unii dintre cei care, admirînd problema și pe autor, ar voi să-i aprofundeze și să-i fructifice conținutul. De aceea, *Gazeta Matematică* pune mult preț pe rubrica problemelor comentate pentru a aduce o contribuție utilă la perfecționarea capacității de rezolvare și la dezvoltarea creativității celor care iubesc matematica și vor s-o fructifice prin contribuția lor.

VI. Prezentarea capitolului de probleme comentate

În culegerea de față, prezentarea problemelor urmează într-o largă măsură cele 10 puncte metodologice, chiar și atunci cînd nu sînt afirmate vizibil. Într-adevăr, alegerea problemelor s-a făcut cu scopul de a sugera și exemplifica metodologii de rezolvare, completate prin observații și comentarii. Grija de a imprima un caracter metodologic culegerii ne-a îndemnat, pe baza experienței făcute prin culegerea *Probleme din Gazeta Matematică — ediție selectivă și metodologică*, publicată în Editura Tehnică în 1984, să selectăm în două capitole probleme din reviste, manuale și alte publicații străine cu un dublu scop :

— *de a îmbogăți patrimoniul general de probleme de care dispunem în țara noastră cu probleme deosebite de cele pe care le întîlnim în culegerile și revistele noastre* :

— *de a prezenta aceste probleme cu rezolvări dezvoltate metodologic și de a completa aceste rezolvări prin comentarii finale.*

Deși ne adresăm, în general, începătorilor, este necesar să le îndrumăm pașii fără ostentație și fără a le șoca posibilitățile de înțelegere. Nu este deloc pedagogic să repetăm prea mult probleme cu conținuturi apropiate, deși fixarea unor metode și tehnici impune repetări cu mici variații pe aceeași temă. Considerăm însă că aducerea în aria lor de cuprindere a unor probleme care nu seamănă cu cele din manualele și culegerile de care dispun, trezește în începători curiozitatea noului și le deschide gustul de a-l cuprinde.

În capitolul de față se prezintă probleme elementare de *teoria mulțimilor și de aritmetică* culese și prelucrate din cîteva reviste și manuale străine, completate cu unele semnate de noi și obținute, în general, din studiul unor probleme din aceste surse. Le-am semnat atunci cînd cadrul acestora a fost mult lărgit de noi și cînd soluția concepută de noi, fie că era diferită de cea a problemei extinse, fie că era o extensiune semnificativă a acesteia, inclusiv introducerea unor suplimente de rigoare.

În grupul problemelor de teoria mulțimilor am ales numai probleme de modelare matematică a unor situații și cerințe din viața de toate zilele, avînd grija de a evita probleme artificiale, concepute ad-hoc prin porniri de la soluții și construind enunțurile la capătul inițial în loc de a construi soluțiile la capătul final.

Problema **C.1** cu poștașul se petrece destul de des în viața de toate zilele. Tot atît de obișnuită este și problema **C.2** în care apar situații curente în cluburile sportive. Ambele se rezolvă prin aplicarea judicioasă a diagramelor VENN-EULER, aplicare care nu este automată și implică o analiză atentă a enunțurilor. Astfel, în prima problemă este esențială condiția ca fiecare apartament să primească cel mult o scrisoare și un jurnal, iar în a doua, condiția *numai* înseamnă disjuncție. În comentariile noastre arătăm că dacă nu se modelează corect această condiție, obținem o diagramă VENN-EULER greșită.

O altă problemă care cere atenție este **C.4** în care apar elevi care studiază diverse limbi și se cere din relațiile între grupurile respective să se determine cel al celor ce învață *numai* franceza. Enunțul acesteia este discursiv și, ca atare, produce dificultăți de modelare matematică, necesitînd tehnici mai speciale de estimare a cardinalelor.

Semnalăm ca interesantă, prin caracterul său de problemă de identificare, problema **C.5** în care cineva trebuie să recunoască pe altcineva, după unele semnalmente.

Pornind de la constatarea că recunoașterea s-a realizat prin unicitatea persoanei cu trei semnalmente, se cere estimarea mai multor categorii care îndeplineau numai unul sau două dintre aceste semnalmente.

Enunțul problemei este discursiv și ascunde indicatorii necesari acestor estimări în formulări complexe, de unde dificultăți și șansa de a greși.

Problema **C.7**, inspirată din humorul lui LEWIS CARROLL, are caracter paradoxal, cerînd o concluzie din trei afirmații care privesc rățoii doamnei BOND. Și totuși, această concluzie există, fiind modelată prin relațiile de incluziune și disjuncție.

Astfel, problemele comentate de elemente de teoria mulțimilor arată că, folosind exclusiv noțiunile de bază și reprezentarea VENN-EULER a relațiilor între mulțimi și părți de mulțimi, se pot rezolva probleme care, la prima vedere, par enigmatice sau glumețe.

Trecînd la aritmetică, aceeași linie de folosire exclusivă a noțiunilor de bază conduce rapid la probleme atractive legate de viața cotidiană sau de structura mulțimii numerelor naturale. Problema **C.8** pune o întrebare care se integrează în matematică prin operația de numărare, deci nu solicită nici o cunoștință superioară. Și totuși dă loc la comentarii interdisciplinare, implicînd filologia și lingvistica. Aceleași observații se referă la problema **C.9**, care urmează, punînd în discuție citirea și pronunțarea numerelor de telefon. Astfel, atenția noastră este atrasă de situații asupra cărora nu avem nicicînd intenția de a le aprofunda. Întrebarea finală asupra avantajelor și dezavantajelor adoptării limbajului telefonic în aritmetică este susceptibilă de a provoca opinii contradictorii.

Numerele prime au atras întotdeauna atenția și se disting prin proprietăți remarcabile, fiind, în același timp, factorii în care se descompun numerele neprime. Problema **C.10** pare ciudată la prima vedere, punînd în joc o expresie care generează numai numere prime pentru $n = 1, 2, \ldots, 40$, apoi deodată pentru $n=41$ generează numărul neprim 41^2. La întrebarea dacă mai generează numere neprime și pentru alte valori ale lui n, răspunsul este pozitiv și oferă o infinitate de astfel de numere, fără a avea pretenția de a le epuiza pe toate. Astfel, se ajunge la o problemă deschisă, dar pentru care s-au dat orientări care au fost rodnice.

O atenție deosebită s-a arătat operațiilor în diverse baze de numerație. Rațiunea acestei insistențe stă în faptul că istoria matematicii, ca și practica socio-economică au pus în lumină numere scrise în mai multe baze de numerație. Baza 2 este în prezent folosită pe o scară extrem de largă în tehnicile electronicii de calcul; problema **C.13** oferă exemple de calcule aritmetice în această bază, dînd și algoritme care trebuie exersate și puse în comparație cu cele în baza 10. Problema **C.14** privește o situație care poate apărea, farmacistul avînd nevoie să stăpînească bine operațiile în binar. În comentarii se adîncește punctul 3) al enunțului, arătînd că orice număr natural poate fi scris în baza 2.

Instructivă este și problema **C.15** în care se cere efectuarea de înmulțiri în scrierea romană, fără a se trece în cea indo-arabă. Următoarele probleme se referă la table și algoritmi ale operațiilor aritmetice de bază în diverse sisteme de numerație, introducîndu-se simboluri cifrice speciale, cînd baza depășește pe 10. Sînt de remarcat regulile mnemotehnice care se desprind în fiecare caz în analogie cu operațiile în baza 10.

Problemele **C.19** și **C.21** atrag atenția asupra sistemului octal, a doua avînd o înfățișare glumeață prin raportarea operațiilor făcute pe degete la operații similare făcute de păianjeni pe cele 8 picioare de care dispun. Tot în octal se operează în problema **C.24** care modelează înregistrările pe contoarele electronice, iar problema **C.23** imaginează semnale trimise de pe Venus printr-o relație codificată ce se cere decodificată prin determinarea bazei în care a fost scrisă.

Subliniem încă o dată frecvența mare a problemelor de modelare matematică în manualele și revistele străine, în special anglo-saxone și germane.

Capitolul de probleme comentate de teoria elementară a mulțimilor și aritmetică are ca scop de a atrage atenția elevilor și profesorilor, tuturor cititorilor asupra acestui gen de probleme care nu este suficient de cultiviat la noi.

Probleme, soluții și comentarii.

C.1. *Poștașul aduce într-un bloc cu 64 apartamente, 43 de scrisori și 37 de jurnale, cel mult cîte o scrisoare și un jurnal pentru un apartament.*

1) *Care este cel mai mic număr de apartamente în care ar fi putut aduce cîte o scrisoare și un jurnal?*

2) *Care este cel mai mare număr de apartamente în care ar fi putut aduce atît o scrisoare cît și un jurnal?*

S.M.P. Book T., p. 27/1969

Soluție: Folosirea judicioasă a diagramelor VENN-EULER conduce la soluție în ambele cazuri.

1) Fie A mulțimea apartamentelor în care se distribuie cîte o scrisoare și B mulțimea apartamentelor în care se distribuie cîte un jurnal. Condiția ca într-un apartament să nu ajungă decît cel mult cîte un jurnal și o scrisoare este esențială. Într-adevăr, în total se vor distribui $43 + 37 = 80$ jurnale și scrisori. Dacă într-un apartament nu s-ar distribui nici o scrisoare și nici un jurnal, numărul apartamentelor care ar primi și scrisoare și jurnal ar crește. Prin urmare, pentru a avea minimul de apartamente cu scrisoare și jurnal este necesar ca toate apartamentele să primească cel puțin o scrisoare sau un jurnal.

Prin urmare, card $(A \cup B) = 64$.

Aplicînd diagrama VENN-EULER, vom avea:

$$\text{card } A = 43, \text{ card } B = 36$$

și:

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B) \qquad (1)$$

de unde:

$$\text{card } (A \cap B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cup B) = 43 + 37 - 64 = 14. \qquad (2)$$

Acest număr de 14 apartamente este minimul cerut fiindcă se obține pentru max card $(A \cup B)$ care se scade în (2).

2) Se cere numărul maxim de apartamente care primesc scrisoare și jurnal, deci max card $(A \cap B)$. În formula (2) singurul termen variabil

este card ($A \cup B$). Acesta este minim cînd una dintre mulţimi este inclusă în cealaltă. În cazul de faţă, $B \subset A$, fiindcă $43 > 37$.

Din formula (2), vom deduce atunci:

$$\max \text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B - \min \text{card}\,(A \cup B) =$$
$$= \text{card}\,A + \text{card}\,B - \text{card}\,A = \text{card}\,B = 37.$$

Deci numărul maxim de apartamente care pot primi atît o scrisoare cît şi un jurnal este de 37, în care caz numărul total de apartamente care primesc cel puţin un jurnal este 43.

Comentarii: În problemele de teoria mulţimilor şi, în special, în cele de aplicaţii ale acestei teorii este esenţial să se analizeze datele, în particular submulţimile de elemente care trebuie puse în relaţii. Dacă în această problemă nu se introducea condiţia ca fiecare apartament să primească cel mult o scrisoare sau un jurnal, nu am fi putut cunoaşte la punctul (1) mulţimea de bază $A \cup B$, fiindcă aceasta ar fi putut fi numai o parte a celor 63 apartamente, ceea ce s-a întîmplat la punctul (2) cînd ea s-a redus la A care includea pe B.

Diagramele VENN-EEULER sînt deosebit de utile, cu condiţia de a fi întocmite judicios, ceea ce lăsăm în sarcina cititorului ca exerciţiu de intuiţie controlată prin analiza enunţului.

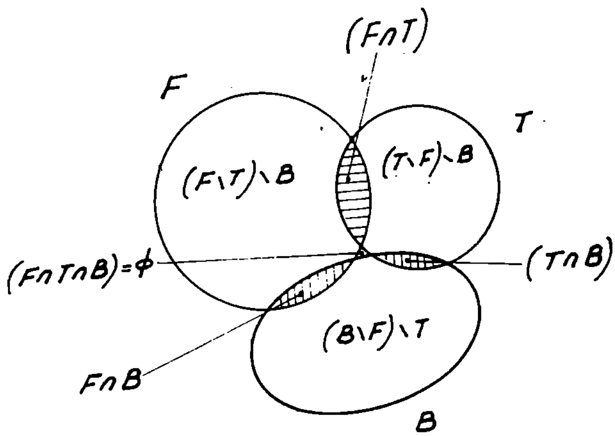
C.2. *Într-un club, din 18 sportivi, unul joacă numai fotbal, 4 joacă numai basketbal şi 7 numai tenis. Doi joacă fotbal şi basketbal, 3 joacă fotbal şi tenis, dar niciunul din cei 18 nu joacă cele 3 jocuri.*

1) *Cîţi joacă basket şi tenis?*

2) *Cîţi joacă tenis sau basket sau fotbal?*

S.M.P. Book., p. 19/1966

Soluţie: Analiza enunţului este esenţială, iar diagrama VENN-EULER, ca auxiliar, deosebit de utilă (a se vedea figura).



1) Notăm cu C mulţimea de bază, cu F, mulţimea celor care joacă fotbal, cu B, mulţimea celor care joacă basket, cu T, mulţimea celor care joacă tenis.

Aşa fiind, mulţimea celor care joacă fotbal şi basket va fi $F \cap B$ şi vom avea, de asemenea, că $F \cap T$ este mulţimea celor care joacă fotbal şi tenis. De asemenea, $B \cap T$ este mulţimea celor care joacă basket şi tenis.

Mulţimea celor care joacă *numai* fotbal va fi formată din cei ce joacă fotbal, dar *nu* joacă şi basket şi nici tenis. Ca urmare, ea va fi diferenţa $(F \setminus T) \setminus B$. În mod analog vom avea şi diferenţele $(T \setminus F) \setminus B$ şi $(B \setminus F) \setminus T$. În aceste condiţii, mulţimea totală poate fi pusă sub forma unei reuniuni de mulţimi disjuncte (a se vedea şi figura) a mulţimilor :

$(F \setminus T) \setminus B$ cu card $(F \setminus T) \setminus B = 1$, card $(F \cap T) = 3$;

$(T \setminus F) \setminus B$ cu card $(T \setminus F) \setminus B = 7$, card $(F \cap B) = 2$;

$(B \setminus F) \setminus T$ cu card $(B \setminus F) \setminus T = 4$, card $(F \cap B \cap T) = 0$.

Avem :

$$F \cup B \cup T = C, \text{ card } C = 18 ; \ F \cap B \cap T = \emptyset.$$

De aceea vom putea scrie :

card $(F \cup B \cup T) =$ card $[(F \setminus T) \setminus B] +$ card $[(T \setminus F) \setminus B] +$
$+$ card $[(B \setminus F) \setminus T] +$ card $(F \cap T) +$ card $(F \cap B) +$ card $(B \cap T)$,

de unde:

$$18 = 1 + 7 + 4 + 3 + 2 + \text{card} (B \cap T)$$

şi deci card $(B \cap T) = 1$.

Numărul celor care joacă basket şi tenis este, deci, 1.

2) Mulţimea jucătorilor de tenis se compune din reuninea de mulţimi disjuncte :

$$T = [(T \setminus F) \setminus B] \cup (F \cap T) \cup (T \cap B)$$

şi deci :

card $T =$ card $[(T \setminus F) \setminus B] +$ card $(F \cap T) +$ card $(T \cap B)$,

$$\text{card } T = 7 + 3 + 1 = 11.$$

Numărul jucătorilor de tenis este, deci, 11.

În mod analog :

card $F =$ card $[(F \setminus T) \setminus B] +$ card $(F \cap T) +$ card $(F \cap B) =$
$= 1 + 3 + 2 = 6$,

card $B =$ card $[(B \setminus F) \setminus T] +$ card $(B \cap F) +$ card $(B \cap T) =$
$= 4 + 2 + 1 = 7$.

Ca verificare :

card $(F \cup B \cup T) =$ card $F +$ card $B +$ card $T -$ card $(F \cap B) -$
$-$ card $(F \cap T) -$ card $(B \cap T) +$ card $(F \cap B \cap T) =$

$$= 6 + 7 + 11 - 2 - 3 - 1 = 18.$$

Comentarii. Problema este deosebit de instructivă fiindcă obligă la o analiză bine gîndită a datelor, coroborată cu citirea şi interpretarea corectă a diagramei VENN-EULER.

Într-adevăr, cînd se impune condiţia „*numai*" într-o caracterizare a părţilor unei mulţimi, aceasta înseamnă excluderea părţilor submulţimii astfel delimitate care ar putea fi comune cu alte părţi ale mulţimii de bază. Apare atunci necesitatea folosirii noţiunii de diferenţă a două mulțimi, care poate fi iterată, conform cu condiția *numai*. Posibilitatea de a greși apare dacă nu se modelează corect condiția *numai*. Astfel, sîntem tentați să aplicăm de la început diagrama VENN-EULER în mod greșit astfel :

$$\text{card}\,(F \cup B \cup T) = \text{card}\,F + \text{card}\,B + \text{card}\,T - \text{card}\,(F \cap B) -$$
$$- \text{card}\,(F \cap T) - \text{card}\,(B \cap T) + \text{card}\,(F \cap B \cap T).$$

sau :

$$18 = 1 + 4 + 7 - 2 - 3 - \text{card}\,(B \cap T) + 0 = 7 - \text{card}\,(B \cap T).$$

ceea ce este evident fals căci rezultă $\text{card}\,(B \cap T) = -11$.

C.3. *Într-o clasă de 30 elevi, 19 sînt jucători de tenis și 16 de handbal.*

1) *Să se reprezinte pe o diagramă* VENN-EULER *mulțimile* T *a jucătorilor de tenis din clasă,* H *a jucătorilor de handbal din clasă și mulțimea celor care joacă ambele jocuri.*

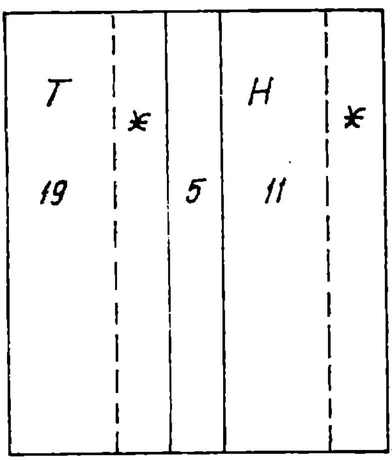
2) *Dacă orice elev din acea clasă joacă sau tenis sau handbal, să se determine numărul celor ce joacă ambele jocuri.*

S.M.P. Book T., p. 27/1969

Soluție : 1) Luînd ca bază mulțimea C a elevilor clasei, vom avea : $T \subset C$ și $H \subset C$ și, întrucît nu știm dacă există sau nu în clasă elevi care nu joacă nici senis, nici handbal, tot ce putem afirma în scriere simbolică este :

$$T \cup H \subset C,\ \max\,(T \cup H) = C,\ \text{card}\,T = 19,$$
$$\text{card}\,H = 16,\quad \text{card}\,(T \cup H) \leqslant 30. \qquad (1)$$

Aplicînd diagrama VENN-EULER, vom putea scrie :



$$\text{card}\,(T \cup H) = \text{card}\,T + \text{card}\,H -$$
$$- \text{card}\,(T \cap H),$$
$$\text{card}\,(T \cap H) = \text{card}\,T + \text{card}\,H -$$
$$- \text{card}\,(T \cup H) \geqslant 19 + 16 - 30 = 5.$$

Prin urmare, cel puțin 5 elevi joacă ambele jocuri. Dacă notăm cu x numărul elevilor care joacă tenis, handbal, în afară de cei cinci vom avea a) se vedea figura) :

$$\text{card}\,(T \cap H) = 5 + x \qquad (2)$$

cu $0 \leqslant x \leqslant 11$, fiindcă :

$$\max\,\text{card}\,(T \cap H) = \text{card}\,H = 16,$$

atunci cînd $T \subset H$.

2) În cazul cînd orice elev din clasă joacă tenis sau handbal, $T \cup H = C$ și, conform cu (1), $\text{card}\,(T \cup H) = 30$.

Cum $x = 0$, vom avea, din (2), $\text{card}\,(T \cap H) = 5$ care este $\min\,\text{card}\,(T \cap H)$.

În consecință, 5 elevi sînt jucători de tenis și handbal și acest număr este minimul numărului p de jucători ai ambelor jocuri din clasă, maximul fiind 16 cînd toți jucătorii de tenis sînt și jucători de handbal.

Comentarii: Problema este instructivă fiindcă lasă loc formulării de ipoteze asupra participării elevilor clasei la cele două jocuri și evaluării unor circumstanțe de maxim și minim. Unicitatea este asigurată cînd se introduce o condiție suplimentară care fixează cardinalul mulțimii de bază.

Avem, deci, un exemplu de diagramă VENN-EULER, cu mulțimea de bază C, variabilă între două limite determinate de relațiile dintre cele două părți T și H.

C.4. *Într-o școală cu 650 elevi, fiecare studiază franceza* (F), *germana* (G) *sau spaniola* (S). *Toți, în afară de 41, studiază franceza* (F); *12 studiază* F *și* S, *dar nu și* G; *13 studiază* S *și* G *dar nu și* F *și același număr studiază numai* G. *De două ori atîția studiază* F *și* G, *dar nu și* S, *cîți studiază toate trei limbile. Numărul celor ce studiază numai* S *este același ca totalul celor ce studiază amîndouă limbile* F *și* G.

Cîți elevi studiază numai F?

S.M.P. Book T., p. 19/1960

Soluție: Din examinarea condițiilor de enunț rezultă card $F = 650 - 41 = 609$. Să notăm $x = \text{card}\,(F \cap S \cap G)$, pe care nu-l putem determina prin enunț. Avem, în plus:

$$\text{card}\,((F \cap S)\setminus G) = 12;\ \text{card}\,((S \cap G)\setminus F) = 13$$

și, de asemenea:

$$\text{card}\,((G\setminus F)\setminus S) = 13;\ \text{card}\,((F \cap G)\setminus S) = 2x,$$
$$\text{card}\,((S\setminus F)\setminus G) = 3x.$$

Diagrama lui VENN-EULER are o mulțime de bază $F \cup S \cup G$ și card $(F \cup S \cup G) = 650$. Să calculăm cardinalele mulțimilor care intră în această diagramă. Vom avea:

$$\text{card}\,G = \text{card}\,((G\setminus F)\setminus S) + \text{card}\,((F \cap G)\setminus S) + \text{card}\,(F \cap G \cap S) + \text{card}\,((S \cap G)\setminus F) = 13 + 2x + x + 13 = 3x + 26,$$

$$\text{card}\,S = \text{card}\,((S\setminus F)\setminus G) + \text{card}\,((F \cap S)\setminus G) + \text{card}\,((S \cap G)\setminus F) + \text{card}\,(S \cap G \cap F) = 3x + 12 + 13 + x = 4x + 25,$$

$$\text{card}\,(F \cap G) = \text{card}\,[(F \cap G)\setminus S] + \text{card}\,[(F \cap G) \cap S] = 2x + x = 3x,$$

$$\text{card}\,(S \cap G) = \text{card}\,[(S \cap G)\setminus F] + \text{card}\,[(S \cap G) \cap F] = 13 + x,$$

$$\text{card}\,(F \cap S) = \text{card}\,[(F \cap S)\setminus G] + \text{card}\,[(F \cap G) \cap S] = 12 + x.$$

Dispunem de elementele necesare pentru a aplica diagrama VENN-EULER:

$$\text{card}\,(F \cup S \cup G) = \text{card}\,F + \text{card}\,S + \text{card}\,G - \text{card}\,(F \cap S) - \text{card}\,(F \cap G) - \text{card}\,(S \cap G) + \text{card}\,(F \cap S \cap G).$$

Înlocuind, avem:

$$650 = 609 + 4x + 25 + 3x + 26 - 12 - x - 3x - 13 - x + x,$$

sau:

$$650 = 635 + 3x,$$

de unde $15 = 3x$ sau $x = 5$.

Mulțimea celor ce studiază numai franceza va fi:

$$(F \setminus G) \setminus S = F \setminus \{[(F \cap S) \setminus G]\} \setminus (F \cap G)$$

de unde:

$$\text{card}\,[(F \setminus G) \setminus S] = \text{card}\,F - \text{card}\,[(F \cap S) \setminus G] - \text{card}\,[F \cap G] = 609 - 12 - 3x = 609 - 12 - 15 = 582.$$

Comentarii: Enunțul acestei probleme, fiind discursiv, creează dificultăți de modelare matematică. De aceea, folosirea diagramei VENN-EULER se dovedește deosebit de eficientă în evaluarea întîi a mulțimilor care intervin în enunț, apoi a cardinalelor și a celor care vor interveni în formula de aplicare a diagramei.

Obiectivele noastre fiind metodologice, semnalăm și această problemă ca aducătoare de tehnici de estimare remarcabile și utile și în alte împrejurări.

C.5. *Cineva trebuia să întîlnească într-o stație de metro o persoană pe care n-o cunoștea. Aceasta i-a dat următoareale semnalmente: poartă o șapcă, are o umbrelă și în mînă un jurnal. Aceste semnalmente au fost suficiente pentru a identifica persoana, fiindcă a fost singura persoană care a sosit cu toate trei. Dar recunoașterea n-a fost ușoară, fiindcă fiecare din cele 38 persoane, care au coborît din metro, avea cel puțin unul din aceste semnalmente. Dintre cei 17 care purtau șepci, 6 aveau în mînă un jurnal și 9 purtau umbrele, 20 aveau în mînă numai un jurnal, iar 19 purtau numai umbrele.*

1) *Cîte persoane aveau un jurnal și o umbrelă?*
2) *Cîte persoane aveau numai șapcă?*
3) *Cîte persoane purtau numai umbrelă?*
4) *Cîte persoane n-aveau decît un jurnal?*

S.M.P. Book T., p. 22/1966

Soluție: Ca în toate problemele în care se cere determinarea unor submulțimi ale unei mulțimi finite, prima grijă este analiza și modelarea corectă a datelor care sînt discursive.

1) Să notăm cu S, U, J mulțimile formate din persoanele care aveau respectiv șapcă, umbrelă sau jurnal. Din datele problemei reținem, în

primul rînd, că o singură persoană îndeplinea toate cele 3 condiții, de unde:

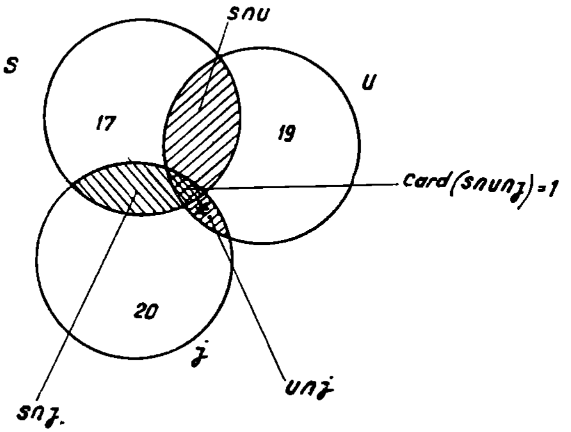
$$\text{card}\,(S \cap U \cap J) = 1$$

Vom mai avea și:

$$\text{card}\,(S \cup U \cup J) = 38,$$

deoarece fiecare din cei coborîți din metro intra în competiție cu cel puțin un semnalment. Ceea ce nu știm și ce cere la punctul 1) este card $(U \cap J)$ pe care îl vom nota cu card $(U \cap J) = x + 1$, fiindcă $U \cap J$ include intersecția $S \cap U \cap J$ de cardinal 1, rămînînd să determinăm pe x.

Vom folosi diagrama VENN-EULER din figura de mai jos și vom evalua cardinalele părților ei. Avem:



card $S = 17$, card $U = 19$, card $J = 20$,

card $(S \cap J) = 6$, card $(S \cap U) = 9$

card $(U \cap J) = x + 1$,

card $(S \cap U \cap J) = 1$

Aplicînd formula cardinalelor acestei diagrame, vom avea:

$$\text{card}\,(S \cup U \cup J) = \text{card}\,S + \text{card}\,U + \text{card}\,J - \text{card}\,(S \cap U) - \text{card}\,(S \cap J) - \text{card}\,(U \cap J) + \text{card}\,(S \cap U \cap J)$$

și, înlocuind valorile numerice:

$$38 = 17 + 19 + 20 - 9 - 6 - (x + 1) + 1 = 56 - 15 - x$$

care conduce la $x = 3$. Prin urmare, card $(J \cap U) = 3 + 1 = 4$ și numărul persoanelor cu jurnal și umbrelă era 4.

2) Numărul persoanelor care aveau numai șapcă va fi:

$$\text{card}\,(S \setminus U \setminus J) = \text{card}\,S - \text{card}\,(S \cap U) - \text{card}\,(S \cap J) + \text{card}\,(S \cap U \cap J) = 17 - 9 - 6 + 1 = 3.$$

3) Numărul celor numai cu umbrelă va fi dat de :

$$\text{card}\,(U\setminus S\setminus J) = \text{card}\,U - \text{card}\,(S \cap U) - \text{card}\,(J \cap U) + \\ + \text{card}\,(S \cap U \cap J) = 19 - 9 - 4 + 1 = 7.$$

4) Numărul celor numai cu jurnal rezultă din :

$$\text{card}\,(J\setminus U\setminus S) = \text{card}\,J - \text{card}\,(J \cap U) - \text{card}\,(J \cap S) + \\ + \text{card}\,(J \cap U \cap S) = 20 - 4 - 6 + 1 = 11.$$

Comentarii : Prezentarea problemelor de aplicații ale teoriei mulțimii are ca scop să pună în evidență prezența lor în viața de toate zilele și deci valoarea aplicativă a teoriei elementare a mulțimilor. Desigur, nu numai elementele acestei teorii au valoare aplicativă, mulțimile găsindu-se în însăși fundamentele tuturor teoriilor matematice.

Problema de față prezintă o situație care poate interveni în viața oricui și fiecare își dă silința s-o rezolve cu experiența, atenția și prezența de spirit proprie, fără să-și dea seama că este implicat într-o problemă matematică. Tocmai în această implicație stă argumentul introducerii în învățămîntul elementar a bazelor și aplicațiilor teoriei mulțimilor.

Diagramele VENN-EULER se dovedesc salutare în astfel de probleme care fără acest suport intuitiv, pot părea șarade.

C.6. *Într-un liceu de sport sînt aplicate regulile următoare tuturor elevilor* :

a) *Un elev slab la învățătură nu are dreptul de a canota;*

b) *Toți elevii care joacă hockey trebuie să aibă cîte o crosă;*

c) *Orice elev sau joacă hockey, sau canotează, sau practică ambele sporturi;*

d) *Nici un elev, care are crosă, nu are dreptul de a juca tenis.*

Ce concluzii se pot trage pentru calificarea profesională și sportivă a elevilor ?

Book T. Teachers's Guide, p. 81/1967

Soluție : Vom nota :

$M = \{$mulțimea tuturor elevilor școlii$\}$;
$K = \{$elevii care canotează$\}$;
$\Gamma = \{$elevii care au crosă$\}$;
$H = \{$elevii care joacă hockey$\}$;
$B = \{$elevii buni la învățătură$\}$;
$T = \{$elevii care joacă tenis$\}$.

Calificarea revine la a include unele categorii în altele încercînd să stabilim o ierarhizare, deci o relație de ordine. Se cunosc proprietățile de incluziune ale mulțimilor, de exemplu, dacă X și Y sînt părți ale unei mulțimi M, atunci :

$$X \subset Y \Rightarrow \complement Y \subset \complement X$$

și reciproc, deci $X \subset Y \Leftrightarrow \complement Y \subset \complement X$, complementara fiind luată în raport cu M, deci $\complement X = M\setminus X$, $\complement Y = M\setminus Y$. De asemenea, $X \cup Y = M$ implică

$\complement X \subset Y$ și $\complement Y \subset X$. Vom avea că $\complement B$ este mulțimea elevilor slabi la învățătură și $\complement K$ este mulțimea elevilor care nu canotează. Aplicînd aceste notații, din a) deducem $\complement B \subset \complement K$, de unde $K \subset B$.

Din condiția b) rezultă incluziunea $H \subset \Gamma$, din care deducem $\complement\Gamma \subset \complement H$.

Condiția c) arată că $H \cup K = M$, de unde $\complement H \subset K$. În sfîrșit, condiția d) impune $T \subset \complement\Gamma$.

Reluînd incluziunile, vom avea șirul următor :

$$T \subset \complement\Gamma \subset \complement H \subset K \subset B$$

care exprimă calificarea profesională și sportivă a elevilor astfel: *elevii care joacă tenis au dreptul de a canota și sînt buni la învățătură,* ***iar*** *cei care canotează sînt și buni la învățătură.*

Comentarii : Problema pune în evidență alte proprietăți ale mulțimilor care au aplicații în viața socială : relația de incluziune a părților și existența complementarelor acestora în raport cu mulțimea de bază. Astfel, constatăm că anumite reguli de comportare și de acordare de drepturi se modelează prin incluziuni și acestea conduc la concluzii privind calificarea unor categorii într-o colectivitate socială.

C.7. *Ce concluzie se poate trage din afirmațiile următoare?*

a) *Toți rățoii marcați cu* B *sînt ai doamnei* BOND ;

b) *Rățoii nu au niciodată guler pe gît, decît dacă sînt marcați cu* **B** ;

c) *Doamna* BOND *nu are rățoi cenușii.*

(LEWIS CARROLL), Book T. Teacher's Guide, p. 80/1967

Soluție : Să notăm cu M mulțimea tuturor rățoilor existenți la un moment dat, $B = \{$rățoii marcați cu $B\}$, $G = \{$rățoii cu guler$\}$ și $C = \{$rățoii cenușii$\}$.

În limbajul teoriei mulțimilor, vom putea identifica mulțimea B, ținînd seama de condiția a), cu mulțimea rățoilor aparținînd doamnei BOND.

Condiția b) se poate scrie $\complement B \subset \complement G$ fiindcă cei care nu sînt în B nu au în mod sigur guler, dar și în B pot exista rățoi fără guler. Deducem $G \subset B$, deci mulțimea celor cu guler este inclusă în cea a celor marcați cu B.

Dar din condiția c) deducem $B \cap C = \emptyset$, deci B și C sînt disjuncte. În consecință, $G \cap C = \emptyset$, deci G și C sînt disjuncte și astfel concluzia este : „*nici un rățoi cenușiu nu are guler*".

Comentarii : Problema pare a fi un nonsens, privită prin prisma limbajului curent. Ce concluzie se poate trage din faptul că doamna BOND nu are rățoi cenușii și rățoii nu poartă guler decît dacă sînt marcați cu B ; deci dacă sînt ai acestei doamne?

Totuși, analizînd mai bine avertismentul că doamna BOND nu are rățoi cenușii și că rățoii care au guler sînt dintre rățoii acesteia, rezultă că rățoii cenușii nu pot avea guler.

Această analiză verbală este modelată prin relația de incluziune pe de o parte și prin cea de disjuncție pe de altă parte.

Problema pune o glumă paradoxală a autorului cărții *Alice în țara minunilor*, dar constituie un exemplu frapant de analiză logică a unor propoziții paradoxale.

C.8. *Fiind dat șirul numerelor 1, 2, ..., 99 să se determine:*

1) *Cîte cuvinte diferite întrebuințăm pentru a le pronunța în limba română, dar în limba engleză, respectiv în franceză?*

2) *Cîte numerale diferite întrebuințăm pentru a le scrie?*

Exemple: 83 = optzeci și trei, iar 77 se scrie cu același numeral 7 de două ori, numeralele fiind 0, 1, 2, ..., 9.

Acad. N. Teodorescu

Soluție: 1) De la 1 la 10 folosim 10 cuvinte diferite. Urmează 11 = unu-spre-zece, ..., 19 = nouă-spre-zece, care introduc adverbul „spre", apoi 21 introduce, pe lîngă douăzeci, unu, și cuvîntul „și". În continuare, avem zecile care nu mai introduc termeni noi (douăzeci, treizeci, patruzeci etc.) și deci în totalul 10 + 1 + 1 = 12 cuvinte în limba română.

În engleză nu se folosește nici o conjuncție, deci 20 cuvinte pînă la 20 (one, two, ..., ten, eleven, ..., twenty), apoi zecile (thirthy, forthy,..., ..., ninety), cele intermediare ca 22 = twenty-two etc. ..., ninety-nine, formate din cîte două cuvinte, nu mai introduc termeni noi; în total sînt 27 cuvinte.

În franceză, pînă la 16 avem 16 cuvinte diferite (un, deux, ..., dix, onze, ..., seize), apoi 17 = dix-sept, 18 = dix-huit, 19 = dix-neuf, ..., nu mai introduc nici un cuvînt nou. Urmează zecile (vingt, trente,..., soixante), în total 5, și 70 = soixante-dix, 80 = quatre vingt, 90 = quatre vingt dix, care nu mai introduc cuvinte noi. În schimb, 21 = vingt-et-un, 31 = trente-et-un etc., introduc conjuncția „et" pe cînd 33 = trente trois etc., ca și 72 = soixante-douze, 85 = quatre-vingt-cinq sau 94 = = quatre-vingt-quatorze nu mai introduc termeni noi. Avem în total 16 + 5 + 1 = 22, cuvinte diferite.

2) În sistemul indo-arab pe care îl întrebuințăm, scrierea întregului șir se face numai cu numeralele 1 = unu, 2 = doi, ..., 9 = nouă și 0 = zero, în total 10.

Comentarii: Limbajele vorbite, ca și cele scrise, joacă roluri esențiale în pronunțarea lingvistică și reprezentarea grafică a numerelor naturale. Compararea numărului termenilor, a compunerii acestora și a semnelor grafice folosite în diverse limbi pun în evidență aspecte diferite depinzînd de structurile limbilor, ca și de modul în care au fost structurate numerele naturale înseși. În limba română, pronunțarea folosește numai 12 cuvinte, pe cînd în franceză sînt necesare 22, iar în engleză, 27.

Ca structură lingvistică, limba română oferă deci o compunere mai simplă și mai sistematică decît a celorlalte două menționate. Chiar și structura particulară a numerelor este mai simplă și mai corespunzătoare scrierii poziționale, fiindcă nu folosește decît unitățile de diverse ordine plus o conjuncție și un adverb.

În limba franceză sînt 16 cuvinte diferite pentru primele numerale, apoi alte 5 pentru primele zeci şi o singură conjuncţie. Dar structura numerelor este mai primitivă, compunînd pe $70 = 60 + 10$ (soixante dix), $80 = 4 \times 20$ şi $90 = 80 + 10 = 4 \times 20 + 10$. Numărul total de termeni este 22, deci mai mare decît în limba română dar mai mic decît în limba engleză.

În schimb, această ultimă structură a numerelor este mai simplă, fiindcă după cele 19 cuvinte diferite pentru numerele 1—19, mai apar zecile 20—90, celelalte intermediare formîndu-se prin juxtapunere : 21 = twenty one, ..., 77 = seventy seven. În acelaşi timp, este strict respectată scrierea poziţională, fiindcă în pronunţare unităţile de primul ordin sînt pronunţate după zeci.

În limba română este la fel, cu excepţia numerelor dintre 11 şi 19, unde unităţile se pronunţă înaintea lui zece.

Este interesant de comparat şi cu citirea aceloraşi numere în limba germană, unde, de asemenea, unităţile de primul ordin se pun totdeauna înaintea zecilor : 13 = dreizehn, ..., 19 = neunzehn, 21 = ein und zwanzig etc., şi de apreciat calităţile şi lipsurile fiecărui mod de citire şi pronunţare în operaţiile mintale cu numerele naturale mici pînă la 100.

C.9. *Citirea şi pronunţarea numerelor de telefon se face altfel decît în aritmetica uzuală.*

1) *Care sînt modurile obişnuite şi care dintre acestea foloseşte mai puţine cuvinte diferite decît în aritmetică?*

2) *De care cuvinte ne dispensăm prin acest procedeu lingvistic?*

3) *Există motive pentru a nu-l întrebuinţa şi în alte scopuri?*

4) *Ce avantaje şi ce dezavantaje am avea adoptîndu-l în aritmetică?*

Acad. N. Teodorescu

Soluţie : 1) În limba română şi în viaţa cotidiană există două moduri obişnuite şi un al treilea mai puţin folosit de a pronunţa numerele de telefon. Pentru cele de şase cifre, ca 15.18.86, se grupează cifrele două cîte două şi se pronunţă :

a) cinsprezece, optsprezece, optzeci şi şase, sau :
b) unu-cinci, unu-opt, opt-şase.

Pentru cele cu cinci cifre, ca 43.596, gruparea se face în două grupe, prima de două cifre, cealaltă de trei cifre şi se pronunţă :
c) patruzeci şi trei, cinci sute nouăzeci şi şase, sau :
d) patru-trei, cinci-nouă-şase.

În cazul numerelor de şase cifre se mai face gruparea în analogie cu cele de cinci cifre, în două grupe de cîte trei, ca 144.653 şi se pronunţă :
a′) o sută patruzeci şi patru, şase sute cincizeci şi trei, sau :
b′) unu-patru-patru, şase-cinci-trei.

Cazul a) foloseşte tot atîtea cuvinte ca şi în aritmetică pentru numerele de la 0 la 99, deci 12 cuvinte (conform cu C. 8). Într-adevăr, pentru toate grupurile de două cifre semnificative sau zeci ca 37 sau 40, avem aceleași reguli. Excepție fac grupurile de forma 00, 01, ..., 09, dar și acestea nu introduc decît numeralele de ordinul întîi și zero.

Cazul b) nu folosește decît cuvintele corespunzătoare numeralelor de ordinul întîi, deci zero, unu, ..., nouă, în total 10 cuvinte.

Cazul c) folosește întîi toate cuvintele pentru numerele de două cifre semnificative și zeci ca 43 sau 20. În plus, va folosi cuvintele necesare pronunțării numerelor de trei cifre unde apar numeralele 1, 2, ..., 9, grupul „*o sută*" și cuvîntul „*sute*", precum și zero o dată sau repetat ca în 083, 005, 000. În consecință, avem cele 12 cuvinte pînă la 99 plus trei alte cuvinte, în total, 15 cuvinte.

Cazul d) este echivalent cu b), folosind, deci, 10 cuvinte.

Cazul a') este echivalent cu c), folosind în total 15 cuvinte.

Cazul b') este echivalent cu b) și d), cu 10 cuvinte.

Este deci clar că cele mai puține cuvinte corespund pronunțării cifrelor una cîte una, cu observația că în absolut toate cazurile trebuie introduse pauze speciale, scurte, dar efective, între grupurile sau cifrele singure pronunțate.

2) În cazurile echivalente b), b') și d) ne dispensăm de conjuncția „și" și adverbul „către", deci folosim numai numerale de ordinul întîi.

3) Întrebuințarea sistemului de scriere și pronunțare a numerelor ca la telefon este avantajoasă pentru reținerea, scrierea și pronunțarea numerelor de mai multe cifre; de exemplu: 2583197 = 2.583.197, pronunțat în mod obișnuit trebuie împărțit în grupe de cîte trei cifre, începînd de la ultimele trei, corespunzînd la sute, mii și milioane. Grupat tot așa, dar pronunțat cifră cu cifră este mai ușor de scris și reținut totuși, în cazul numerelor foarte mari, timpul folosit pentru pronunțare este mai scurt, dar în schimb posibilitățile de erori și dificultatea de a reține sînt mai mari.

4) Avantajul pronunțării cu mai puține cuvinte este evident. În scriere, aritmetica desparte numerele în sistemul zecimal în *clase* de cîte trei: clasa unităților cu unități, zeci, sute, urmate de clasa miilor, cu unități, zeci, sute, apoi a milioanelor la fel, etc.

Pronunțarea cifră cu cifră, cu pauzele respective între clase reprezintă avantaj asupra celei în care se specifică clasele, însă numai la scris în clase, dacă se respectă scrierea pozițională. Dezavantaj ar pricinui împărțirea în grupe de două cifre, fiindcă nu ar mai respecta clasele.

Comentarii: Problema este inspirată din *SMP Book* I, p. 3 și dezvoltată într-un cadru mai larg de analiză lingvistică. Scopul este adîncirea noțiunii de număr natural în contextul vieții cotidiene, unde orice membru al societății o folosește adesea fără a depăși o înțelegere superficială, de care nu este vinovat, atît timp cît nu i s-a pus problema înțelegerii pe baze științifice.

C.10. 1) *Să se demonstreze printr-un raționament general că expresia* $n^2 - n + 41$ *generează numai numere prime pentru* $n = 0, 1, \ldots, 40$;

2) *Pentru* $n = 41$, *ea ia valoarea* 41^2, *care nu mai este număr prim; mai există și alte valori ale lui* n *pentru care se obțin numere neprime?*

Acad. N. Teodorescu

Soluție : 1) Evident, se poate răspunde la prima cerință prin verificarea tuturor valorilor lui n, de la 0 la 40, dar această metodă este prea puțin matematică. De aceea, vom folosi alta, care ar putea sugera soluții și la cea de a doua întrebare.

Dacă $n^2 - n + 41$ ar fi un număr compus (neprim), el s-ar putea descompune cel puțin în doi factori r, s, numere naturale. Dar pe aceștia îi putem scrie sub forme convenabile, de exemplu, vom putea scrie expresia dată sub forma :

$$n^2 - n + 41 = n(n - 1) + 41 = (n + p)(n - 1 + q) \qquad (1)$$

unde p și q sînt întregi, dintre care unul cel puțin strict pozitiv. Din (1) deducem, după desfacerea parantezelor :

$$n(n - 1) + 41 = n(n - 1) + nq + p(n - 1 + q),$$

de unde :

$$n(p + q) + p(q - 1) = 41. \qquad (2)$$

Presupunînd $p > 0$, $q > 0$, vom putea încerca rezolvarea ecuație diofantice (2), observînd că 41 trebuie descompus în suma a două numere neprime, pentru a putea egala fiecare din cei doi termeni cu unul dintre numerele neprime din primul membru. Astfel :

$$41 = 40 + 1,\ 41 = 39 + 2,\ \ldots,\ 41 = 36 + 5, \text{ etc.}$$

nu pot conduce la soluție. Singurele descompuneri posibile vor fi :

$$41 = 35 + 6,\ 41 = 33 + 8,\ 41 = 32 + 9,$$

$$41 = 27 + 14,\ 41 = 25 + 16,\ 41 = 21 + 20,$$

următoarele descompuneri posibile revenind la comutarea termenilor din membrul al doilea.

Va trebui să examinăm, pe rînd, sisteme de forma :

a) $n(p + q) = 35$, $p(q - 1) = 6$; b) $n(p + q) = 6$, $p(q - 1) = 35$

c) $n(p + q) = 33$, $p(q - 1) = 8$; d) $n(p + q) = 8$, $p(q - 1) = 33$, etc.

Din $n(p + q) = 35$ rezultă că $p + q$ este impar, de unde p este impar, q este par sau invers. Dar în ecuația $p(q - 1) = 6$ unul din factori va fi impar, celălalt par, de unde p și q ar avea aceeași paritate, soluții incompatibile cu faptul că $p + q$ este impar.

Un raționament analog exclude toate sistemele în care $n(p + q)$ este impar (33, 27, 25, 21), iar $p(q - 1)$ este par.

Rămîne de examinat sistemul :

$$n(p + q) = 32,\ p(q - 1) = 9$$

și cele în care $n(p + q)$ poate lua oricare din valorile 6, 8, 14, 16, 20.

Din $p(q - 1) = 9$ deducem că p este impar implică faptul că și $q - 1$ este impar, deci q este par ; prin urmare $p + q$ este impar, ceea ce intră în contradicție cu $n(p + q) = 32$, unde $p + q$ este par.

Rămîne să examinăm sistemele în care $n(p+q)$ ia valorile 6, 8 etc. Din $n(p+q)=6$, deducem $n=1$, $p+q=6$ sau $n=2$, $p+q=3$ sau $n=3$, $p+q=2$, ori $n=6$, $p+q=1$. Însă, dacă $p(q-1)=35$, deducem că $p+q \geqslant 7+6=13$ sau $p+q \geqslant 5+8=13$, ceea ce conduce din nou la contradicție cu valorile lui $p+q$ deduse din prima ecuație.

În mod analog se ajunge la contradicții și în celelalte sisteme. Prin urmare, pentru $n=0, 1, 2, \ldots, 40$ expresia n^2-n+41 generează numai numere prime.

2) Pentru $n=41$ ea devine 41^2 adică un număr neprim. Dar pentru $n=42$ vom avea: $42(42-1)+41=42\cdot 43$ care, de asemenea, este neprim.

În consecință, pentru $n=41r$ sau $n=41s+1$, generăm de asemenea numere neprime fiindcă:

$$n(n-1)+41=41r(41r-1)+41=41(41r-1)r$$

sau:

$$n(n-1)+41=(41s+1)(41s)+41=41(41s+s+1)=41(42s+1)$$

care sînt neprime.

Întrucît $n=41$ este prima valoare a lui n pentru care expresia dată reprezintă un număr neprim, iar $n=42$ este următoarea, dacă există și alte astfel de valori ele trebuie să fie de forma $n=41+p$ cu p număr natural. În consecință:

$$(41+p)^2-41-p+41=(41+p)^2-p$$

ar trebui să fie neprim. Dacă luăm $p=q^2$, unde q este natural, expresia va deveni $(41+q^2)^2-q^2=(41+q^2+q)(41+q^2-q)$ și va reprezenta un număr neprim pentru orice q număr natural.

Această soluție nu este exhaustivă, dar conduce la o infinitate de valori ale lui n, de forma $41+q^2$, pentru care generăm numere neprime. De exemplu, pentru $q=2$, vom avea $n=45$, iar expresia dată va fi:

$$45^2-45+41=45^2-4=47\cdot 43$$

Pentru $q=1$, regăsim soluția $n=42$.

Comentarii: Problema este inspirată dintr-un exercițiu din *S. M. Project Book T.*, p. 6, formularea noastră fiind susceptibilă de a fi aplicată și în alte cazuri, de exemplu, cînd se înlocuiește 41 printr-un alt număr prim. Ea nu este însă exhaustivă, fiindcă deși conduce la o infinitate de valori ale lui n pentru care n^2-n+41 este neprim, nu stabilește că acestea sînt singurele posibile. Ea este cunoscută de mai mult timp (v., de exemplu, lucrarea lui W. Sierpinski, *Ce știm și ce nu știm despre numere prime*, Ed. Științifică și Enciclopedică) dar tratarea și analiza cazurilor ne aparțin.

C.11. *Să se demonstreze că nici o putere întreagă a lui 2 nu poate fi o sumă de numere naturale nenule consecutive.*

Robert W. Prielipp și Norbert I. Kuenzi,
The Mathematics Teacher, vol. 68, nr. 1/1975

Soluție: Fie 2^n o putere întreagă a lui 2. Dacă $n=0$, $2^0=1$ nu este, indiscutabil, o sumă de numere naturale consecutive. Dacă 2^n ar fi o astfel de sumă pentru $n \geqslant 1$, ar exista două numere naturale m şi k astfel încît :

$$2^n = m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+k) = 1 + 2 + \ldots$$

$$\ldots + k + (k+1)m = (k+1)m + \frac{k(k+1)}{2}$$

relaţie care este echivalentă cu :

$$2^{n+1} = (k+1)(2m+k).$$

În aceste condiţii, $k+1$ şi $2m+k$ trebuie să fie amîndouă două puteri ale lui 2. Ori, k poate fi impar sau par.

Dar k număr impar impune $2m+k$ număr impar şi deci produsul $(k+1)(2m+k)$ nu poate fi o putere a lui 2. Cazul k par impune $k+1$ impar care conduce la acelaşi rezultat. În ambele cazuri am ajuns la o contradicţie.

Comentarii : Problema face parte dintr-un articol al celor doi autori, care îşi propun, sub titlul „*Sume de întregi pozitivi consecutivi*", să stimuleze spiritul de creativitate al elevilor în cercetarea matematică. Ea este, într-adevăr, stimulatoare prin simplicitatea raţionamentelor, ca şi prin lărgimea rezultatului stabilit.

C.12. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un număr natural* n *să fie o sumă de numere naturale consecutive, este ca* n *să nu fie o putere a lui 2.*

Robert W. Prielipp şi Norbert I. Kuenzl,
The Mathematics Teacher, vol. 68, nr. 1/1975

Soluţie : Să presupunem că $n \neq 2^p$ cu p număr natural şi $p \neq 0$. Pentru $n = 1$, el poate fi pus sub forma $1 = 0 + 1$. Dacă $n \geqslant 3$, pe n îl vom putea pune sub forma $n = ws$, unde w este natural şi s este natural impar. Cum $n \geqslant 3$, va trebui să luăm $s = 2m + 1$, cu $m \geqslant 1$.

Dacă $w = 1$ atunci $n = s = 2m + 1$ şi putem scrie :

$$n = 2m + 1 = m + (m+1)$$

deci n este suma a două numere consecutive. Explicaţia faptului că punem pe n sub forma $n = w(2m+1)$ stă în condiţia ca $n \neq 2^p$, fiindcă, în acest caz, sau n este prim şi deci impar, sau n nu este prim şi atunci descompunerea sa în factori primi trebuie să conţină cel puţin un factor impar, altfel am avea $n = 2^p$, ceea ce am exclus.

Să presupunem $w > 1$; există două cazuri : $1 < w \leqslant m$, respectiv $w > m$. În primul caz, vom scrie :

$$n = ws = w(2m+1) = [m + (m+1)] + [(m-1) + (m+2)] +$$

$$+ [(m-2) + (m+3)] + \ldots + [(m-w+1) + (m+w)].$$

În acest mod am adunat de w ori pe $2m + 1$ și aceasta ne-a permis să scriem din nou:

$$n = ws = (m - w + 1) + (m - w + 2) + \ldots + m + (m + 1) + $$
$$+ (m + 2) + \ldots + (m + w).$$

Astfel, n a fost pus sub forma unei sume de $2w$ numere naturale consecutive.

Dacă $w > m$, vom proceda analog:

$$n = ws = w(2m + 1) = (w - m) + (w - m + 1) + \ldots + w +$$
$$+ \ldots + (w + m)$$

și vom fi pus pe n sub forma unei sume de $2m + 1$ numere consecutive.

Condiția este deci suficientă. Ea este însă și necesară. Într-adevăr, folosind problema anterioară, dacă $n = 2^p$, cu $p \neq 0$, atunci n nu poate fi pus sub forma unei sume de numere naturale consecutive.

Comentarii: Problema apare sub forma unei teoreme în articolul „*Sume de întregi pozitivi consecutivi*" din revista „*The mathematics teacher*" menționată în enunț. Ea însă nu este enunțată ca mai sus, ci sub forma următoare:

Un întreg pozitiv, care nu este o putere a lui 2, este o sumă de numere întregi pozitive consecutive.

Noi am sintetizat problema de față cu problema C. 11 și am analizat mai amănunțit raționamentele necesare.

Rămîne deschisă însă problema dacă reprezentarea găsită este unică și răspunsul este negativ, cum va apărea dintr-o problemă viitoare.

C.13. 1) *Să se construiască table ale adunării, scăderii și îmnulțirii în baza 2 (binară).*

2) *Să se aplice în efectuarea algoritmică a operațiilor următoare, exprimîndu-se operațiile și rezultatele, atît în binar cît și în zecimal:*

a) $10101_2 + 110101_2$; *b)* $1010_2 - 101_2$; *c)* $10110_2 \times 101_2$.

Acad. Nicolae Teodorescu

Soluție: Prin analogie cu construcția tablelor în baza 12 și pentru compararea tehnicilor de calcul vom construi tablele cerute și le vom aplica pe cele trei exemple a), b), c) (a se vedea și C. 17).

1)

+	0	1
0	0	1
1	1	10

−	0	1
0	0	1
1	1_1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Indicele 1 la scădere arată că împrumutăm o unitate de ordin imediat superior:

$$0 - 1 \to 0 - 1 + 2 = 1_1.$$

2) Avem: a)

$$10101_2+110101_2=(2^4+0\cdot 2^3+2^2+0\cdot 2+1)+(2^5+2^4+0\cdot 2^3+ \\ +2^2+0\cdot 2+1)=2^5+(1+1)2^4+0\cdot 2^3+ \\ +(1+1)2^2+0\cdot 2+2=2^6+0\cdot 2^5+ \\ +0\cdot 2^4+2^3+0\cdot 2^2+1\cdot+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=1001010_2.$$

Aplicînd algoritmul, vom putea scrie cu ajutorul tablei de adunare:

$$\begin{array}{r} 10101\ + \\ 110101 \\ \hline 1001010 \end{array} \quad (2^4+2^2+1)+(2^5+2^4+2^2+1)=21_{10}+53_{10}=74_{10};$$

b) $$\begin{array}{r} 1010\ - \\ 101 \\ \hline 101 \end{array} \quad (2^3+2)-(2^2+1)=10_{10}-5_{10}=5_{10};$$

c) $$\begin{array}{r} 10110\ \times \\ 101 \\ \hline 10110 \\ 00000\ \\ 10110\ \ \\ \hline 1101110 \end{array} \quad (2^4+2^2+2)\times(2^2+1)=22_{10}\times 5_{10}=111_{10}.$$

Comentarii: Înmulţirea în baza 2 este cea mai uşoară, fiindcă revine exclusiv la înmulţirea cu 1 sau cu 0. În fond, ea revine la a scrie deînmulţitul de atîtea ori cîte cifre 1 sînt la înmulţitor, deplasîndu-l pînă la rangul acestei cifre în înmulţitor şi apoi adunînd în baza doi produsele parţiale.

C.14. 1) ***Un farmacist dispune de mase de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, cîte una din fiecare. Cum va proceda pentru a cîntări, pe rînd, 7 g, 11 g, 15 g?***

2) ***Ce va trebui să facă pentru a cîntări mase mai mari, de exemplu 21 g, 22 g, 23 g, 37 g, 38 g, 39 g?***

3) ***În ce sistem de mase etalonate se poate cîntări o masă oarecare folosind cel mult cîte o masă etalon?***

S.M.P. Book T., p. 21.

Soluţie: 1) Va trebui să exprime fiecare dintre masele de cîntărit ca sumă de mase etalonate:

$$7=1+6=1+2+4;\ 11=1+10=1+2+8;$$

$$15=1+14=1+4+10=1+4+2+8.$$

2) Se vede că masele etalon sînt puteri ale lui 2, deci păstrînd sistemul va trebui să adauge ca etaloane mase de 16 şi 32, avînd în vedere

că $39 > 2 \times 16 = 32$ și că farmacistul nu poate avea două greutăți de cîte 16 g:

$$21 = 16 + 5 = 16 + 4 + 1,\ 22 = 16 + 4 + 2,\ 23 = 16 + 4 + 2 + 1,$$

$$37 = 32 + 5 = 32 + 4 + 1,\ 38 = 32 + 4 + 2,\ 39 = 32 + 4 + 2 + 1.$$

3) Trecerea din baza 10, în care presupunem evaluate masele și în care nu putem exprima orice masă cu mase etalon de 1 g, 10 g, 100 g etc. folosește fiecare număr o dată, se face prin împărțiri. Numărul dat se împarte la bază de cîte ori este posibil și cifrele în noua bază sînt resturile succesive. Aceste resturi trebuie să fie toate egale cu 1 sau 0. Ori, singura bază n în care operînd modulo n obținem numai resturi 1 sau 0 este 2, deci sistemul binar.

Condiția este necesară. Ea este însă și suficientă fiindcă orice număr natural poate fi scris în baza 2 pe baza algoritmului împărțirii cu rest.

Comentarii: Problema este menită să stimuleze printr-un exemplu concret spiritul practic al elevilor și în același timp să-i îndemne să teoretizeze acest exemplu, observînd că masele sînt, una dublă precedentei.

Punctul 3) este propus de noi ca o generalizare a procedeului practic de cîntărire. Rămîne să dovedim posibilitatea de a scrie orice număr natural în baza 2, ceea ce facem în cele ce urmează.

Fie N un număr natural. Împărțindu-l la 2 vom avea:

$$N = 2a_0 + \varepsilon_0 \quad \text{cu } \varepsilon_0 \in \{0, 1\},$$

$$a_0 = 2a_1 + \varepsilon_1 \quad \text{cu } \varepsilon_1 \in \{0, 1\},$$

și, în general:

$$a_k = 2a_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \quad \text{cu } \varepsilon_{k-1} \in \{0, 1\}.$$

Împărțirea se poate face pînă cînd cîtul este zero, restul fiind 1. Vom putea deci scrie:

$$N = \varepsilon_{p-1} 2^{p-1} + \varepsilon_{p-2} 2^{p-2} + \ldots + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_0$$

unde $\varepsilon_{p-1} = 1$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pentru $k = 0, 1 \ldots, p - 2$.

În baza 2 vom putea deci scrie:

$$N = \overline{\varepsilon_{p-1}\varepsilon_{p-2} \ldots \varepsilon_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_0}_{(2)}$$

toate cifrele fiind 0 sau 1. Această scriere justifică și posibilitatea de a cîntări un obiect cu etaloane puteri ale lui 2, cîte un etalon de fiecare categorie.

C.15. *Să se multiplice în scrierea romană următoarele numerale:*

$$X \times V;\ X \times X;\ X \times L$$

și să se folosească pentru a se calcula produsul $LXV \times XXI$, *fără a se folosi trecerea în scrierea indo-arabă, cu un algoritm asemănător celui folosit astăzi.*

S.M.P. Book, 1, p. 21

Soluţie: Avem : X × V = L; X × X = C; X × L = D şi :

$$\begin{array}{l}
\text{LXV} \times \\
\underline{\text{XXI}} \\
\text{LXV} \\
\text{DCL} \\
\underline{\text{DCL}} \\
\text{DDCCLLLXV} = \text{MCCCLXV} = 1\,365
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
65 \times \\
\underline{21} \\
65 \\
\underline{130} \\
1365
\end{array}$$

Produsele parţiale au fost calculate începînd de la ultima cifră la dreapta ca la înmulţirea în cifre indo-arabe. Ele au fost scrise unele sub altele, dar n-au fost decalate spre stînga, fiindcă scrierea romană nu era poziţională. Sumele s-au făcut scriindu-se simbolurile unele după altele în ordine descrescătoare ca valoare. Adunarea s-a făcut astfel :

$$\text{DD} = \text{M}, \ \text{CC} = \text{CC}, \ \text{LLL} = \text{CL}, \ \text{XV} = \text{XV}$$

şi rezultatul a fost scris aşa cum scriau romanii. Dăm şi operaţia în scrierea actuală pentru a se vedea o dată în plus avantajele scrierii poziţionale.

C.16. *Să se construiască tabla adunării în baza 12 şi să se dea indicaţii de folosirea ei în algoritmul adunării.*

Acad. N. Teodorescu

Soluţie: Întrucît în bazele mai mari decît 10 se folosesc simboluri cifrice suplimentare cifrelor 0, 1, 2, ..., 9, reţinerea rezultatelor adunării cifrelor din rangurile succesive este mai anevoioasă decît în baza 10. De aceea se impune construcţia tablei următoare :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	α	β	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	α	β	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	α	β	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	α	β	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	α	β	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	α	β	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	α	β	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
α	β	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1α
β	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1α	1β
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1α	1β	20

Comentarii: Nu ştim dacă o astfel de tablă n-a mai fost alcătuită. O semnăm pentru că o considerăm ca un exemplu metodologic, recomandînd construcţia unor astfel de table şi pentru alte baze $n > 10$, unde se introduc simboluri cifrice suplimentare.

Folosirea ei se face, căutînd suma cifrelor respective, de exemplu $6 + \alpha = 14$ la intersecţia liniei lui 6 cu coloana lui α sau, invers, $\alpha + 6 =$

$= 6 + \alpha = 14$. *Se va păstra cifra ca sumă a unităților de rangul respectiv, iar 1 se va raporta la suma cifrelor de rang imediat superior.*

Această regulă este valabilă și pentru sume de forma $3 + 7 = \alpha$, unde se păstrează α, dar nu avem nimic de reportat, sau pentru $\alpha + \beta = 1\alpha$ ori $\beta + 10 = 20$ unde păstrăm zero și reportăm 2.

Operația de adunare se face în clasa de resturi modulo 12, dar nu se pierde nici multiplul de 12 obținut, ci se reportează la rangul imediat superior ca cifră unică.

Vom observa că în afara sumei 10 + 10 = 20 cifra de reportat este totdeauna 1 la adunare. La înmulțire aceasta poate fi 1, 2, ..., α, β și chiar $10_{12} = 12_{10}$ adică baza, cînd reportarea lui 10 se face cu zero la unitatea imediat superioară și 1 la următoarea, deci este afectată unitatea de ordin superior cu două unități, întrucît 0 nu modifică cifra de ordin imediat superior.

C.17. *Să se construiască tabla scăderii în baza 12, dîndu-se și indicații de folosire a ei în algoritmul scăderii.*

Acad. N. Teodorescu

Soluție: Scăderea ridică probleme mai grele decît adunarea și cere o atenție deosebită pentru evitarea erorilor. Într-adevăr, cînd scădem o cifră mai mare din alta mai mică, rezultatul este un număr negativ. Dar dacă se „împrumută" o unitate de ordin imediat superior scăderea se poate face, obținîndu-se un număr mai mic decît baza. *Pentru a se recupera mărirea descăzutului cu acea unitate va trebui s-o adăugăm scăzătorului la ordinul respectiv.* Nu putem proceda ca la adunare sau înmulțire adăugînd unitatea sau cifra obținute peste rangul unităților asupra cărora se face

—	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	β_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α
3	α_1	β_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3	4	5	6	7
6	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3	4	5	6
7	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3	4	5
8	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3	4
9	4_1	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2	3
α	3_1	4_1	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1	2
β	2_1	3_1	4_1	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0	1
10	1_1	2_1	3_1	4_1	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1	α_1	β_1	0

operația sumei sau produsului unităților de ordin imediat superior fiindcă, de fapt, la scădere *am adăugat* o unitate și *trebuie s-o scădem* pentru a compensa ce s-a adăugat. Ori, aceasta nu se poate face prin adunare decît la scăzător.

Este posibil s-o facem și prin scădere, dar la descăzut. Din punct de vedere practic este mai comod s-o adăugăm la scăzător în loc de a ține minte s-o scădem de la descăzut.

Tabla anterioară s-a construit cu prima compensaţie, adică prin adăugarea la scăzător a unităţii împrumutate.

Comentarii : Pentru a se marca unitatea ce trebuie adăugată scăzătorului la unitatea de rang imediat superior celei asupra căreia se operează, *am marcat toate cifrele obţinute prin scăderea celor din coloana întîia din cele din linia întîia printr-un indice 1.* Aceasta înseamnă că vom trece la rezultat cifra respectivă şi vom adăuga 1 la cifra scăzătorului de un ordin imediat superior. Cum această convenţie, vom da un exemplu de scădere cu ajutorul tablei :

$$\begin{array}{r} 2\alpha 57\ - \\ 16\beta 9 \\ \hline 135_1\alpha_1 \end{array}$$

$$2n^3 + \alpha n^2 + 5n + 7 - (n^3 + 6n^2 + \beta n + 9) =$$

$$= n^3 + (\alpha - 6)n^2 + (5 - \beta)n + (7 - 9) =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 5n + \alpha = 135\alpha_{(12)}$$

$$(7 - 9) \to 7 + 12 - 9 = 10_{10} = \alpha,$$

$$(5 - \beta - 1) \to 12 + 5 - \beta - 1 = 5_{10} = 5,$$

$$(\alpha - 6 - 1) = 3 \text{ şi } (2 - 1) = 1.$$

Vom observa simetria tablei în raport cu diagonala principală, care este formată numai din zerouri. Însă toate cifrele din triunghiul inferior sînt afectate de indicele 1, care impune adăugarea unei unităţi la scăzător.

C.18. *Să se construiască tabla înmulţirii în baza 12 şi să se dea indicaţii pentru folosirea ei.*

S.M.P. Book T., p. 21

Soluţie : Utilitatea unei astfel de table apare cu prisosinţă în operaţiile de înmulţire ca şi în baza 10, unde cifrele diverselor numere impun

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10
2	2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α	20
3	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47	50
6	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65	70
8	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
α	α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92	α0
β	β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	α1	β0
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	α0	β0	100

cunoaşterea imediată a tuturor produselor numerelor de o cifră 1, 2, . . ., 9 şi 0. Am văzut că algoritmele numerice de înmulţire conduc la aceeaşi necesitate.

Menţionăm că vom întrebuinţa simbolurile 0, 1, 2, ..., 9, α, β, iar pentru 12_{10} vom pune 10_{12}. Produsele vor fi calculate, de asemenea, în baza 12.

Comentarii : În *S.M.P Teacher's Guide* este prezentată numai prima jumătate a acestei table, şi nu se cer indicaţii de folosire, cea de a doua fiind elaborată de noi în vederea uşurării înmulţirii în baza 12, ca şi indicaţiile ce urmează. În tablă nu a fost prevăzută o linie specială pentru înmulţirea cu 1, deci cu elementul de efect nul sau unitate. Dar prima linie în care se specifică cifrele reprezintă chiar rezultatele înmulţirii acestora cu 1.

Pentru a folosi tabla este suficient *să se caute produsele la intersecţia liniei şi coloanei celor doi factori, de exemplu, $7 \times 9 = 53$ sau a coloanei şi liniei respective, $9 \times 7 = 53$. Se va păstra pentru produs ultima cifră 3 şi se va reporta la produsul cifrelor de un rang superior cu o unitate cifra 5.* Cînd produsul comportă unul dintre simboluri, de exemplu, $7 \times 5 = 2\beta$, se procedează la fel luînd $\beta = 11$ şi păstrîndu-l ca atare în produsul unităţilor de rangul respectiv.

În fond, operaţia se face în clasa de resturi modulo 12 pentru rangul cifrelor înmulţite, dar cifra de rang superior obţinută se reportează la rangul imediat superior.

Scopul culegerii fiind metodologic şi adresîndu-se în egală măsură elevilor şi profesorilor lor, ca şi altor specialişti, comentariile urmăresc a fi sursă de sugestii, atît pentru unii cît şi pentru ceilalţi.

Recomandăm folosirea acestei table pe baza unei prime experienţe personale făcută pe exemplele pe care le-am dat, unde nefolosind tabla am greşit operaţia de cîteva ori.

C.19. *Să se compare între ele numerele 48_7, 321_4, 25_8 şi să se scrie apoi în baza celui mai mare, respectiv a celui mai mic dintre ele.*

Acad. N. Teodorescu

Soluţie: Pentru a se putea compara este necesar să fie scrise în aceeaşi bază. Cea mai uşoară conversiune este în baza 10. Vom avea:

$$48_7 = 4 \times 7 + 8 = 36_{10};\ 321_4 = 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 57_{10},$$
$$25_8 = 2 \times 8 + 5 = 21_{10}.$$

Cel mai mare dintre ele este 57_{10} corespunzînd lui 321_4. Vom trece pe $48_7 = 36_{10}$ şi pe 25_8 în baza 4, folosind expresia în baza 10 şi vom avea:

4)	36	4)	21
4)	9 rest 0	4)	5 rest 1
4)	2 rest 1	4)	1 rest 1
	0 rest 2		0 rest 1

Prin urmare:

$$321_4 = 321_4;\ 48_7 = 210_4;\ 25_8 = 111_4.$$

Cel mai mic dintre ele este $21_{10} = 25_8$. Calculele de conversiune în baza 8 sînt analoge. Pornind de la expresiile în baza 10, vom avea:

$$\begin{array}{ll} 8)\ \underline{36} & \\ 8)\ \underline{\ 4\ } \text{ rest } 4 & \\ \quad\ 0 \text{ rest } 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 8)\ \underline{57} & \\ 8)\ \underline{\ 7\ } \text{ rest } 1 & \\ \quad\ 0 \text{ rest } 7 & \end{array}$$

Prin urmare:

$$321_4 = 71_8;\ 48_7 = 44_8;\ 25_8 = 25_8.$$

C.20. *Fiind dată o bază oarecare* n, *ce condiții trebuie să îndeplinească un număr* $\overline{a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_1 a_{0(n)}}$ *pentru a fi par sau respectiv impar.*

S.M.P. Book 1, p. 21

Soluție: Baza poate fi pară sau impară. Fie $n = 2m$. În acest caz vom avea:

$$\overline{a_{p-1}a_{p-2} \ldots a_1 a_{0(2m)}} = a_{p-1}(2m)^{p-1} + a_{p-2}(2m)^{p-2} + \ldots + a_1(2m) + a_0.$$

Este clar că numărul va fi par sau impar dacă și numai dacă a_0 este par, respectiv impar.

Fie $n = 2m + 1$; numărul se va scrie:

$$\overline{a_{p-1}a_{p-2} \ldots a_1 a_{0(2m+1)}} = a_{p-1}(2m+1)^{p-1} + \ldots + a_1(2m+1) + a_0 = \\ = 2N + a_{p-1} + a_{p-2} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Dar $2m + 1$ ridicat la orice putere este un număr impar; $2N$ reprezintă suma tuturor termenilor pari. Numărul va fi par sau impar după cum va fi suma cifrelor sale $a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1}$.

În concluzie: *dacă baza este pară, numărul este par sau impar, după cum este cifra unităților sale; dacă baza este impară, numărul va fi par sau impar, după cum suma cifrelor sale este pară sau impară.*

C.21. *Dacă păianjenii ar ajunge la stadiul de dezvoltare a inteligenței la care a ajuns omul primitiv, cînd a început să numere și să facă operații aritmetice pe degete, aceștia ar folosi baza 8, întrucît au cîte 8 picioare. Să se rezolve în aritmetica păianjenilor următoarele exerciții:*

a) *Să se treacă din baza 8 în baza 10, deci din sistemul octal, numerele* 10_8, 25_8, 361_8.

b) *Să se treacă în octal numerele* 41_{10}, 519_{10}.

c) *Să se calculeze* $16_8 + 25_8$, $143_8 + 2060_8$, $45_8 - 30_8$, $512_8 - 407_8$, $63_8 + 27_8 - 14_8 - 7_8$.

d) *Să se calculeze înmulțirile:*

$$64_8 \times 2_8,\ 315_8 \times 22_8,\ 41_8 \times 100_8.$$

S.M.P. Book T, p. 13

Soluție : Avem :

a) $10_8 = 8_{10}$, $25_8 = 2 \times 8 + 5 = 21_{10}$,

$$361_8 = 3 \times 8^2 + 6 \times 8 + 1 = 192 + 48 + 1 = 241_{10}$$

b)
$$\begin{array}{l} 8)\ \underline{41} \\ 8)\ \underline{\ 5}\ \text{rest } 1 \\ \quad\ \ 0\ \text{rest } 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8)\ \underline{519} \\ 8)\ \underline{\ 64}\ \text{rest } 7 \\ 8)\ \underline{\ \ 8}\ \text{rest } 0 \\ 8)\ \underline{\ \ 1}\ \text{rest } 0 \\ \qquad 0\ \text{rest } 1 \end{array}$$

deci $41_{10} = 51_8$; $519_{10} = 1007_8$.

c)
$$16_8 + 25_8 = 43_8;\ 143_8 + 2060_8 = 2223_8;$$
$$45_8 - 30_8 = 15_8;\ 512_8 - 407_8 = 103_8;$$
$$63_8 + 27_8 - 14_8 - 7_8 = 112_8 - 23_8 = 67_8;$$

d) $64_8 \times 2_8 = (6n + 4) \times 2 = 12n + 8 = 96 + 8 = 104_{10} =$
$$= (13 \times 8)_{10} = (8 + 5) \times 8 = (8^2 + 5 \times 8 + 0)_{10} = 150_8$$

$$\begin{array}{r} 315 \times \\ 22 \\ \hline 632 \\ 632\ \ \\ \hline 7152\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 41 \times \\ 100 \\ \hline 000 \\ 000\ \ \\ 41\ \ \ \ \\ \hline 4100\ \ \ \ \end{array}$$

deci $64_8 \times 2_8 = 150_8$, $315_8 \times 22_8 = 7152_8$, $41_8 \times 100_8 = 4100_8$. Aici, $n = 8$.

Comentarii : Sistemul octal se întîlnește și în muzică, unde gama în do major, de exemplu, este formată din 8 note, prima și ultima fiind do. Intervalul dintre acestea se numește octavă și do marchează baza octală. Ca și în baza 12, înmulțirea cu baza, deci cu $8_{10} = 10_8$, revine la a adăuga un zero la deînmulțit, deci la transferul cu o unitate a cifrelor sale. De aceea, $41_8 \times 100_8 = 4100_8$ ca în baza zece.

C.22. *Să se determine toate perechile* (m, n) *de numere naturale scrise în octal, al căror produs* mn *se termină cu* p *zerouri.*

Acad. N. Teodorescu

Soluție : Să observăm că $8_{10} = 10_8$, deci că numerele care se termină cu zero în octal sînt multipli de 8, dar nu și de puteri mai înalte ale lui 8. În consecință, va trebui ca :

$$mn = 8^p K,$$

unde K nu este multiplu de 8 ($K \neq 8h$).

Cum $8^p = 2^{3p}$, vom putea scrie relația de condiție:

$$mn = 2^{3p-q} \cdot 2^q K,$$

unde $0 \leqslant q \leqslant 3p$, q fiind un număr natural $8 = 2^3$ în factori primi.

Punînd și pe K sub forma de produs de doi factori, $K = \lambda\mu$, cu λ, μ numere naturale nenule, vom putea scrie relația de condiție:

$$mn = 2^{3p-q}\lambda \cdot 2^q\mu$$

de unde vom putea lua ca soluție generală:

$$m = 2^{3p-q}\ \lambda,\ n = 2^q\mu \tag{1}$$

Cazuri particulare remarcabile:

a) $$q = 0,\ m = 2^{3p}\lambda,\ n = \mu$$

deci $m = 8^p\lambda$, $n = \mu$, adică multiplii lui 8^p înmulțiți cu orice număr natural $\mu \neq 0$,

b) $$q = 2r,\ m = 2^{3p-2r}\ \lambda = 4^{p-r} \cdot 2^p\lambda;\ n = 2^{2q}\mu = 4^q\mu,$$

deci multiplii de 4, înmulțiți cu multiplii de 2^p.

Comentarii: Problema extinde un exercițiu cu enunțul următor: *Ce multiplii de numere scrise în octal se termină cu zero? din S.M.P. Book T.*

Răspunsul nu este acolo justificat, ci indicat prin exemple. Corespunde lui $p = 1$, $q \in \{0, 1\}$ și avem:

a) 10, 20, 30 etc., x orice număr natural;

b) 4, 14, 24 etc., x orice număr par.

C.23. *În ipoteza că primind semnale de pe planetele sistemului solar constatăm că de pe Venus ni se transmite relația:*

$$23 \times 75 = \alpha 6 \alpha$$

unde α este, în notația noastră, un semnal de cifră pozițională venusiană, în ce bază poate fi corectă această relație?

Acad. N. Teodorescu

Soluție: Fie n baza necunoscută. Vom scrie în această bază relația dată sub forma:

$$(2n + 3) \times (7n + 5) = \alpha n^2 + 6n + \alpha$$

de unde:

$$(\alpha - 14)n^2 - 25n + (\alpha - 15) = 0 \tag{1}$$

Ecuația trebuie să aibă ca rădăcini numere naturale $n > 1$, pentru ca acestea să poată fi baze de numerație. Scriind:

$$\alpha - 15 = n\,[25 - (\alpha - 14)n]$$

urmează ca rădăcina întreagă naturală n să dividă pe $\alpha - 15$. Dar cum n este bază, $\alpha \lhd n$ şi în consecinţă nu putem avea decît $\alpha - 15 = 0$, de unde $\alpha = 15$.

În aceste condiţii din (1) deducem:

$$n^2 - 25n = 0,$$

deci $n = 0$ sau $n = 25$. Singura rădăcină admisibilă ca bază este $n = 25$.

C.24. *Există contoare electronice care pot înregistra evenimente ce se succed foarte rapid, cum ar fi şocurile unor particule atomice pe un ecran. Numărul total de evenimente (de exemplu şocuri) este înregistrat de obicei pe un şir de discuri numerotate care dau răspunsurile în sistemul octal. Acest sistem se foloseşte pentru circuite electrice mai uşor de realizat.*

Pe un sistem format din discurile A, B, C, D *se marchează rezultatele unei numărări de şocuri.* A *numără în unităţi,* B *în unităţi de ordinul al II-lea,* C, *de ordinul al III-lea,* D, *de ordinul al IV-lea.*

1) *Dacă s-au înregistrat 2 şocuri pe* A, *5 pe* B, *1* pe C *şi 7 pe* D, *să se evalueze totalul în octal şi în zecimal;*

2) *Să se evalueze în ambele sisteme de numeraţie cel mai mare număr de şocuri înregistrabile;*

3) *Care este numărul minim de şocuri ce ar trebui să se mai producă pentru a fi nevoie de încă un disc* E?

S.M.P. Book 1, p. 14

Soluţie: 1) În octal se înregistrează pe cele 4 discuri:

$$2 + 5 \cdot 8 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^3 = 7\,152_8 = 2 + 40 + 64 + 3\,584 =$$
$$= 3\,690_{10}, \text{ şocuri}$$

2) Cel mai mare număr de şocuri se obţine cînd pe fiecare disc se înregistrează maximum, deci 7. În consecinţă, vom avea:

$$7777_8 = 7(8^3 + 8^2 + 8 + 1)_{10} = 7 \times 585 = 4\,095_{10}$$

3) Un singur şoc pe discul A transferă $7 + 1 = 8_{10} = 10_8$ şocuri pe discul B, unde $7 \cdot 8 + 8 = 8^2 = 100_8$ şocuri vor trebui transferate pe discul A. Dar $7 \cdot 8^2 + 8^2 = 8^3 = 1000_8$ şocuri se transferă pe discul D, unde $7 \cdot 8^3 + 8^3 = 8^4$ şocuri nu mai pot fi înregistrate şi va fi nevoie de un disc E pentru şocuri de ordinul al patrulea.

Comentarii: Rezolvarea punctului 3) unde un singur şoc suplimentar impune considerarea unităţilor octale de ordinul al IV-lea, arată că:

$$7777_8 + 1 = 10000_8$$

deci că 7777 şi 10000 sînt consecutive în octal, ceea ce în baza 10 ar fi inexact. Explicaţia este însă simplă fiindcă în octal cifrele sînt 0, 1, 2, ..., 7, pe cînd în sistemul zecimal 0, 1, 2, 3, ..., 9. Acolo am avea $9\,999 + 1 = 10\,000$.

Proprietatea este generală: *în orice bază vom avea*:

$$n^{p-1} \leqslant \overline{a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_1 a_0} \lhd n^p \qquad (1)$$

oricare ar fi ,,cifrele'' $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$, *unde:*

$$0 \leqslant a_0, a_1, \ldots, a_{p-2} < n \text{ și } 0 < a_{p-1} < n.$$

Într-adevăr:

$$\overline{a_{p-1}\, a_{p-2}\, \ldots\, a_1 a_0} = a_{p-1}n^{p-1} + a_{p-2}n^{p-2} + \ldots + a_1 n + a_0$$

ca număr în baza n, coeficienții fiind numere naturale mai mici decî baza, iar $a_{p-1} \neq 0$.

De asemenea:

$$\max \overline{a_{p-1}\, a_{p-2}\, \ldots\, a_1 a_0} + 1 = n^p = (100\ldots 0)_n \qquad (1')$$

adică 1 urmat de p zerouri, ca n în baza 10, unde:

$$10^p = \overline{10\ldots 0} \text{ (cu } p \text{ zerouri)}.$$

PROBLEME DE SINTEZĂ

1. i). Dacă numărul $\overline{abc}$ îndeplinește condiția $\overline{abc} \cdot 9 = \overline{xabc}$, atunci $\overline{abc}$ este divizibil prin 125 (numerele sînt scrise în baza 10).

ii). Care numere îndeplinesc condiția dată cînd $x \in \{a, b, c\}$?

(Niculae Grigorescu, G.M., E: 7 084)

R. i). Evident, $a \neq 0$, $x \neq 0$. Condiția dată devine:

$$\overline{abc}\ (8 + 1) = \overline{xabc}$$

sau:

$$8 \cdot \overline{abc} = \overline{xabc} - \overline{abc} = \overline{x000} = x \cdot 1\,000 = 8x \cdot 125$$

deci $\overline{abc} = 125x$ ceea ce arată că $\overline{abc}$ se divide prin 125.

ii). Multiplii lui 125 cu 3 cifre sînt: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.

Numerele de forma $\overline{xabc}$ care pot îndeplini condiția dată sînt cele pentru care $9 | (x + a + b + c)$, adică 1 125, 2 250, 3 375, 5 625, 7 875. adevăr:

$$125 \cdot 9 = 1\,125,\ 250 \cdot 9 = 2\,250,$$

$$375 \cdot 9 = 3\,375,\ 875 \cdot 9 = 7\,875,$$

$$625 \cdot 9 = 5\,625.$$

2. Într-o urnă se află 6 bile albe, 9 bile galbene, 12 bile roșii și 15 bile verzi.

i) Să se afle numărul minim de bile ce trebuie extrase pentru a fi siguri că am scos:

a) cel puțin 5 bile galbene;

b) cel puțin 4 bile de aceeași culoare.

ii) Să se afle numărul maxim de bile ce trebuie extrase pentru a fi siguri că rămîn în urnă:

a) cel puțin 3 bile de aceeași culoare;

b) cel puțin 5 bile roșii.

(Cristian Mihail Dianu, G.M., E: 6 823)

R. i). a). La o extragere succesivă este posibil să scoatem, pentru început, cele $12 + 15 + 6$ bile roșii, verzi respectiv albe. Deci, extrăgînd $12 + 15 + 6 + 5 = 38$ bile, sîntem siguri că am extras 5 galbene.

b) La o extragere succesivă, cel mai rău caz este acela în care extragem cîte 3 bile din fiecare culoare, adică 12. A treisprezecea va forma, cu una din cele 4 grupe de cîte 3 bile, o grupă de 4 bile de aceeași culoare. Deci trebuie să extragem cel puțin 13 bile pentru a fi siguri că am extras cel puțin 4 de aceeași culoare.

ii). a) Dacă rămîn, după o extragere succesivă, 8 bile, în cel mai rău caz rămîn cîte 2 de aceeași culoare, dar dacă rămîn 9, sigur vor fi 3 de aceeași culoare. Deci numărul maxim de bile ce pot fi extrase pentru a fi siguri că în urnă rămîn cel puțin 3 de aceeași culoare este $6 + 9 + 12 + 15 - 9 = 33$.

b) Dacă în urnă rămîn $6 + 9 + 15 = 30$, acestea pot fi cele 6 albe, 9 galbene, 15 verzi. Dar dacă rămîn $30 + 5 = 35$, vom fi siguri că printre acestea vor exista cel puțin 5 roșii. Deci numărul maxim cerut este $6 + 9 + 12 + 15 - 35 = 7$.

3. Fie numărul natural $N = \overline{ababa}$, unde a și b sînt cifre în sistemul de numerație zecimal, $a \neq 0$.

a) Să se arate că dacă b se divide cu 3, atunci N se divide cu 3;

b) Dacă b se divide cu 7, atunci N se divide cu 7;

c) Există un singur număr N de această formă care se divide cu 45.

(Venus Ungureanu, G.M., E: 7 179)

R. a) Suma cifrelor lui N este $a + b + a + b + a = 3a + 2b$. Deoarece $3a$ se divide cu 3 și deoarece b se divide cu 3, rezultă că și $2b$ se divide cu 3, deci și $2b + 3a$, deci și N se divide cu 3.

b) Avem:

$$N = 10^4a + 10^3b + 10^2a + 10b + a = 10\,101a + 1\,010b.$$

Deoarece 10 101 se divide cu 7, rezultă că și $10101a$ se divide cu 7. Cum b se divide cu 7, rezultă că și $1\,010b$ se divide cu 7, deci și $10101a + 1010b = N$, ca sumă a două numere care se divid cu 7.

c) Cum $45 = 9 \cdot 5$, rezultă, avînd în vedere că $a \neq 9$, că $a \neq 5$ deoarece numai numerele care se termină în 0 sau 5 se divid cu 5. Cum suma cifrelor lui N, adică $3a + 2b$ trebuie să se dividă la 9 rezultă $2b + 15$ se divide la 9 sau, cum $15 = 9 + 6$, $2b + 6$ se divide la 9. Cum b este un element al mulțimii $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, rezultă $b = 6$. Deci $N = 56\,565$.

4. Fie A mulțimea numerelor $\overline{abc}$ care se divid prin 9, unde $c \neq 0$ (a, b, c cifre în baza 10). Fie B mulțimea numerelor abc unde $c \neq 0$ care satisfac condiția: 9 divide $(\overline{abc} + \overline{cba})$. Să se arate că $A = B$.

(B. Abramovici, G.M., E: 6 928)

R. Vom arăta pe rînd că $A \subset B$ și $B \subset A$. Dacă $\overline{abc} \in A$ rezultă că 9 divide pe $(a + b + c)$ deci $9|\overline{cba}$, adică $9|(\overline{abc} + \overline{cba})$ deci $\overline{abc} \in B$. Reciproc, fie $\overline{abc} \in B$. Cum $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{cba} = 100c + 10b + a$, din $9|(\overline{abc} + \overline{cba})$ rezultă $9|101a + 20b + 101c = 9(11a + 11c + 2b) + 2(a + b + c)$ şi cum $9|9(11a + 11c + 2b)$ rămîne $9|2(a + b + c)$ deci $9|(a + b + c)$ deci $9|\overline{abc}$, deci $\overline{abc} \in A$ şi deci $B \subseteq A$.

Cum am arătat înainte că $A \subseteq B$, rezultă $A = B$.

5. Să se arate că fracţia $\dfrac{2a+1}{a^2+a}$ este ireductibilă, oricare ar fi a număr natural.

R. Scriem fracţia sub forma $\dfrac{2a+1}{a(a+1)}$. Dacă arătăm că $(2a + 1, a)_* = 1$ şi $(2a + 1, a + 1)_* = 1$, atunci va rezulta că fracţia este ireductibilă. Presupunem $(a, 2a + 1)_* = d$, $d \in \mathbb{N}$, deci există $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ aşa ca $a = dq_1$, $2a + 1 = dq_2$ şi $(q_1, q_2)_* = 1$. Din egalităţile anterioare rezultă $2dq_1 + 1 = dq_2$ din care se observă $1 = -2dq_1 + dq_2 = d(q_2 - 2q_1)$. Deci 1 este produsul numerelor d şi $q_2 - 2q_1$ dar acest lucru nu este posibil decît dacă $d = 1$ (căci $d \geqslant 1$) adică a şi $2a + 1$ sînt prime între ele (adică au cel mai mare divizor comun egal cu 1).

Analog, fie $(2a + 1, a + 1)_* = d_1$, $d_1 \in \mathbb{N}$, deci există $q_3, q_4 \in \mathbb{N}$ aşa ca $2a + 1 = q_3d_1$, $a + 1 = q_4d_1$. Înmulţind a doua egalitate cu 2 obţinem $2a + 2 = 2q_4d_1$ şi scăzînd-o pe prima, avem $2q_4d_1 - q_3d_1 = 1$, de unde $(2q_4 - q_3)d_1 = 1$, deci $d_1 = 1$, deci cel mai mare divizor comun al numerelor $2a + 1$ şi $a + 1$ este 1.

Cu aceasta problema este rezolvată.

6. Să se scrie prin enumerare elementele mulţimii:

$$A = \left\{ \frac{100}{x} \,\middle|\, \frac{11}{13} < \frac{100}{x} < \frac{17}{19};\ x \in \mathbb{N}^* \right\}$$

şi apoi să se afle elementele mulţimii $B = \{y, z, t, u, v\}$, cu y, z, t, u, v diferite între ele două cîte două, ştiind că sînt îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \supset B$ este o propoziţie falsă;

b) $A - B = \left\{\dfrac{100}{112}, \dfrac{100}{113}, \dfrac{100}{114}\right\}$;

c) $B \cup \left\{\dfrac{100}{113}, \dfrac{100}{114}, \dfrac{100}{119}\right\} = \left\{\dfrac{100}{113}, \dfrac{100}{114}, \dfrac{100}{115}, \ldots, \dfrac{100}{119}\right\}$.

(Mihai Doroftei, G.M., E: 6874)

R. Pentru a determina mulţimea A trebuie să determinăm $x \in \mathbb{N}^*$ pentru care au loc inegalităţile:

$$\frac{11}{13} < \frac{100}{x} < \frac{17}{19}.$$

Prima inegalitate, $\frac{11}{13} < \frac{100}{x}$, este echivalentă cu $11x < 13 \cdot 100$, de unde $x < \frac{13 \cdot 100}{11} = 118\frac{2}{11}$; inegalitatea $\frac{100}{x} < \frac{17}{19}$ este echivalentă cu $19 \cdot 100 < 17x$, de unde $\frac{1900}{17} < x$, sau $111\frac{13}{17} < x$. Deoarece $111\frac{13}{17} < x < 118\frac{2}{11}$ și $x \in \mathbb{N}^*$ rezultă $x \in \{112, 113, \ldots, 118\}$, deci:

$$A = \left\{\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{115}, \frac{100}{116}, \frac{100}{117}, \frac{100}{118}\right\}.$$

Să determinăm acum mulțimea B. Din condiția c) deducem $\frac{100}{115}, \frac{100}{116}, \frac{100}{117}, \frac{100}{118} \in B$, iar din a), $\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \frac{100}{114} \notin B$.

Cum, din c), avem $B \subset \left\{\frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \ldots, \frac{100}{119}\right\}$, putem avea doar $\frac{100}{119} \in B$, căci B are cinci elemente. Deci:

$$B = \left\{\frac{100}{115}, \frac{100}{116}, \frac{100}{117}, \frac{100}{118}, \frac{100}{119}\right\}.$$

7. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;

ii) $(B - A) \times (A - B) = \{(3, 1), (3, 4), (3, 7), (6, 1), (6, 4), (6, 7), (9, 1), (9, 4), (9, 7)\}$.

(Vasile Fărcășanu, G.M., E: 7 243)

R. Din definiția produsului cartezian a două mulțimi rezultă:

$$B - A = \{3, 6, 9\},$$
$$A - B = \{1, 4, 7\}.$$

Din definiția diferenței a două mulțimi rezultă $3, 6, 9 \in B$, $3, 6, 9 \notin A$, respectiv $1, 4, 7 \in A$, $1, 4, 7 \notin B$. Deoarece din i), $2, 5, 8, 10, 11, 12 \in A \cup B$ rezultă $2, 5, 8, 10, 11, 12 \in A$, $2, 5, 8, 10, 11, 12 \in B$ (nu putem avea de pildă, $2 \in A$, $2 \notin B$ căci ar rezulta $2 \in A - B$), deci $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

8. Se cer numerele de forma $\overline{abac}$ divizibile cu 5, astfel ca suma cifrelor să dea un număr format cu cifre identice, cu $a \neq b \neq c \neq a$.

(Violeta-Luminița Safta, G.M., E: 7 244)

R. Orice număr divizibil cu 5 se termină în 0 sau 5 deci $c \in \{0, 5\}$. Deci numerele căutate trebuie să se găsească printre cele de forma $\overline{aba0}$ sau $\overline{aba5}$. Cum suma cifrelor, în primul caz, este mai mică sau egală cu $9+9+9+0=27$, iar în al doilea cu $9+9+9+5=32$, rezultă din enunț că această sumă este sau 11, sau 22. Pentru numerele de forma $\overline{aba0}$ avem situațiile:

i) $a+b+a=11$,

ii) $a+b+a=22$.

În cazul i), cum $a+a=2a$ este par, b trebuie să fie impar. Pentru $b=1$ obținem $a=5$, pentru $b=3$, avem $a=4$, $b=5$ conduce la $a=3$, lui $b=7$ îi corespunde $a=2$, iar lui $b=9$ îi corespunde $a=1$ deci obținem numerele 5150, 4340, 3530, 2720, 1910.

În cazul ii), b trebuie să fie par (cînd $b=0$ avem $a=11$ care nu convine). Cazul $b=2$ nu este bun căci conduce la $a=10$. Pentru $b=4$ avem $a=9$, pentru $b=6$ avem $a=8$, $b=8$ conduce la $a=7$. Obținem deci numerele 9490, 8680, 7870.

O discuție analoagă pentru numerele de forma $\overline{aba5}$ conduce la numerele 8185, 7375, 4945, 1415.

9. Să se demonstreze că numărul:

$$N = 2^{n+2} \cdot 5^n \cdot 11^{n+1} + 2^{3n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 7,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, se divide cu 43.

(Ilie Florescu, G.M., E: 7 250)

R. Avem:

$$N = 2^n \cdot 2^2 \cdot 5^n \cdot 11^n \cdot 11 + 2^{3n} \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 7 =$$
$$= 44 \cdot 2^n \cdot 5^n \cdot 11^n \cdot 42 \cdot (2^3)^n \cdot 3^n =$$
$$= (43+1)2^n \cdot 5^n \cdot 11^n + (43-1) \cdot 8^n \cdot 3^n = (43+1) \cdot 110^n +$$
$$+ (43-1) \cdot 24^n = 43 \cdot 110^n + 110^n + 43 \cdot 24^n - 24^n =$$
$$= \mathcal{M}43 + 110^n - 24^n = \mathcal{M}43 + (2 \cdot 43 + 24)^n - 24^n = \mathcal{M}43 +$$
$$+ \mathcal{M}43 + 24^n - 24^n = \mathcal{M}43.$$

Am folosit relația $(a+b)^n = \mathcal{M}a + b^n$.

10. Să se afle x și y numere naturale care verifică egalitatea:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}.$$

(Aurel Doboșan, G.M., E: 6 958)

R. Avem $1\,980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ deci $\sqrt{1\,980} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2}\sqrt{5 \cdot 11} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{55} = 6\sqrt{55}$. Acest număr poate fi scris în mai multe feluri:

1) $0\sqrt{55} + 6\sqrt{55} = 6\sqrt{55}$, deci $x = 0$, $y = 1\,980$, sau $x = 1\,980$, $y = 0$;

2) $1\sqrt{55} + 5\sqrt{55} = 6\sqrt{55}$, deci $x = 55$, $y = 1\,375$, sau $x = 1\,375$, $y = 55$;

3) $2\sqrt{55} + 4\sqrt{55} = 6\sqrt{55}$, deci $x = 220$, $y = 880$, sau $x = 880$, $y = 220$;

4) $3\sqrt{55} + 3\sqrt{55} = 6\sqrt{55}$, deci $x = y = 495$.

Există, prin urmare, 7 soluții (x, y) și anume $(0, 1\,980)$; $(55, 1\,375)$; $(220, 880)$; $(495, 495)$; $(880, 220)$; $(1\,375, 55)$; $(1\,980, 0)$.

11. Să se determine cifrele x și y pentru care numărul din sistemul zecimal $\overline{xyx(y-1)}$ este pătrat perfect.

(Aurel Doboșan, G.M., E: 7307)

R. Un număr care este pătrat perfect se termină în una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Atunci y ar putea fi 1, 2, 5, 6 sau 7. Numerele căutate se găsesc, deci, printre numerele $\overline{x1x0}$, $\overline{x2x1}$, $\overline{x5x4}$, $\overline{x6x5}$, $\overline{x7x6}$. Pentru numărul $\overline{x1x0}$ să observăm că, terminîndu-se în 0, el poate fi pătratul unui număr a care se termină în 0. În acest caz, a^2 se termină în 00, deci $x = 0$, care nu convine. Pentru un număr care se termină în 5, pătratul său se termină în 25, deci numărul $\overline{x6x5}$, dacă este pătrat perfect, trebuie să avem $x = 2$ care conduce la 2625 care nu este pătrat perfect. Pentru numerele $\overline{x5x4}$ și $\overline{x7x6}$ făcînd pe x să parcurgă mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obținem singurul caz convenabil $x = 8$ care conduce la pătratul perfect $8\,281 = 91^2$.

12. Să se determine toate fracțiile de forma $\dfrac{\overline{8y4x}}{\overline{x3y}}$ astfel încît ele să se simplifice cu 18. Numerele sînt scrise în baza 10.

(Ștefan Smarandache, G.M., E: 7 309)

R. Se știe că un număr natural este divizibil cu 18 dacă este divizibil cu 2 și cu 9. Numărătorul fracției considerate este divizibil cu 2 dacă $x \in \{2, 4, 6, 8\}$, căci $x \neq 0$, și este divizibil cu 9 cînd $8 + y + 4 + x$ este un număr divizibil cu 9, adică atunci cînd $x + y + 3$ se divide cu 9, deci cînd $(x, y) \in \{(2, 4), (4, 2), (6, 0), (6, 9), (8, 7)\}$ (am ținut seama și de faptul că x este par).

Numitorul este divizibil cu 2 cînd $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și este divizibil cu 9 cînd $x + y + 3$ se divide cu 9, deci cînd $(x, y) \in \{(0, 6), (2, 4), (4, 2), (6, 0), (7, 8), (9, 6)\}$ (am ținut seama că y este par). Deci fracția dată se simplifică cu 18 atunci cînd $(x, y) \in \{(2, 4), (4, 2), (6, 0), (6, 9), (8, 7)\} \cap \{(0, 6), (2, 4), (4, 2), (6, 0), (7, 8), (9, 6)\} = \{(2, 4), (4, 2), (6, 0)\}$.

Fracțiile căutate sînt:

$$\frac{8\,442}{234}, \quad \frac{8\,244}{432}, \quad \frac{8\,046}{630}.$$

13. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încît să existe egalitatea:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^n - (16^{631})^2 = 3 \cdot 4^{2\,524}$$

(Stela Tomulescu, G.M., E: 7 309)

R. Să calculăm mai întîi suma:

$$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n.$$

Avem şi:

$$S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$

Adunînd aceste ultime două egalităţi membru cu membru găsim:

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ termeni}} = n(n+1)$$

căci $n + 1 = (n-1) + 2 = (n-2) + 3 = \ldots = 2 + (n-1) = 1 + n$.
De aici rezultă $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Deci:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^n = 2^{1+2+3+\ldots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

şi egalitatea devine:

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 16^{1\,262} = 3(2^2)^{2\,524}$$

sau:

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} - (2^4)^{1\,262} = 3(2^2)^{2\,524}$$

sau încă:

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{5\,048} + 3 \cdot 2^{5\,048} = 4 \cdot 2^{5\,048} = 2^2 \cdot 2^{5\,048} = 2^{5\,050}$$

de unde:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5\,050$$

sau $n(n+1) = 10\,100$. De aici rezultă $n = 100$.

14. Să se determine numerele naturale mai mici decît 200 care au proprietatea că suma resturilor împărţirii lor la 5 şi 6 este egală cu 8.

(Ilie Bălăşan, G.M., E: 7 311)

R. Fie n un astfel de număr, $n < 200$. Din teorema împărţirii cu rest, există numerele naturale q, q_1, r, r_1 astfel ca:

$$n = 5q + r, \ 0 \leqslant r < 5,$$

$$n = 6q_1 + r_1, \ 0 \leqslant r_1 < 6.$$

Din $r < 5$, $r_1 < 6$ rezultă $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $r_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel că relația $r + r_1 = 8$ este verificată de perechile $(3, 5)$, $(4, 4)$.

a) Dacă $r = 3$, $r_1 = 5$, obținem $n = 5q + 3 = 6q_1 + 5$ deci $5q = 6q_1 + 2$. Cum $n < 200$, rezultă și $5q + 3 < 200$ deci $5q < 197$ sau $q < 197 : 5 = 39\frac{2}{5}$, deci $q \in \{0, 1, \ldots, 39\}$, respectiv $6q_1 + 5 < 200$, adică $6q_1 < 195$, deci $q_1 < 195 : 6 = 32\frac{2}{3}$, deci $q_1 \in \{0, 1, \ldots, 32\}$. Din $5q = 6q_1 + 2$ rezultă $5|6q_1 + 2$, sau $5|5q_1 + (q_1 + 2)$ deci $5|q_1 + 2$, adică $q_1 \in \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$. Deci $5q \in \{20, 50, 80, 110, 140, 170\}$ deci $q \in \{4, 10, 16, 22, 28, 34\}$. În acest caz obținem numerele $n \in \{23, 53, 83, 113, 143, 173\}$.

Cazul $r = r_1 = 4$ se tratează analog, obținînd $n = 5q + 4 = 6q_1 + 4$, deci $5q = 6q_1$, deci $5|6q_1$, adică $q_1 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. Discuția o lăsăm pe seama cititorilor.

15. Să se găsească toate numerele de două cifre, scrise în baza 10, care se divid simultan prin suma și produsul cifrelor lor.

(Dumitru Acu, G.M., E: 5 990)

R. Mai întîi vom găsi numerele $\overline{ab}$ de două cifre, scrise în baza 10, care se divid la produsul cifrelor lor. Se observă că b nu poate fi 0 deoarece împărțirea la zero nu are sens.

Din $ab|(10a + b)$ și $a|10a$ rezultă $a|b$, tot din $ab|(10a + b)$ și din $b|b$ rezultă $b|10a$. Din $b|10a$ și $a|b$ rezultă că $a = b$ sau b are ca divizori pe 2 sau 5. Dacă $a = b$ obținem numărul $\overline{aa} = a \cdot 11$, care, atunci cînd se divide cu $a \cdot a = a^2$, conduce la $a = 1$.

Dacă b are ca divizor pe 2, atunci b poate lua valorile 2, 4, 6 sau 8.

Pentru $b = 2$, ținînd seama că $a|b$, deducem că a poate lua valorile 1 sau 2. Dintre numerele 12 și 22 numai 12 se divide cu produsul cifrelor sale: $1 \cdot 2 = 2$.

Pentru $b = 4$ se găsește numărul 24.

Pentru $b = 6$ se găsește numărul 36.

Pentru $b = 8$ nu se găsește nici o soluție.

Prin urmare, mulțimea numerelor de două cifre care se divide prin produsul lor este $\{11, 12, 24, 36\}$.

Dintre numerele găsite numai 12, 24 și 36 se divid și prin suma cifrelor lor.

16. Să se determine $a \in \mathbb{N}$ pentru care fiecare din fracțiile:

$$\text{i)}\ \frac{5a - 2}{11}, \qquad \text{ii)}\ \frac{96}{3a - 4}$$

este supraunitară și are partea întreagă egală cu 3.

(Romeo Munteanu, G.M., E: 7 339)

R. i) Avem:

$$3 \leqslant \frac{5a-2}{11} < 4,$$

deci $33 \leqslant 5a - 2 \leqslant 44$ sau, adunînd pe 2 tuturor termenilor dublei inegalități, $35 \leqslant 5a \leqslant 46$ deci, prin împărțire cu 5, $7 \leqslant a < \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$, deci $a \in \{7, 8, 9\}$. Pentru fiecare din aceste valori, fracția $\frac{5a-2}{11}$ este supraunitară.

ii) Din:

$$3 \leqslant \frac{96}{3a-4} < 4$$

găsim:

$$\frac{96}{4} < 3a - 4 \leqslant \frac{96}{3}$$

adică $24 < 3a - 4 \leqslant 32$, sau $28 < 3a \leqslant 36$, adică $9\frac{1}{3} < a \leqslant 12$, deci $a \in \{10, 11, 12\}$. Pentru fiecare din aceste valori, fracția $\frac{96}{3a-4}$ este supraunitară.

17. Să se determine toate numerele naturale de două cifre, scrise în baza zece, pentru care suma dintre număr și răsturnatul său este un pătrat perfect.

(D. Acu, G.M., E: 7 342)

R. Fie $\overline{xy}$ numerele căutate. Avem $\overline{xy} + \overline{yx} = (10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y = 11\ (x + y)$. Cum $x + y \leqslant 18$ și $11(x + y)$ este pătrat perfect, rezultă $x + y = 11$; obținem numerele 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65.

18. Să se scrie toate numerele de forma $\overline{xyxy}$ divizibile cu 15.

(Constantin Badea, G.M., E: 7 025)

R. Avem $\overline{xyxy} = y + 10x + 100y + 1\,000x = 1\,010x + 101y = 101(10x + y) = 101\ \overline{xy}$. Cum $(101, 15)_* = 1$, rezultă $\overline{xy}$ divizibile prin 15, deci $\overline{xy}$ poate fi oricare din numerele 15, 30, 45, 60, 75, 90.

Atunci $\overline{xyxy} \in \{1\,515, 3\,030, 4\,545, 6\,060, 7\,575, 9\,090\}$.

19. Să se determine cifrele a și b ale numărului natural $n = \overline{123ba}$ astfel încît să îndeplinească simultan condițiile:

i) a și b sînt numere consecutive;

ii) n se divide cu 6 dar nu se divide cu 9 ;

iii) Suma $a + b$ este strict mai mică decît 10.

(Paraschiva Ciobanu, G.M., E : 7 371)

R. Din condiția i) rezultă $b = a + 1$. Din ii) rezultă $2|n$, $3|n$ și 9 nu divide pe n, deci $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $1 + 2 + 3 + b + a$ se divide la 3, dar nu se divide la 9. Deci $a + b + 6 \vdots 3$ și cum $a + b < 10$ rezultă $6 < a + b + 6 < 16$ deci $a + b + 6 = 12$ (cazul $a + b + 6 = 9$ nu convine, numărul nefiind divizibil cu 9), sau $a + b + 6 = 15$. În primul caz, avînd în vedere că $b = a + 1$, rezultă $a + (a + 1) + 6 = 12$ de unde $2a + 7 = 12$ sau $2a = 12 - 7 = 5$, deci $a = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$. În cazul al doilea, $a + (a + 1) + 6 = 15$, deci $2a + 7 = 15$, sau $2a = 15 - 7 = 8$, deci $a = 4$ și deci $b = 5$. Se obține numărul 12 354.

20. Demonstrați că din trei numere naturale pătrate perfecte se pot alege două care au diferența divizibilă cu patru.

(N. Păuna, G.M., E : 7 376)

R. Oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ el poate fi scris sub una din formele $x = 2k$ sau $x = 2k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$. În primul caz, $x = 4k^2$, iar în al doilea $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$. Deci, prin împărțirea cu 4, pătratul unui număr dă restul 0 sau restul 1. Din trei numere naturale pătrate perfecte, există două care prin împărțirea la 4 dau același rest (fie 0, fie 1). În orice caz, diferența lor dă prin împărțirea la 4 restul 0, ceea ce demonstrează enunțul.

21. Un elev din clasa a V-a, fiind întrebat cîți băieți și cîte fete sînt în școala sa, a răspuns :

— Numărul băieților, este cel mai mic multiplu comun al elementelor unei mulțimi A, iar numărul fetelor este, de asemenea, cel mai mic multiplu comun al elementelor unei mulțimi B astfel încît :

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$,

ii) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$,

iii) $A - B = \{4, 8, 9\}$.

Să se afle totalul elevilor, exprimat printr-un număr în baza 2.

(Ilie Florescu, G.M., E : 7 403)

R. Din condiția ii) rezultă $1, 2, 3, 6 \in A$, iar din ii), că $4, 8, 9 \in A$, deci $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \subset A$. Cum, din i), $A \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, rezultă $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Din ii) mai rezultă $1, 2, 3, 6 \in B$, iar din ii), $4, 8, 9 \notin B$. Avînd în vedere i), găsim $B = \{1, 2, 3, 6\}$.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 este 72, iar al numerelor 1, 2, 3, 6 este 6. Deci numărul total de elevi este

$72 + 6 = 78$. Avem schema:

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r}
78 & 2 & & & & & \\
6 & 39 & 2 & & & & \\
18 & 2 & 19 & 2 & & & \\
18 & 19 & 18 & 9 & 2 & & \\
0 & 18 & 1 & 8 & 4 & 2 & \\
 & 1 & & 1 & 4 & 2 & 2 \\
 & & & & 0 & 2 & 1 \\
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

deci $78 = 1001110_{(2)}$.

22. Să se găsească toate perechile de numere naturale a căror sumă este 87 şi pentru care 87 este divizibil cu diferenţa lor.

(Ionel Atanasiu, G.M., E: 7 404)

R. Notăm cu a şi b cele două numere naturale. Atunci $a + b = 87$, iar 87 este divizibil cu $a - b$. În acest caz, $a - b$ poate fi 1, 3, 29, 87. Avem deci situaţiile:

1) $\begin{cases} a + b = 87 \\ a - b = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a + b = 87 \\ a - b = 3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} a + b = 87 \\ a - b = 29 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} a + b = 87 \\ a - b = 87 \end{cases}$.

Adunînd, în fiecare caz, membru cu membru cele două egalităţi obţinem pentru a ecuaţiile:

1) $2a = 88$; 2) $2a = 90$; 3) $2a = 116$; 4) $2a = 174$ care conduc la:

1) $a = 44$, $b = 43$; 2) $a = 45$, $b = 42$; 3) $a = 58$, $b = 29$; 4) $a = 87$, $b = 0$.

23. Comparaţi numerele:

$$A = a \cdot a^2 \cdot a^3 \ldots \cdot a^{1\,980}, \quad B = (a^{990})^{1\,981},$$

unde $a \in \mathbb{N}$.

(Nicolae Ivăşchescu, G.M., E: 7 405)

R. Avem:

$$A = a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^{1\,980} = a^{1+2+3+\ldots+1\,980} = a^{\frac{1\,980(1\,980+1)}{2}} = a^{1\,981 \cdot 990}$$

(v. problema 13). Deci $A = B$.

24. Să se determine numerele naturale, consecutive, a și b, astfel încît:

$$(\overline{aa})^2 + (\overline{ab})^2 - \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981.$$

(Marius Dicu, G.M., E: 7 407)

R. La relația din enunț adăugăm și scădem pe $\overline{aa} \cdot \overline{ab}$. Obținem:

$$(\overline{aa})^2 + (\overline{ab})^2 - \overline{aa} \cdot \overline{ab} - \overline{aa} \cdot \overline{ab} + \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981.$$

Grupăm și dăm factor comun astfel:

$$\overline{aa}(\overline{aa} - \overline{ab}) + \overline{ab}(\overline{ab} - \overline{aa}) + \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981$$

care mai poate fi scrisă astfel:

$$\overline{ab}(\overline{ab} - \overline{aa}) - \overline{aa}(\overline{ab} - \overline{aa}) + \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981$$

sau, dînd factor comun pe $\overline{ab} - \overline{aa}$:

$$(\overline{ab} - \overline{aa})(\overline{ab} - \overline{aa}) + \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981$$

de unde, cum a și b sînt consecutive, rezultă $\overline{ab} - \overline{aa} = 1$, deci:

$$1 \cdot 1 + \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981$$

sau:

$$\overline{aa} \cdot (\overline{aa} + 1) = 1\,980.$$

Găsim, descompunînd convenabil pe 1980, că $1980 = 44 \cdot 45$ deci $a = 4$, $b = 5$. Altă descompunere nu convine, căci dacă un factor descrește, celălalt trebuie să crească.

25. Este posibil ca, folosind o balanță și o masă marcată de 100 g, să se extragă numai prin două folosiri a balanței, 675 g din 3 kg?

(I. Ciorbă, G.M., E: 7408)

R. Răspunsul este afirmativ. Se așează masa de 100 g într-unul din talere, apoi se distribuie pe cele două talere cele 3 kg astfel ca balanța să se echilibreze. În urma acestei operații, în talerul în care se găsește masa marcată de 100 g mai sînt 1450 g, iar în celălalt taler 1550 g. Se îndepărtează cele 1550 g din al doilea taler și se reechilibrează balanța mutînd substanță din primul taler în al doilea. Acum în primul taler se vor afla 675 g substanță, iar în al doilea 775 g.

26. Pentru ce numere naturale n, numerele $2^{3n} + 2$ și $3^{2n} + 1$ sînt simultan divizibile cu 10?

(Ștefan A Smarandache, G.M., E: 7 051)

R. Cele două numere se mai scriu $(2^3)^n + 2 = 8^n + 2$ și $(3^2)^n + 1 = 9^n + 1$. Avem $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$ etc., deci orice putere impară a lui 9, 9^n se termină în 9, iar orice putere pară se termină în 1. Deci $9^n + 1$ se divide cu 10 cînd n este impar. Pe de altă parte, $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4\,096$, $8^5 = 32\,768$ după care ultima cifră a puterilor lui 8 se repetă. Deci 8^{4k+1}, $k \in \mathbb{N}$, se termină în 8, deci $8^{4k+1}+2$ se termină în 0.

Deci numerele n căutate sînt de forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

27. Să se reconstituie adunarea:

$$\begin{array}{r} B\,A\,R\,A\,R\,E\,+ \\ A\,R\,A\,R\,E\,+ \\ R\,A\,R\,E\,+ \\ A\,R\,E\,+ \\ R\,E\,+ \\ E \\ \hline 5\,*\,0\,*\,4\,2 \end{array}$$

(literele și $*$ reprezintă cifre în baza zece). Cifrele înlocuite prin litere sînt diferite de 0 și diferite între ele.

(Aurel Doboșan, G.M., E: 7 053)

R. Cum $6E$ se termină cu 2, rezultă că E poate fi 2 sau 7; $E = 2$ nu corespunde, deoarece ar rămîne o unitate de ordin superior care scăzută din 4 dă cifra zecilor terminată cu 3 care nu poate fi $5R$. Deci $E = 7$. Deci $6E = 42$. Scăzînd cifra zecilor, 4, rezultă că $5R$ se termină în 0, adică R poate fi 2, 4, 6 sau 8. Să observăm că la ordinul miilor apare 0 care se obține din ultima cifră a lui $3R$ la care se adaugă unitățile de transfer. Dar $4A \leqslant 36$, deci putem transfera la mii cel mult trei unități ($A \neq 0$). Pentru a obține la ordinul miilor 0, trebuie ca $R = 6$ ($R = 2$, de exemplu conduce la $3R = 6$, dar nu avem patru unități pentru a obține 0).

Pentru a obține 0 la ordinul miilor ne trebuie două unități de transfer, adică $4A + 3 \geqslant 20$ (cele trei unități s-au transferat de la adunarea $6 + 6 + 6 + 6 + 6$), deci $A > 4$.

Pe de altă parte, $4A + 3 < 30$, deci $A \leqslant 6$. Cum $R = 6$ și $A \neq R$, rămîne $A = 5$. Înlocuind în schemă, rezultă $B = 4$.

Deci schema arată astfel:

$$\begin{array}{r} 456567 \\ 56567 \\ 6567 \\ 567 \\ 67 \\ 7 \\ \hline 520342 \end{array}$$

28. Să se rezolve ecuația:

$$a[(a + 1)^3 + (a + 2)^3 + (a + 3)^2(a + 4)^2] - 1982 = 0, \text{ unde } a \in \mathbb{N}.$$

(Monica Ștefan, G.M., E: 7 054)

R. Ecuația se mai scrie:

$$a[(a+1)^3+(a+2)^3+(a+3)^2(a+4)^2]=2\cdot 991=1\cdot 1\,982.$$

Cum a este strict mai mic decît paranteza dreaptă (căci a, de pildă, este strict mai mic decît $a+1$ deci decît $(a+1)^3$) iar 991 este număr prim, rezultă sau $a=1$, sau $a=2$.

Verifică $a=2$.

29. Să se arate că oricare ar fi $n\in \mathbb{N}^*$, atunci numărul:

$$2^{2n+1}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{n+1}+4^n\cdot 3^{2n}\cdot 5^n$$

se divide cu 1 980.

(N. Ivășchescu, G.M., E: 6897)

R. Avem:

$$2^{2n+1}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{n+1}+4^n\cdot 3^{2n}\cdot 5^n=2^{2n}\cdot 2\cdot 3^{2n}\cdot 5^n\cdot 5+(2^2)^n\cdot 3^{2n}\cdot 5^n=$$

$$=10\cdot 2^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 5^n+2^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 5^n=11\cdot 4^n\cdot 9^n\cdot 5^n=11\cdot(4\cdot 9\cdot 5)^n=$$

$$=11\cdot 180^n=11\cdot 180\cdot 180^{n-1}=1\,980\cdot 180^{n-1},$$

ceea ce dovedește enunțul.

30. i) Să se calculeze numerele a și b în bazele respective:

$$a=1132_4:\{33100_4-333_4\cdot[1210220_4:(2233_4+103_4\cdot 33_4)]+33_4\};$$

$$b=(34_5\cdot 24_5-32343_5:34_5-1040_5)^2.$$

ii) Să se exprime în baza 10 numerele a^2+b^2, $(a+b)^2$, unde a și b sînt numerele naturale de la punctul i).

(Corina și Doina Gruia, G.M., E: 6 898)

R. i) Avem $33_4=3+3\cdot 4=15$, $103_4=3+0\cdot 4+1\cdot 4^2=19$, $2233_4=3+3\cdot 4+2\cdot 4^2+2\cdot 4^3=175$ etc. Obținem, după calcule, $a=16=100_4$, $b=16=31_5$.

ii) Avem $a^2+b^2=512$, $(a+b)^2=1\,024$.

31. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele fracții:

$$\frac{7}{10},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{20},\ldots,\frac{1\,983}{9\,890},\ \frac{1\,984}{9\,895}.$$

(Iulian Mazilu, G.M., E: 6 873)

R. Observăm că fiecare fracție se scrie ca o sumă de două fracții, și anume:

$$\frac{7}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5},$$

$$\frac{8}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{20}=\frac{5+4}{20}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5},$$

. . . .

$$\frac{1983}{9890}=\frac{5+1978}{9890}=\frac{5+1978}{5\cdot 1978}=\frac{1}{1978}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{1984}{9895}=\frac{5+1979}{9895}=\frac{5+1979}{5\cdot 1979}=\frac{1}{1979}+\frac{1}{5}.$$

Rezultă că în scrierea fiecărei fracţii ca o sumă de două fracţii, apare aceeaşi fracţie 1/5. Rămîne să comparăm şirul format din fracţiile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1978}, \frac{1}{1979}$, cea mai mare fiind cea care are numitorul cel mai mic.

Deci :

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{1978}>\frac{1}{1979}$$

deci :

$$\frac{1984}{9895}<\frac{1983}{9890}<\ldots<\frac{9}{20}<\frac{8}{15}<\frac{7}{10}.$$

32. Să se determine numărul de patru cifre $\overline{abcd}$, scris în baza zece, ştiind că este divizibil cu 80, iar cifrele sale verifică egalitatea :

$$a+d=b+c=9$$

(Alexe Dumitrescu, G.M., E : 6 926)

R. Numărul $\overline{abcd}$ fiind divizibil cu 80, este divizibil şi cu divizorii naturali ai lui 80. Aceşti divizori sînt : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

Fiind divizibil cu 10, numărul dat are ultima cifră 0, deci $d=0$ şi cum $a+d=9$ rezultă $a=9$. Aşadar numărul căutat este de forma $\overline{9bc0}$. Deoarece el se divide cu 80, rezultă că $\overline{9bc}$ se divide la 8 deci c trebuie să fie par, $c\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Pentru $c=0$ obţinem $\overline{9bc}=990$ (căci $b+c=9$, deci $b+0=9$, adică $b=9$), dar 990 nu se divide la 8.

Pentru $c=2$ avem $b+2=9$, adică $b=7$ deci $\overline{9bc}=972$ care nu se divide la 8.

Pentru $c = 4$ avem $b + 4 = 9$, adică $b = 5$, deci $\overline{9bc} = 954$ care nu se divide la 8.

Pentru $c = 6$ avem $b + 6 = 9$, adică $b = 3$, deci $\overline{9bc} = 936$ care se divide la 8.

Pentru $c = 8$ avem $b + 8 = 9$, adică $b = 1$, deci $\overline{9bc} = 918$ care nu se divide la 8.

În concluzie, numărul căutat este 9360.

33. Să se găsească exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului $A = 101 \times 102 \times 103 \times \ldots \times 200$.

(Gh. Surcel, G.M., E: 6 923)

R. Observăm că numărul se mai scrie:

$$A = 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100} =$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 199)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 2^{100}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 199 \cdot 2^{100}$$

ceea ce arată că exponentul lui 2 în descompunerea lui A în factori prim este 100.

34. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel încît să avem:

$$\{x - (3^2 - 2^2) \cdot [3^{2^2} \cdot (3^2 - 2^2) - (3^2 + 2)]\} \cdot \{x - (3^2 + 2) \cdot$$
$$\cdot [3 + 2^{2^2} \cdot (3^2 + 2)]\} \cdot \{x - 3^3 \cdot [(3^2 - 2^2)^2 \cdot 3 - 2]\} =$$
$$= 2[2^2(2^2 - 1) - 1](2^2 - 1)^2(2^2 + 1)$$

(C. Mituțoiu, G.M., E: 6871)

R. Efectuînd calculele numerice egalitatea devine:

$$(x - 1\,969)(x - 1\,970)(x - 1\,971) = 990 = 11 \cdot 10 \cdot 9.$$

Cum în primul, respectiv al doilea membru avem produse de trei numere consecutive, rezultă $x - 1\,969 = 11$, deci $x = 1\,980$.

35. Să se determine cifrele x, y ale numărului $\overline{1x2y3x4y}$ scris în baza zece, știind că acesta este divizibil cu 33.

(Liviu Pîrșan, G.M., E: 6 924)

R. Folosind criteriul de divizibilitate cu 11 și cu 3 găsim:

$$(y - 4 + x - 3 + y - 2 + x - 1) \vdots 11,$$

adică $(x + y - 5) \vdots 11$ deci $x + y - 5 = 0$ sau $x + y - 5 = 11$. Din condiția :

$$(1 + x + 2 + y + 3 + x + 4 + y) \vdots 3$$

deducem $2(x + y + 5) \vdots 3$. Perechile (x, y) care verifică ambele condiții sînt (7, 9) și (9, 7). În adevăr, dacă $x + y - 5 = 0$, atunci $x + y = 5$ și $2(x + y + 5) = 2(5 + 5) = 20$ dar 20 nu se divide la 3. Rămîne $x + y - 5 = 11$, adică $x + y = 16$ care este verificată (avînd în vedere că x și y sînt cifre) de perechile de numere scrise mai sus.

Deci numerele din enunț divizibile cu 33 sînt :

17 293 749, 19 273 947

36. Să se determine numărul de trei cifre distincte și nenule $\overline{abc}$, scris în baza zece, care împărțit prin răsturnatul său $\overline{cba}$ dă cîtul 6 și restul 97.

(Costea Dragomir, G.M., E : 6 956)

R. Evident, c nu poate fi mai mare decît 2 căci altfel cum maximul lui a este 9, cîtul împărțirii ar fi mai mic decît 5. Deci $c = 1$. De asemenea, $a > 6$, căci dacă $a = 6$, cum $b \neq 1$ (căci $b \neq c$), atunci $\overline{cba} = \overline{1b6}$ și $\overline{1b6} \cdot 6 > 700$.

Pe de altă parte, $(\overline{ab1} - 97) : \overline{1ba} = 6$. Dar $\overline{ab1} - 97$ este de forma $\overline{ed4}$ deci $\overline{ed4} : \overline{1ba} = 6$, de unde $a \in \{4, 9\}$ (căci numai 4 și 9 dau prin înmulțire cu 6 un număr terminat în 4). Cum $a > 6$, rezultă $a = 9$. Deci $(\overline{9b1} - 97) : \overline{1b9} = 6$ sau $\overline{8d4} : \overline{1b9} = 6$ sau $\overline{8d4} = \overline{1b9} \cdot 6$. Prin înmulțirea lui 9 cu 6 rezultă 54 deci $6b + 5$ este egal cu $\overline{2d}$. Acest lucru se poate întîmpla cînd $b = 3$ sau $b = 4$. Convine $b = 3$, deci $\overline{abc} = 931$.

37. În șirul de cifre 19796 ..., fiecare cifră după 6 este ultima cifră a sumei predecentelor patru cifre (următoarea cifră în șirul indicat este 1, deoarece $9 + 7 + 9 + 6 = 31$). Formăm, în felul acesta, un șir infinit pe care-l împărțim în grupe de cîte 5. Arătați că în primele 626 de astfel de grupe de cîte cinci cifre, există două care au aceleași grupe de 4 cifre impare, în aceeași ordine, iar grupul 1 984 nu apare niciodată.

R. Dacă luăm în considerare numai paritatea cifrelor, simbolizînd cu P cifrele pare și cu I pe cele impare, șirul se poate transcrie astfel :

$$IIII\ P\ IIII\ P\ IIII\ P\ IIII\ P \ldots$$

Avem, astfel, grupuri de patru cifre impare, apoi o cifră pară (suma a patru cifre impare fiind un număr par), și, de aceea, grupul 1984 nu poate apărea în scrierea șirului, avînd două cifre pare consecutive.

Deoarece putem forma numai $5^4 = 625$ grupuri diferite de 4 cifre impare (căci avem la dispoziție cifrele 1, 3, 5, 7, 9), în primele 626 grupuri de tipul $IIIIP$ există două grupuri cu aceleași cifre impare, în care și cifrele P vor fi egale.

38. Scrieţi la rînd numerele $1, 2, 3, \ldots, 1\,979$ (de la 1 la 1 979). Luaţi la întîmplare oricare două numere din acest şir şi înlocuiţi-le cu modulul diferenţei lor.

La fiecare operaţie, numărul numerelor din şir scade cu unu (fiindcă am înlocuit două numere cu unul), şi vom obţine, în final, un singur număr. Arătaţi că acest număr este par.

R. La fiecare pas al procedeului descris, numărul numerelor impare din şir rămîne neschimbat sau descreşte cu doi, deoarece, în primul caz, dacă luăm un număr par şi unul impar, modulul diferenţei lor este impar, deci numărul impar l-am înlocuit cu altul impar, iar în al doilea, dacă luăm două numere impare, modulul diferenţei lor este număr par, deci numărul numerelor impare scade cu doi. Astfel, cum în şirul iniţial de numere avem un număr de $\frac{1}{2}(1 + 1\,979) = 990$ numere impare, la fiecare pas rămîne un număr par de numere impare, astfel că ultimul număr este neapărat un număr par.

39. Cavalerii legendarului rege ARTHUR au organizat un turnir în care fiecare se luptă cu fiecare. La sfîrşitul luptelor, regele a remarcat că fiecare doi cavaleri au fost învinşi de un al treilea. Care este numărul minim de cavaleri participanţi la turnir?

R. Vom arăta că la acest turnir au participat cel puţin 7 cavaleri. Să presupunem că au participat numai 6 cavaleri şi să notăm cu A şi B 2 cavaleri la întîmplare, C cavalerul ce a învins pe A şi B, D pe cel ce a învins pe B şi C, E pe cel ce învinge pe C şi D, iar F învingătorul lui D şi E.

Atunci F şi D nu pot fi învinşi de B, C, E, deci pot fi învinşi de A, iar B poate fi învingătorul lui A şi F. Dar, în acest caz, B şi E nu au învingător (la fel F şi C).

40. Determinaţi un număr de cinci cifre care împărţit la 4 dă drept cît răsturnatul numărului iniţial.

R. Fie $y = \overline{ABCDE}$ şi $x = \overline{EDCBA}$ cu proprietatea că $y = 4x$.

Cum $y < 100\,000$, rezultă $x < 25\,000$, astfel că E poate fi 0, 1 sau 2. Dar y este par, căci y se împarte exact la 4, deci rezultă că E este 0 sau 2, însă, cum x are cinci cifre, avem $E \neq 0$, deci $E = 2$. Deoarece $y = 4x$, atunci E este egal cu ultima cifră a numărului $4A$, deci A poate fi 3 sau 8; cum însă $x \geqslant 20\,000$ şi $y \geqslant 80\,000$, rezultă $A = 8$.

Deoarece $y \neq 89\,992$ rezultă $x = \frac{y}{4} \leqslant 22\,498$ şi cum $x \geqslant 20\,008$, rezultă că D este 0, 1 sau 2. Cum $y = 4x$, D va fi ultima cifră a numărului impar $4B+3$, deci $D=1$. Pe de altă parte, $4B+2$ este multiplu de 10, deci B este 2 sau 7. Dar:

$$21\,008 \leqslant x \leqslant 21\,998 \text{ şi } 84\,032 \leqslant y \leqslant 87\,992$$

şi deci $B=7$. Din relaţia:

$$4 \cdot \overline{21C78} = \overline{87C12}$$

se obţine imediat $C=9$, astfel că numărul căutat este 87 912.

41. Se dau n saci, fiecare conţinînd acelaşi număr de mere. În prima zi se ia un măr dintr-unul din saci. Apoi, a doua zi, se ia cîte un măr din 2 saci oarecare, şi aşa mai departe, în a n-a zi se ia cîte un măr din fiecare din cei n saci. În acest moment toţi sacii sînt goi.

Pentru ce n întreg, este aceasta posibil şi cîte mere sînt în fiecare sac? Este întotdeauna posibilă problema?

R. În total, se iau:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

mere din saci.

Atunci n divide $\frac{n(n+1)}{2}$, deci $\frac{n+1}{2}$ este întreg, adică $n+1$ este par.

Deci, n este impar, iar în fiecare sac se află $\frac{n+1}{2}$ mere.

Problema nu este posibilă întotdeauna deoarece, extrăgînd cîte un măr din acelaşi sac de mai multe ori la rînd, sacul poate rămîne gol şi la ultima extragere, de exemplu, nu mai avem ce extrage.

42. Două persoane, luate la întîmplare, pot fi sau prieteni, sau duşmani, sau necunoscuţi (nu se cunosc reciproc). Arătaţi că la o întîlnire de 17 persoane se întîlnesc în mod cert sau: a) trei prieteni, sau: b) trei duşmani, sau: c) trei necunoscuţi (nici unul nu cunoaşte pe celălalt).

R. Fie x una din cele 17 persoane şi să împărţim celelalte 16 persoane în trei mulţimi: A — mulţimea duşmanilor lui x, B — mulţimea prietenilor lui x şi C — mulţimea celor ce nu cunosc pe x. Cea mai mare, ca număr, dintre aceste mulţimi conţine cel puţin 6 persoane.

Să presupunem, fără a restrînge generalitatea problemei, că această mulţime este B. Dacă în B, două persoane, y şi z sînt prietene între ele, atunci x, y, z sînt toţi prieteni.

Acum, să presupunem că în B, orice două persoane nu sînt prietene. Fie y din B o persoană la întîmplare şi să împărţim celelalte persoane din B (cel puţin 5) în două mulţimi : X — mulţimea duşmanilor lui y şi Y — mulţimea celor ce nu cunosc pe y. Una din aceste mulţimi conţine cel puţin trei persoane.

Dacă aceasta este X şi două persoane în X, z şi t, sînt duşmani, atunci y, z, t sînt duşmani. Dacă orice două persoane în X nu sînt duşmani, atunci toate persoanele din X sînt reciproc necunoscute şi problema este rezolvată (mulţimea căutată fiind X).

Altfel, fie Y mulţimea cu cel puţin 3 persoane. Raţionînd analog obţinem sau 3 necunoscuţi (y şi încă două persoane din Y) sau 3 duşmani din Y.

Acelaşi raţionament se repetă cînd considerăm una din mulţimile A sau C.

43. Se dau 1 000 de bileţele, fiecare numerotate de la 000 la 999, şi 100 de cutii, numerotate de la 00 la 99. Fiecare bileţel trebuie pus într-o cutie al cărei număr poate fi obţinut din numărul biletului prin suprimarea unei cifre la întîmplare. Astfel, biletul 123 poate fi plasat într-una din cutiile 12, 13 sau 23. Arătaţi, că, în acest mod, toate biletele pot fi distribuite folosind doar 50 de cutii.

R. Pentru a distribui biletele 000, 111, 222, ..., 999, putem folosi 10 cutii, anume cele notate 00, 11, 22, ..., 99. Aceste cutii pot fi folosite, de asemenea, pentru orice bilet cu două cifre identice.

Rămîne să arătăm că biletele cu cifre distincte pot fi distribuite în exact 40 de cutii.

Orice bilet numerotat cu trei cifre distincte are sau două cifre pare sau două impare, astfel că putem aşeza toate aceste bilete în cutiile $\overline{ab}$, unde $a \neq b$ şi $a - b \vdots 2$. Sînt exact 40 astfel de cutii deoarece sînt zece moduri de a-l alege pe a şi pentru fiecare alegere a lui a, b poate fi ales în patru moduri pentru a satisface condiţiile de mai sus (de exemplu dacă $a = 2$, putem alege pe b oricare din numerele 0, 4, 6, 8). Astfel, 40 de cutii sînt suficiente pentru biletele cu cifre distincte.

44. (Jocul divizorilor). Doi jucători joacă următorul joc : ei aleg, pe rînd, un divizor natural pozitiv al numărului 1 000 cu condiţia ca, de fiecare dată, numărul ales să nu dividă nici unul din divizorii deja aleşi pînă atunci. Primul care alege 1 000 ca divizor, pierde.

Ce se întîmplă dacă jocul se schimbă, în sensul că numerele trebuie alese atfel încît fiecare număr ales să nu aibă mai puţini divizori decît oricare din numerele anterior alese?

Să se arate că cel care începe jocul cîştigă totdeauna.

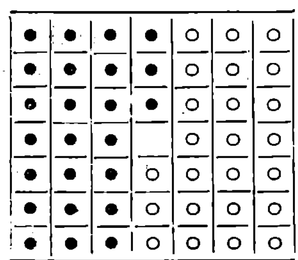
R. Primul jucător poate cîştiga întotdeauna, deoarece, de exemplu alegînd numărul 500, al doilea jucător nu poate alege decît pe 1 000 şi pierde jocul.

45. (Jocul pionilor). În fiecare pătrat al unei table de şah se află cîte un pion. Doi jucători iau, pe rînd, cîte un pion, astfel încît pe fiecare linie şi coloană să rămînă întotdeauna cel puţin cîte un pion. Va pierde jucătorul care nu mai poate lua nici un pion.

Există o strategie a jocului astfel încît unul din jucători să cîştige întotdeauna?

R. Cîştigă al doilea luînd simetric în raport cu centrul tablei.

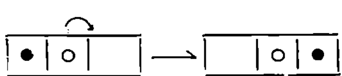
46. (Jocul alb-negru). Pe o tablă cu pătrate de tip 7×7 sînt aşezate piese albe şi negre, ca în figură, pătratul din centru rămînînd liber.



Piesele pot fi mutate pe linii sau coloane respectînd următoarele reguli:

a) o piesă poate fi deplasată în orice pătrat liber din vecinătatea ei (orizontal sau vertical);

b) dacă un pătrat alăturat unei piese este ocupat de o piesă de culoare diferită, iar pătratul următor este liber, prima piesă îl poate ocupa sărind peste piesa de culoare opusă ca în figura de mai jos.



Jocul constă în a deplasa piesele negre în locul celor albe şi invers.

R. Se adoptă aceeaşi strategie ca la jocul lui Luc (v. secţiunea a III-a, p. 477).

47. (Problema lui LEWIS CAROLL. (Dilema minciunii)). Se consideră trei persoane, A, B și C. A spune că B minte; B spune că C minte; C spune că A și B mint.

Problema este: Cine minte și cine spune adevărul?

R. Persoanele A și C mint, iar B spune adevărul.

Problema se rezolvă foarte ușor urmărind tabela de mai jos. Dacă o persoană X minte, îi vom asocia cifra 0, iar dacă spune adevărul, îi vom asocia cifra 1. În primul caz, B minte, deci, din afirmația „A spune că B minte" rezultă că A spune adevărul, în contradicție cu situația din tabel. Deci cazul 1) din tabel trebuie eliminat.

În acest fel tratăm toate cazurile.

	A	B	C	Concluzii
1)	0	0	0	
2)	0	0	1	
3)	0	1	0	
4)	1	0	0	
5)	1	1	0	
6)	1	0	1	
7)	0	1	1	
8)	1	1	1	

48. Vă prezentăm un joc cu care vă veți pune în încurcătură prietenii. Rugați pe un prieten să aleagă un număr între 1 și 100 și să-l țină minte fără să vi-l spună. Apoi, lăsați-l să vadă pe rînd casetele cu cifre din pagina următoare rugîndu-l să indice în care din ele se află numărul ales. Este suficient pentru dumneavoastră să ghiciți acum numărul. Cum?

R. Este nevoie doar de o simplă operație și anume a aduna cifrele din stînga sus ale fiecărui pătrat în care prietenul dumnevoastră a indicat că se află numărul. Astfel, să presupunem că prietenul dumneavoastră a ales numărul 71. Casetele în care se află numărul 71, au ca prime cifre în stînga sus, numerele 1, 2, 4, 64. Deci:

$$1 + 2 + 4 + 64 = 71.$$

Construcția casetelor se bazează pe scrierea în baza 2 a numerelor.

1	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27
29	31	33	35	37	39	41
43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63	65	67	69
71	73	75	77	79	81	83
85	87	89	91	93	95	97
99						

2	3	6	7	10	11	14
15	18	19	22	23	26	27
30	31	34	35	38	39	42
43	46	47	50	51	54	55
58	59	62	63	66	67	70
71	74	75	78	79	82	83
86	87	90	91	94	95	98
99						

4	5	6	7	12	13	14
15	20	21	22	23	28	29
30	31	36	37	38	39	44
45	46	47	52	53	54	55
60	61	62	63	68	69	70
71	76	77	78	79	84	85
86	87	92	93	94	95	100

8	9	10	11	12	13	14
15	24	25	26	27	28	29
30	31	40	41	42	43	44
45	46	47	56	57	58	59
60	61	62	63	72	73	74
75	76	77	78	79	88	89
90	91	92	93	94	95	

16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	80	81	82
83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	

32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	96	97	98
99	100					

64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

49. Să se determine un număr cu nouă cifre distincte care este divizibil cu 11.

R. Pentru a rezolva problema este necesar a cunoaște regula de divizibilitate cu 11. Un număr este divizibil cu 11 dacă diferența dintre suma cifrelor de ordin impar și suma cifrelor de ordin par, este divizibilă cu 11.

Fie, de exemplu, numărul 23 658 904.

Suma cifrelor de ordin impar este:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21.$$

Suma cifrelor de ordin par este:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16$$

Diferența $21 - 16 = 5$ nu e divizibilă cu 11, deci numărul nu este divizibil cu 11.

Presupunem că cifrele numărului căutat sînt $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. În acest caz, trebuie să împărțim aceste cifre în două grupe cu proprietatea că diferența dintre suma cifrelor conținute de prima grupă și suma celor conținute de a doua grupă este un număr divizibil cu 11 (reținem că această diferență poate fi egală și cu 0, acest număr fiind, și el, divizibil cu 11). Ca o primă observație, una din grupe trebuie să conțină 4 cifre, iar cealaltă 5 cifre, căci un număr de 9 cifre are 4 cifre de ordin impar.

Sînt posibile mai multe cazuri:

a) Diferența despre care este vorba mai sus este egală cu 0. Cum suma cifrelor $0, 1, 2, 3, \ldots, 8$ este 36, rezultă că suma numerelor din fiecare grupă este $36 : 2 = 18$. Putem obține 4 cifre a căror sumă să fie 18, anume 8, 7, 2, 1. Rezultă că în cealaltă grupă sînt cifrele 0, 3, 4, 5, 6. Deci un număr de tipul celui cerut în enunț este, de exemplu, 310 247 586. Cifrele 8, 7, 2, 1 ocupă poziții de ordin par, iar celelalte, de ordin impar. Permutînd cifrele 8, 7, 2, 1 pe pozițiile pare, respectiv cifrele 0, 3, 4, 5, 6 pe pozițiile impare, obținem alte numere de 9 cifre de tipul cerut.

50. Fie n un număr natural cu ultima cifră nenulă. Arătați că există un multiplu a lui n care să nu aibă nici o cifră egală cu 0.

R. Să considerăm resturile împărțirii numerelor $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ 10^{n+1} la n. Deoarece avem $n + 1$ numere și doar n posibile resturi diferite, cel puțin două resturi sînt egale în șirul de împărțiri. Să presupunem că resturile egale sînt date de împărțirea lui 10^s și 10^t la n, $s < t$. Astfel, diferența dintre aceste numere este un multiplu de n, adică n divide $10^t - 10^s = 10^s(10^{t-s} - 1)$. Deoarece ultima cifră a lui n este nenulă, se observă că n divide $10^{t-s} - 1$ (n nu divide 10^s). Atunci $10^{t-s} - 1$ este un multiplu de n și nu are nici o cifră egală cu zero, deoarece:

$$10^{t-s} - 1 = 999 \ldots 99.$$

51. O clasă a cincea și o clasă a șasea organizează o serbare. În acest scop, fiecare elev din clară a cincea a plătit 5 lei, iar fiecare elev al clasei a șasea a plătit 3 lei. Dacă elevii clasei a cincea ar plăti toate cheltuielile prilejuite de organizarea serbării, fiecare elev ar plăti k lei.

Într-o serbare trecută, fiecare elev din clasa a cincea a plătit 4 lei, iar fiecare elev al clasei a șasea a dat 6 lei, suma totală strînsă fiind egală cu suma care s-ar fi strîns, dacă toți elevii clasei a șasea ar fi plătit fiecare cîte k lei.

a) Să se afle numărul k;

b) Care dintre cele două clase are mai mulți elevi?

R. Să notăm cu a, respectiv b numărul elevilor claselor a cincea, respectiv a șasea. Atunci avem relația:

$$5 \text{ lei} \times a + 3 \text{ lei} \times b = k \text{ lei} \times a$$

sau:

$$(5 - k) \text{ lei} \times a + 3 \text{ lei} \times b = 0. \qquad (1)$$

Pentru serbarea trecută, avem relația:

$$4 \text{ lei} \times a + 6 \text{ lei} \times b = k \text{ lei} \times b$$

sau:

$$4 \text{ lei} \times a + (6 - k) \text{ lei} \times b = 0 \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$\frac{5 - k}{3} = \frac{4}{6 - k} = -\frac{b}{a}.$$

Din egalitatea primelor două rapoarte se obține:

$$k^2 - 11k + 18 = 0$$

sau:

$$(k - 2)(k - 9) = 0.$$

Din ultima relație se obțin soluțiile $k = 2$ și $k = 9$. Cînd $k = 2$, atunci se obține $b = -a$, sau $a + b = 0$, evident imposibil. Rămîne deci $k = 9$ și:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} > 1$$

deci clasa a șasea are mai mulți elevi decît clasa a cincea.

52. Găsiți toate numerele naturale de 3 cifre, n, cu următoarele proprietăți:

a) suma și produsul cifrelor lui n sînt numere prime;

b) oricum am forma numere cu cifrele lui n, aceste numere sînt întotdeauna numere prime.

Notă. Se consideră că 1 este număr prim.

R. Să presupunem că n are mai mult de o cifră. Nici o cifră a lui n nu poate fi 0, 2, 4, 6, 8 sau 5, deoarece, oricare dintre acestea, plasată ca ultimă cifră într-un anumit număr, dă un multiplu de 2 sau de 5. Deci, conform cu b), cifrele lui n pot fi dintre cifrele 1, 3 sau 7, iar numărul total de cifre trebuie să fie impar pentru a asigura condiția ca suma cifrelor lui n să nu fie număr par.

Singurele numere de trei cifre cu proprietățile din enunț sînt 113, 131, și 311 căci nu putem avea drept cifre sigure pe 3 și 7, deoarece produsul cifrelor nu ar mai fi prim, iar numerele 111, 117 (și permutări) nu satisfac a).

53. Cineva a golit o cutie de 48 de chibrituri și a împărțit chibriturile în trei grămezi. Dacă se iau din prima grămadă un număr de chibrituri egal cu cele din a doua grămadă, și se pun în a doua grămadă, iar apoi, din a doua se ia un număr de chibrituri egal cu cele din a treia grămadă și se pun în aceasta și, în sfîrșit, din a treia se iau tot atîtea chibrituri cîte sînt în prima grămadă și se pun în aceasta, atunci toate grămezile vor avea același număr de chibrituri. Cîte chibrituri se află inițial în cele trei grămezi?

R. Să rezolvăm problema pornind de la sfîrșit. Dacă numărul inițial de chibrituri este 48, în cele trei grămezi vom avea, în final, distribuția:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 16 & 16 & 16 \end{array} \tag{1}$$

Mutarea dinaintea acestei configurații a dublat numărul de chibrituri din prima grămadă, deci înaintea ultimei mutări exista distribuția:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 8 & 16 & 16+8=24 \end{array} \tag{2}$$

În plus, se știe că din a doua grămadă am luat tot atîtea chibrituri cîte se găseau în a treia.

Asta înseamnă că 24, numărul de chibrituri din ultima grămadă este dublul celui dinainte. Deci, configurația anterioară celei de la (2) este:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 8 & 16+12=28 & 12 \end{array} \tag{3}$$

Acum este clar că, prin procedeul indicat, configurația inițială a grămezilor a fost:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 8+14=22 & 14 & 12 \end{array}$$

54. Să se arate că:

$$N = 1\,492^n - 1\,770^n - 1\,863^n + 2\,141^n$$

este divizibil cu 1 946, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

R. Să observăm că:

$$2\,141^n - 1\,863^n \,\vdots\, 2\,141 - 1\,863 = 278$$

și

$$1\,770^n - 1\,492^n \,\vdots\, 1\,770 - 1\,492 = 278,$$

deci $N \,\vdots\, 278$. Pe de altă parte:

$$2\,141^n - 1\,770^n \,\vdots\, 2\,141 - 1\,770 = 371$$

și:

$$1\,863^n - 1\,492^n \,\vdots\, 1\,863 - 1\,492 = 371,$$

deci $N \,\vdots\, 371$. Cum $(278, 371)_* = 1$, N se divide cu produsul:

$$278 \cdot 371 = 1\,946 \cdot 53 = \mathcal{M}\,1\,946.$$

55. Fie a și b două numere naturale, cu $a > 2b$. Arătați că $10a + b$ este multiplu de 7 dacă și numai dacă $a - 2b$ este multiplu de 7.

R. Să scriem numerele date sub forma:

$$10a + b = 10(a - 2b) + 21b \tag{1}$$

$$a - 2b = -2(10a + b) + 21a. \tag{2}$$

Dacă 7 divide $a - 2b$, atunci ambii termeni din partea dreaptă a relației (1) sînt multiplii de 7, deci și $10a + b$. Analog, în (2), dacă $10a + b$ este multiplu de 7, la fel este și $a - 2b$.

Am folosit aici proprietatea următoare: dacă m și n sînt numere naturale care se divid la 7, atunci și suma lor se divide la 7.

56. Adăugați la cifrele 632 ... încă trei cifre pentru a obține un număr de șase cifre divizibil cu 7, 8 și 9.

R. Deoarece 7, 8 și 9 sînt relativ prime, un număr divizibil cu 7, 8 și 9 este de asemenea divizibil cu $7 \times 8 \times 9 = 504$.

Cum singurii multiplii ai lui 504 între 632 000 și 633 000 sînt:

$$504 \times 1\,254 = 632\,016$$

și

$$504 \times 1\,255 = 632\,520$$

cifrele care se pot adăuga sînt ...016 și ... 520.

57. Să inventăm o nouă piesă pe tabla de șah, și anume „ducele". Această piesă se poate muta într-un mod asemănător cu al „calului".

Astfel, să notăm cu (r, s) pătratul pe tabla de șah situat la intersecția dintre linia r și coloana s. Dacă „ducele" se află în acest pătrat, el se poate mișca în unul din pătratele $(r \pm 3, s \pm 1)$, sau $(r \pm 1, s \pm 3)$. Dacă „ducele" se află singur pe tabla de șah în colțul din stînga jos, (1, 1), este posibil să ajungă prin mișcări succesive în oricare dintre vîrfurile (1, 8), (8, 8) sau (8, 1)? Dacă da, specificați numărul minim de mișcări necesare.

R. „Ducele" pleacă din (1, 1) de pe un pătrat negru. Cum mișcările sale îl duc întotdeauna tot pe un pătrat negru, nu poate ajunge în pătratele albe (1, 8) și (8, 1). Apoi, șirul de mișcări:

$$(1, 1) \to (4, 2) \to (7, 3) \to (8, 6) \to (5, 7) \to (8, 8)$$

îl duc pe „duce" în cinci mișcări în pătratul (8, 8).

Să observăm că „ducele" pleacă dintr-un pătrat cu coordonate numere impare, apoi ajunge într-unul cu coordonate pare și apoi într-unul cu coordonate impare, etc., fiindu-i necesare un număr impar de mișcări Pentru a ajunge în (8, 8) din trei mișcări ar trebui să schimbe prima coordonată cu 7 în trei mișcări, adunînd 3, 3 și 1 pe rînd.

Schimbările corespunzătoare în prima coordonată sînt ± 1, ± 1 și ± 3, deci este imposibil a ajunge în (8,8) în 3 mișcări. Rămîne că numărul minim de mișcări este 5.

58. La un turneu de șah participă n șahiști. Demonstrați că în orice moment al desfășurării turneului, înainte de terminare, există doi jucători cu același număr de victorii.

R. Să notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numărul victoriilor obținute de primul, al doilea, ..., al n-lea șahist. Presupunînd că $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Pînă la sfîrșitul turneului se pot juca cel mult $\dfrac{n(n-1)}{2}$ partide. Deoarece am considerat un moment înainte de terminare, nu se pot obține un număr de puncte mai mare decît numărul final de partide.

SECŢIUNEA A III-A

La granița dintre matematică și logică

GÎNDIREA MATEMATICĂ ŞI LOGICA

I. Concret şi logic în matematică

Necesitatea raționamentului logic în dezvoltarea și aplicarea matematicii este astăzi indiscutabilă. Metodele de tratare a problemelor matematice se bazează în mod esențial pe raționamentul logic-deductiv. Concepția contemporană asupra conținutului tematic al matematicii o caracterizează ca știință a structurilor abstracte ale realității obiective.

Caracterul abstract impune ca instrument de cercetare raționamentul logic—deductiv, dar faptul că structurile sînt cele din realitatea obiectivă, concrete în formele lor inițiale și abstractizate prin evoluția de la concret la abstract, specifică metodelor științifice, implică raportarea la concret și confruntarea modelelor matematice cu originalele lor din realitatea obiectivă. Prin urmare, oricît de înalt ar fi nivelul gîndirii matematice actuale, ea nu poate fi despărțită de semnificațiile concrete ale noțiunilor și ale operațiilor elementare, de bază.

Totodată, ea nu poate fi despărțită nici de conținutul ei logic printr-o formalizare, desigur de esență logic-deductivă, dar considerată în sine ca un instrument independent al gîndirii matematice. De aceea, introducerea unei secțiuni intitulată „La granița dintre matematică și logică", într-o culegere destinată elevilor de curs primar și gimnazial, dar și profesorilor lor, ni se pare binevenită pentru a ajuta mințile fragede ale elevilor de a trece de la stadiul logic-operațional la cel logic-deductiv, bineînțeles cu sprijinul abil și competent al profesorilor și învățătorilor.

Scurte proze cu tîlc matematic, cum se intitulează primul capitol al acestei secțiuni, este, desigur, o denumire mai puțin obișnuită în didactica matematică tradițională, dar semnificația ei are vechi și prețioase tradiții, care o justifică și, odată cu ea, și conținutul care este format din probleme enunțate discursiv, care se cer modelate matematic.

Modelarea acestora nu folosește un aparat matematic de nivel înalt ca tehnică, ci se bazează pe analize logice ale conținutului enunțurilor. Acestea sînt prezentate sub forme distractive, care niciodată nu au fost disprețuite de marii matematicieni, nici chiar de alte personalități științifice și culturale. Enunțurile sînt atractive, dar, prin însăși forma lor discursivă, ascund uneori puncte importante de sprijin ale raționamentelor, care duc la soluții. Acestea sînt modelatoare ale unor propoziții exprimate în limbajul cotidian al relațiilor sociale, economice, culturale sau profesionale, care descriu situații reale sau imaginate, sau propun jocuri logice, stimulatoare de ambiția de a le dezlega.

De exemplu, întîmplarea cu cei trei filozofi, mînjiți pe frunte cu cărbune, care se distrau văzînd fiecare frunțile celorlalți doi, fără a ști că și el avusese aceeași aventură, pune o problemă de discernămînt.

În această problemă, elementul esențial al rezolvării cu soluție unică este de ordin psihologic : faptul că, la un moment, *toți au încetat să rîdă.* Fără această condiție problema putea admite și alte soluții. De exemplu, A rîde fiindcă vede mînjiți atît pe B cît și pe C, dar el nu este mînjit, deci are de ce rîde. În schimb, B poate rîde numai fiindcă vede pe C mînjit, iar C rîde fiindcă îl vede pe B mînjit. Dacă încetarea rîsului era introdusă cu semnificația că fiecare și-a dat seama că el însuși este mînjit, B care vedea pe A și C și-ar fi dat seama că C rîde de el, fiindcă A era curat pe frunte, iar C, la fel, fiindcă B continua să rîdă, iar el vedea că A este curat. În schimb, A n-ar fi putut deduce, din încetarea rîsului celor doi, dacă el este curat sau mînjit. Iată, deci, o ambiguitate posibilă prin slăbirea unei condiții psihologice.

Problema înlocuirii unui vagon cu ajutorul unor manevre pe o configurație triunghiulară de căi ferate este de mare perspicacitate și necesită un număr de 17 operații, cu 17 schimbări de sens de mers pe triunghiul *curbiliniu* format de șinele de cale ferată. Din punct de vedere cinematic, ea revine la compunerea unui număr de 17 translaţii, cu schimbări de direcţii şi de sensuri.

Compatibilitatea acestor condiţii geometrico-cinematice asigură condiţiile logice suficiente pentru rezolvarea problemei concrete de substituire a unui vagon prin altul.

Aceste genuri de probleme au o veche tradiţie şi multe au fost emise şi calificate ca probleme distractive care nu cer cunoştinţe speciale de matematică, ci numai o ascuţime de spirit, atribuită, în genere, matematicienilor.

Moştenirea, pe care vechii egipteni şi asiro-babilonieni ne-au lăsat-o în domeniul cunoştinţelor lor matematice, cuprinde numeroase probleme cu formulări concrete şi soluţii date sub forma de paşi algoritmici.

Papirusul Rhind, care este unul dintre puţinele materiale de referinţă rămase de la egipteni, propune, de exemplu, problema următoare:

100 de pîini se împart la cinci oameni, 1/7 din partea primilor trei, la ultimii doi oameni. Care va fi diferenţa dintre părţi?

Formularea este eliptică: lipseşte tocmai legea generală de formare a părţilor. Scribul dă numai soluţia, din care pare a rezulta că această lege ar fi *progresia aritmetică*. În aceste condiţii, folosind semnificaţia curentă în viaţa de toate zilele, „partea primilor" ar însemna suma părţilor celor care au avut cotele cele mai mari. O şeptime din această sumă ar fi suma părţilor celor mai mici.

Cum a putut raţiona scribul?! El a repartizat celui cu partea cea mai mică o cotă, apoi următorului aceeaşi cotă plus un supliment, următorului i-a mai adăugat încă un supliment, etc. În total ar fi fost distribuite 5 cote şi $1+2+3+4 = 10$ suplimente, iar totalul ar fi 100. Apoi 1/7 din 3 cote plus 9 suplimente ar fi egală cu două cote şi un supliment.

Pentru rezolvarea elementară, la nivelul învăţămîntului primar, se poate folosi metoda grafică, prea bine cunoscută. Din punct de vedere aritmetico-algebric, progresia aritmetică s-ar prezenta astfel:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,$$

iar cele două condiţii ar fi:

$$5a + 10r = 100,\ \frac{1}{7}(3a+9r) = 2a + r$$

şi ar duce la $a = 1\frac{2}{3}$, $r = 9\frac{1}{6}$ de unde distribuţia pîinilor ar fi $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$; $38\frac{1}{3}$, avantajînd pe patru din cei cinci, avînd în vedere raţia mare $r = 9\frac{1}{6}$ în raport cu primul termen $a = 1\frac{2}{3}$.

Faptul că legea generală a progresiei aritmetice nu este menţionată în enunţ conduce la presupunerea că aceasta era intuită, dar nu exprimată explicit, cum, de altfel, nu sînt exprimate explicit nici raţionamentele prin care se rezolvau problemele.

Pe una din tabletele asiro-babiloniene este gravat enunţul următor:

Am adunat de şase ori suprafaţa ogorului meu şi de trei ori şi jumătate latura; am găsit 906 (în notaţia zecimală). Care este latura pătratului meu?

Şi aici există lipsuri în precizia datelor: nu se spune ce formă are ogorul, dar mai jos se cere latura pătratului. Se vede destul de uşor că enunţul este o problemă de gîndire şi nu o aplicaţie practică a unui algoritm de calcul. Ea reine la rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea:

$$6l^2 + 3\frac{1}{2}l - 906 = 0.$$

Ştiau babilonienii să rezolve această ecuaţie? Indicaţiile de calcul, deşi sînt verbale, conduc la concluzia că acestea sînt echivalente cu stabilirea formulei clasice de rezolvare. Metoda folosită revine la cea didactică de completare a pătratului, cu trecerea lui 906 în membrul al doilea pentru a nu avea termeni negativi.

Ceea ce trebuie să reținem și din acest exemplu este folosirea gîndirii logico-matematice în modelarea unei probleme cu enunț discursiv și cu caracter practic. În această privință, babilonienii au dovedit un spirit algebric, pe care însă nu l-au afirmat explicit, ci prin schemele de calcul, în care operațiile se introduc și se succed logic. În Evul Mediu chinez, calculele se făceau încă uneori cu bastonașe după metoda antică. Pentru a decide care dintre doi funcționari, cu aceleași merite, să ocupe un post, YANG SUCEU le-a pus următoarea problemă de calcul logic, modelat prin calcul cu bastonașe :

În timpul unei plimbări printr-o pădure, cineva a putut surprinde discuțiile dintre niște hoți, care voiau să-și împartă baloturile de stofă furate. Dacă fiecare ar lua cîte 6 baloturi, ar mai rămîne 5 neîmpărțite, iar dacă ar lua cîte 7, nu ar ajunge 8. Cîți hoți și cîte baloturi erau?

Raționamentul logic pe fapte concrete poate evita o formulare matematică, dacă ne gîndim că au primit odată 5 baloturi, dar dacă se mai da cîte unul în plus ar lipsi 8 baloturi. Prin urmare, dacă s-ar mai procura 8 baloturi, fiecare hoț ar putea avea cîte 7 baloturi. Aceasta înseamnă că $5+8 = 13$ baloturi ar fi exact ceea ce ar fi necesar și suficient pentru a satisface pe hoți. Aceștia erau deci în număr de 13 și fiecare avînd cîte 7 baloturi, numărul acestora este de $13 \times 7 - 8 = 91 - 8 = 83$, sau de $13 \times 6 + 5 = 78 + 5 = 83$.

Modelul algebric al problemei ar fi următorul : fie x numărul hoților și y, cel al baloturilor ; vom avea :

$$y = 6x + 5 \text{ și } y = 7x - 8$$

de unde $x = 13$, $y = 83$.

Concurenții nu au folosit acest model, ci un raționament modelabil prin calculul cu bastonașe, probabil de genul celui pe care l-am descris mai înainte. Povestea, din anul 855 e.n., spune că unul dintre aceștia a dat răspunsul exact și a fost înaintat pe postul solicitat, fără ca celălalt să aibă vreo obiecție.

Renașterea a prilejuit numeroase dispute și competiții matematice, dintre care unele pe probleme la granița dintre logică și matematică. Exemplul următor se atribuie lui CHUQUET în 1484, ca și lui TARTAGLIA în 1586. CHUQUET, care era medic la Paris, a elaborat în 1484 la Lyon un tratat surprinzător prin nivelul și bogăția temelor ca și prin terminologia adoptată. Lucrarea sa, intitulată *Tratat tripartit în știința numerelor*, a rămas în manuscris și a fost regăsită de-abia în 1880, cînd a fost publicat. Cele trei părți privesc numerele raționale, numerele iraționale și teoria ecuațiilor. El este completat de o culegere de 166 de probleme, un tratat de aplicații ale algebrei în geometrie și o aritmetică de gen comercial. Vom relua de aici următorul exemplu :

Dintr-un vas plin, cu o capacitate de 8 litri, să se scoată 4 litri de vin folosind două vase goale avînd capacitățile de 5 și de 3 litri, fără a se folosi alte vase de capacități diferite.

Evident, orice fel de modelare trebuie să țină seama că operațiile vor reprezenta diminuări și creșteri ale cantității de vin cu 5 și 3 litri, vasele trebuind să fie umplute și golite succesiv.

Vom nota cu A, B, C cele trei vase și (x, y, z) cantitățile de vin care se găsesc în ele după fiecare operație. La început vom avea (8, 0, 0). Dacă turnăm din A în B și apoi din B în C, vom avea cantitățile : (3, 5, 0) și (3, 2, 3), după care turnăm C în A și apoi B în C, conform cu distribuția (6, 2, 0) și (6, 0, 2). Mergem mai departe, după cum urmează : (1, 5, 2) și (1, 4, 3), după care, vărsînd C în A, am realizat algoritmul prim (4, 4, 0).

Soluția nu este unică, fiindcă putem începe prin a trece vin din A în C, apoi din C în B etc, după schema următoare : (8, 0, 0), (5, 0, 3), (2, 3, 3), (2, 5, 1), (7, 0, 1), (7, 1, 0), (4, 1, 3), (4, 4, 0).

După cum se vede, există o tradiție milenară a problemelor concrete, care se pot rezolva — și uneori le rezolvăm numai așa — prin raționamente logice aplicate *direct* noțiunilor formulate în limbajul comun, cotidian, al vieții de toate zilele. Acest gen de probleme a fost cultivat, de obicei, sub titulatura de *probleme distractive* ceea ce este un prilej de satisfacție pentru matematică, pe care unii o consideră ca rebarbativă, inaccesibilă, criptografică.

Au existat totdeauna lucrări consacrate parțial sau chiar total problemelor distractive. Este suficient să menționăm, în afara papirusurilor egiptene și a tabletelor asiro-babiloniene, lucrări ca cea a lui BASKARA, intitulată *Lilavati*, dedicată unei persoane feminine numită Lila și fiind de matematică distractivă. Manuscrisul, datînd din jurul anului 1150, face parte dintr-un tratat *Sidantasiromani* (Bijuteria soluțiilor).

O altă carte, datorată lui ALBINUS, tipărită la Paris în 1617, poartă numele de *Propoziții pentru perfecționarea tineretului* și conține probleme distractive cu caracter logico-matematic. Vom găsi acolo problema care s-a pus tuturor de-a lungul veacurilor cu varza, capra şi lupul, care trebuiau să fie trecuţi peste un rîu, cu ogarul şi vulpea etc.

În secolul nostru au apărut şi sînt traduse în limba română mai multe cărţi de matematică distractivă ca *Jocuri şi probleme distractive de matematică*, *Amuzamente matematice* şi *Alte amuzamente matematice* de M. GARDNER.

Există, de asemenea, lucrarea în 3 volume *Retrospectivă matematică* de TITUS POPESCU, în limba română, unde se găsesc selecţionate numeroase probleme distractive din toate epocile, precum şi alte probleme care se prezintă sub înfăţişări mai puţin frecvente.

II. Matematica, învăţămîntul şi problemele matematice în societatea contemporană

Matematica este astăzi prezentă în toate activităţile societăţii omeneşti şi tinde să ocupe un loc din ce în ce mai de prestigiu, pe măsură ce se face apel la ea pentru a se rezolva probleme din alte domenii decît ale sale proprii.

Învăţămîntul matematic a fost supus unor reforme revoluţionare, care au avut efecte foarte diferite, unele contradictorii, care au condus la necesitatea abordării problemei esenţiale: „*Obiectivele învăţămîntului matematic*" la nivelul ONU, în speţă al UNESCO. O reuniune de experţi ţinută la Paris în perioada 19—23 mai 1980 a elaborat o serie de concluzii, ţinînd seama de modificările spectaculare suferite de programele analitice în cursul deceniului 1960—1970. Unele dintre aceste concluzii vin să sprijine şi să justffice alcătuirea culegerii noastre şi, în particular, a secţiunii a III-a, destinată problemelor logico-matematice. Iată, de exemplu, astfel de concluzii [1]:

— Metodele matematice nu mai sînt apanajul oamenilor de ştiinţă, a inginerilor şi tehnicienilor. Sînt folosite din ce în ce mai mult pentru a se analiza comportarea indivizilor şi a se studia atitudinile şi tendinţele opiniei în întreaga societate. Aceste progrese nu fac decît să crească cererea de cunoştinţe matematice — aptitudinea de a cuantifica, de a elabora modele matematice, de a mînui tehnicile de simulare şi algoritmii.

— Matematicile pe care le întîlnim în viaţă nu apar sub forma unei comenzi simple care figurează în manuale : „Adunaţi 27,62 cu 13,81". Ele apar mai degrabă în contextul limbajului vorbit sau scris, în situaţii concrete, ca şi în numeroasele relaţii între indivizii care caracterizează viaţa socială.

— Matematicile, se spune, conduc la formarea capacităţilor necesare pentru *a rezolva probleme*. Desigur, unul din scopurile principale ale învăţămîntului matematic a fost totdeauna de a implementa această aptitudine, cu precădere apreciată, de a rezolva probleme. În realitate, totuşi, această chestiune îmbracă, în general, două aspecte. Unul constă în *a identifica probleme*, care, de obicei, este înconjurată de o masă de informaţii nesemnificative. Celălalt constă în a găsi tehnica apropiată pentru a-l rezolva, cînd a fost identificat.

— Matematicile şcolare nu ne pregătesc deloc, din nefericire, să abordăm aceste două substanţiale aspecte:

— În al doilea rînd, problemele se propun elevilor cînd aceştia stăpînesc o anumită tehnică, de exemplu, cea a rezolvării sistemelor liniare de două ecuaţii cu două necunoscute. Astfel, tehnicile de rezolvare a problemelor propuse în clasă pot să se deducă din lecţiile precedente.

— Nu este, deci ,surprinzător că mulţi oameni încercă, în viaţa cotidiană, mari dificultăţi pentru :

— a descoperi situaţiile în care metodele matematice se pot aplica ;

— a asocia o *problemă* oarecare modelului matematic corespunzător;

— a recunoaşte că eficienţa eforturilor lor de a rezolva o problemă de viaţă este mărită prin faptul că gîndesc problema în termeni matematici.

— Trebuie să reţinem nu numai situaţii unde elevul trebuie să folosească matematicile ca o unealtă, ci, de asemenea, situaţii unde elementele matematice pot fi observate din exterior, ca o activitate asociată la caracteristici şi relaţii sociale, istorice, filozofice şi ideologice.

Am subliniat aceste concluzii ale comisiei de experţi, specialişti de talie internaţională în domeniul didacticii matematice de toate gradele ca MARGARET BROWN (Chelsea College, Universitatea din Londra), SVEN HILDING (inspector de matematică în Suedia, discipol al lui J. von NEUMANN), ROBERT MORRIS (Director al seriei *Studii asupra învăţămîntului matematic al UNESCO*), ANDRÉ REVUZ (Profesor la Universitatea din Paris VII şi responsabil al ciclului 3 de didactică a matematicii), HERBERT VOCKENBERG (cercetător ştiinţific din R.D.G.). Din ele se desprinde, în primul rînd, *rolul şi poziţia matematicilor, care pot*

---

[1] *Studes sur l'enseignement des mathématiques* (sur la direction de R. Morrid), vol. 2, p. 179—196. Presses de l'UNESCO, Paris, 1981.

fi considerate ca o parte integrantă a mediului ambiant economic, social şi cultural al omului nu numai sub forma actuală, dar încă şi sub celelalte forme, care se vor dezvolta cu certitudine prin efectul difuziunii mijloacelor de calcul rapid.

În al doilea rînd şi, nu ca un aspect secndar, apare ca factor esenţial, *învăţămîntul matematic care trebuie să aibă ca finalitate tocmai această integrare a matematicii în ambianţa intelectuală a omului, a fiecărui membru al societăţii.*

În această integrare, rolul problemelor este, indiscutabil, capital, iar tocmai acest rol impune o implementare deliberată, sistematică şi adecvată a acestora în cunoştinţele, aptitudinile şi tehnicile matematice ale tuturor elevilor, nu numai ale celor ce dau semne timpurii de a fi înzestraţi în mod deosebit pentru matematică.

III. Modelarea matematică şi problemele logico-matematice

O practică ce nu are o tradiţie prea îndelungată, ci numai începînd cu secolul al XIX-lea, a condus la formularea problemelor într-un limbaj matematic cît mai precis, cu menţionarea fără ambiguităţi a condiţiilor, a datelor.

Fiecare problemă apare în acest fel de formulare ca o teoremă, care îşi aşteaptă demonstraţia şi este obligatoriu să apară aşa, avînd în vedere nivelul atins astăzi de matematică şi exigenţele rigorii adecvate acestui nivel. Ceea ce reproşează concluziile experţilor manualelor şi culegerilor este faptul că aceste formulări nu urmăresc să pregătească pe elevi în identificarea problemelor din contextul în care acestea apar în viaţă, sau în diverse sectoare ale cunoaşterii. De asemenea, se reproşează faptul că aşezarea problemelor în manuale şi culegeri urmăreşte punerea în evidenţă şi exemplificarea tehnicilor de rezolvare, problemele fiind astfel debarasate de toţi paraziţii de tip informaţional şi aduse la forme canonice de enunţuri pur matematice. Prin aceste epurări matematica şcolară nu mai este instructivă pentru nematematicieni. De aici constatarea că în viaţa cotidiană ea rămîne în afara posibilităţilor multor oameni de a-i descoperi utilitatea.

Ceea ce pare a lipsi învăţămîntului matematic este capacitatea şi dorinţa de a promova modelarea matematică a faptelor din viaţa şi lumea exterioară. *Am atras atenţia asupra lipsei unor metodologii de rezolvare a problemelor; sîntem conduşi la a completa observaţiile noastre prin lipsa unor metodologii de punere a problemelor aşa cum s-ar cere matematicii pe care o întîlnim în viaţă.*

După depăşirea cursului primar unde problemele sînt formulate prin cerinţe legate de viaţă şi de mediul înconjurător, este o adevărată competiţie între profesori, autori de manuale şi culegeri, autori de probleme, conducători de cercuri de elevi de a se epura orice enunţ, orice definiţie, orice tehnică, orice metodă de *paraziţi* informaţionali şi de a se ajunge la enunţuri, definiţii, tehnici etc. formulate în limbaje matematice cît mai perfecte. De aici şi absenţa din manualele, culegerile şi revistele noastre a problemelor de modelare matematice, a aşa-numitelor probleme de matematici aplicate. Acestea sînt considerate ca specialităţi rezervate unor categorii delimitate de utilizatori şi sînt lăsate în sarcina acestora.

Din categoria problemelor modelatoare fac parte şi problemele logico-matematice. Este uşor de verificat că acestea se încadrează foarte bine în cerinţele concluziilor experţilor UNESCO, luate rînd pe rînd. De exemplu, ele arată că metodele matematice nu mai sînt apanajul specialiştilor, ci că sînt folosite din ce în ce mai mult pentru a se analiza aptitudini şi atitudini în întreaga societate de a cuantifica, de a elabora modele matematice, de a mînui tehnica de simulare şi algoritmi. Ele ne conduc la ascuţirea capacităţilor de a identifica probleme înconjurate de o masă de informaţii discursive, unele nesemnificative, şi de a găsi tehnici adecvate pentru a le rezolva.

Caracterul metodologic al culegerilor editate de Societatea de Ştiinţe Matematice este cel care ne-a condus la introducerea unei secţiuni speciale de probleme la graniţa dintre matematică şi logică. Ce înseamnă, de fapt, calificarea aceasta de probleme de graniţă? Se ştie că miracolul grec a constat în promovarea motivaţiei teoretice, bazate pe *raţionamentul deductiv* în gîndirea ştiinţifică. El s-a afirmat în mod surprinzător în matematică şi în filozofie, legate de esenţa lucrurilor. Thales, eleaţii, Pitagora şi pitagoricienii au introdus demonstraţia în justificarea afirmaţiilor matematice, care apăreau sub formă de probleme, în special geometrice şi aritmetice, dar nu cu exclusivitate, fiindcă Pitagora şi şcoala sa au modelat primii sunetele muzicale, iar Platon considera poliedrele regulate ca expresie a armoniei universului.

Încetul cu încetul, geometrii greci, preeuclidieni, au acumulat un număr mare de probleme rezolvate prin demonstraţii, edificînd în acest mod un corp de teoreme. Enunţurile acestora erau din ce în ce mai frecvent şi mai perfect debarasate de apeluri la evidenţă, la intuific și înlănțuirea diverselor inele ale raționamentului se făcea prin deducția logică. *Astfel, logica, ca însăși în curs de edificare, s-a împletit cu matematica, devenind un instrument indispensabil raționamentelor matematice.*

În modelarea matematică, logica servește nu numai ca instrument de investigație, deci ca descoperitoare a tehnicilor de rezolvare, ci și ca instrument de identificare a problemelor matematice ridicate de modelare. *De aceea, apar probleme de graniță între logică și matematică, în care logica aduce și rezolvarea, fără a implica tehnici matematice speciale.* Astfel de probleme sînt prezentate în capitolul A al secțiunii a III-a intitulată „La granița dintre matematică și logică".

IV. Prezentarea capitolului A

Vom încerca, în cele ce urmează, să punem în evidență specificul acestui gen de probleme și utilitatea adîncirii atît a analizei enunțurilor, cît și a cîștigării unor tehnici de analiză și sinteză logică ce conduc la soluții. În acest scop, vom discuta cîteva dintre problemele capitolului A.

Exemplul intitulat „Familială", formulează o situație creată de relații de familie: prezența a trei tați, fiecare cu cîte un fiu, a trei fiice cu mamele lor, cu cîte doi colegi de clasă ai fiecăruia dintre copiii noștri și a trei vecini.

Cităm faza finală care totalizează grupul: „împreună cu soția și copiii, gazda și invitații, am fost în total opt persoane". Întrebarea este dacă cel care relatează a numărat bine.

La prima vedere, dacă nu se ține seama de relațiile de familie, grupul pare a fi format din 17 persoane, ceea ce contrazice evaluarea povestitorului. Deci, astfel de relații sînt ascunse în context; ele sînt însă mărturisite prin precizarea că reuniunea a fost într-un cadru familial.

Rezultă, de asemenea, că povestitorul avea soție și copii. Dintre copii, unul singur era fiu, fiindcă existau trei tați, fiecare cu un fiu. În plus, povestitorul trebuie să aibă cel puțin o fiică, fiindcă aceasta era cu mama ei, soția lui. Prezența a cîte doi colegi de clasă ai fiecăruia dintre cei doi copii ar însemna patru copii din vecini. Dar există numai trei vecini și aceștia nu pot fi numai copii. Prin urmare, cel puțin doi dintre acești colegi locuiesc cu copiii povestitorului ceea ce înseamnă că sînt chiar acești copii, care sînt în aceeași clasă. Totuși ar mai trebui un copil pentru ca fiecare să aibă cîte doi colegi. Astfel apare necesitatea a încă unui copil, care trebuie să fie fiică și tot în aceeași clasă cu ceilalți doi.

În acest moment s-au identificat 5 persoane, din cele 8, deci 3 sînt cele din vecini. Aceștia trebuie să fie doi tați și o mamă, de unde rezultă că unul este tatăl povestitorului, celălalt fiind bunicul său, iar mama este mama soției.

Precizarea dată în indicație, fără demonstrație, sub formă de mărturisire orală a povestitorului, că cei trei copii ar fi gemeni este oarecum gratuită; ea nu reiese obligatoriu din context și nici din situații familiale. Se știe că unii părinți își înscriu copiii la vîrsta de 6 ani, alții la 7 ani în școala primară, iar unul dintre copii ar fi putut pierde un an din diverse motive.

Am căutat soluția acestei probleme logico-matematice prin mijloace de analiză logică, sociologică și psihologică, așa cum procedăm în relațiile sociale. De la început am admis că relațiile familiale erau numai pe linie directă, din tată în fiu și, de asemenea, de ordin matrimonial, fiindcă era vorba de o soție. Un element perturbativ erau vecinii veniți în vizită, dar aceștia trebuiau să fie din familie, ca și copiii, colegi ai celor identificați. Aceste elemente perturbatoare au fost cele care au precizat soluția eliminînd unele ambiguități posibile într-un enunț discursiv și familial.

Vom da alt exemplu care pune o problemă de geometrie concretă, mai precis de identificare a unui punct în care un pirat a îngropat o comoară. Elementele configurației geometrice sînt două stînci A și B și trei cocotieri C_1, C_2, C_3. Piratul măsoară segmentul C_1A_1 perpendicular pe C_1A și de lungime egală cu acesta, $C_1A_1=C_1A$ și orientat în regiunea opusă perimetrului triunghiului ABC_1. La fel măsoară segmentul $C_1B_1=C_1B$ și perpendicular pe C_1B, orientat tot în regiunea opusă perimetrului aceluiași triunghi ABC_1. La intersecția segmentelor AB_1 și BA_1, el marchează un punct P_1. Se mută apoi în C_2 și respectiv C_3, efectuînd construcții analoage. Reușește să marcheze trei puncte P_1, P_2, P_3 și îngroapă comoara în centrul cercului circumscris triunghiului $P_1P_2P_3$. Desigur că piratul era un geometru de clasă pentru a alege o astfel de stratagemă geometrică. El se întoarce după cîțiva ani și constată că cei trei cocotieri fuseseră desrădăcinați de o furtună și totuși reușește să regăsească locul unde îngropase comoara. Cum a procedat?! În această problemă partea matematică este covîrșitoare, conducînd la o serie de construcții geometrice din care se impune determinarea centrului unui cerc. Partea logică pură nu apare decît la sfîrșit, cînd punctele P_1, P_2, P_3 au dispărut. Dar și atunci geometrul pirat va face apel la geometrie și anume la un fapt specific: cercul $P_1P_2P_3$ este descris pe AB ca diametru, deci are centrul în mijlocul segmentului AB, adică independent atît de cei trei cocotieri cît și de reperele P_1, P_2, P_3.

În consecință, dacă el era efectiv un geometru, ar fi observat de la început că cele trei repere P_1, P_2, P_3 determinau un cerc descris pe AB ca diametru și atunci întreaga lui strădanie de a folosi cei trei cocotieri era perfect inutilă. Era suficient să determine de la început mijlocul lui AB, poate chiar cu o precizie mult mai mare decît prin măsurătorile de segmente care avea ca extremități stîncile A și B.

Dar problema este problemă de modelare matematică și îmbinată cu o logică de circumstanță la întoarcerea piratului, care abia atunci devine cu adevărat geometru. Astfel de probleme au totuși un caracter instructiv, fiindcă îndeamnă pe cititor să caute să caracterizeze punctele P_1, P_2, P_3 fără a avea vreo indicație că rezultă din intersecțiile a cîte două semidrepte perpendiculare plecînd din A și B.

Caracterul distractiv ascunde de fapt o problemă de geometrie care ar putea ridica și alte probleme, de exemplu, dacă pozițiile celor 3 cocotieri au vreo influență asupra soluției, ceea ce știm că nu. De asemenea, ce se întîmplă dacă doi sînt de o parte a lui AB și cel de al treilea de cealaltă parte, ceea ce, concret, este exclus, fiindcă enunțul îi plasează pe țărm etc.

Un alt exemplu ne conduce la o problemă de geometrie în spațiu combinată cu evaluarea unui volum. Situația are un aspect concret prin cerința ca o cioară să bea apă dintr-un ulcior în care exista puțină apă, dar nu atita cît să poată fi ajunsă cu ciocul. Cioara aruncă pietricele în ulcior și se pune întrebarea dacă ea va mai reuși să ridice apa pînă la un nivel accesibil cu ciocul ei, deci pînă aproape de gura ulciorului.

Cum vom modela acțiunea ciorii? Vom considera pietricelele sferice și de aceeași rază. Dacă în loc de pietricele am avea grăunțe sau praf de nisip, am putea presupune că infiltrația printre pori este mică și deci, dacă am avea o cantitate de apă ocupînd un volum $v < V$ unde V este volumul ulciorului, cioara ar putea aduce acest nisip pînă ar umple un volum $V-v$. Atunci apa s-ar ridica deasupra și cioara ar putea bea în liniște.

Cum însă se dispune de pietricele, dacă le aruncă în ulcior, vor rămîne spații între acestea și acolo va pătrunde apa. Aceasta înseamnă că trebuie să evaluăm aceste interstiții în care apa din ulcior va intra și dacă nu va fi destul de multă, nivelul ei nu va crește suficient.

Pînă aici raționamentul este logic, discursiv și privitor la o situație concretă, atît de concretă încît poate fi făcută și de cioară. Mai departe însă va trebui să încercăm o modelare cantitativă. Pietricelele se așează una lîngă alta și apoi în straturi. Dacă le înscriem în cubulețe de latură d egală cu diametrul sferelor, ne putem imagina ulciorul umplut de cubulețe lipite și suprapuse. Dar la pereții, care sînt curbați, cuburile nu se vor putea lipi și vom avea spații pierdute. De aceea vom face o nouă schematizare presupunînd ulciorul prismatic, deci ca o cutie prismatică dreptunghiulară dreaptă. Volumul unui cubuleț fiind d^3, iar al sferei înscrise $\pi d^3/6$, diferența $d^3 - \pi d^3/6$ va fi volumul apei care s-ar strînge în cubuleț.

Raportul $(d^3-\pi d^3/6)/d^3 \approx 0{,}48$ arată că partea din volumul cubulețelor ocupată de apă este de cca. 0,48 din volumul acestora. Cum vasul este prismatic, acest raport este valabil și pentru întregul vas și deci volumul apei din vasul prismatic nu poate depăși 0,48 din volumul vasului. Aceasta înseamnă că cioara poate ajunge să bea după ce a aruncat pietricelele, numai dacă inițial apa din vas ar fi fost aproape la jumătatea înălțimii.

În ipoteza ulciorului obișnuit și a unor pietricele mai puțin sferice, eroarea nu poate fi prea mare și cu cît pietricelele ar fi mai mici cu atît aproximația ar fi mai bună.

Am ales din acest capitol trei exemple pentru a ilustra folosirea raționamentului logic și modelarea matematică pentru investigarea unor situații concrete. Capitolul conține numeroase alte exemple, dintre care unele ca: „Minusuri", „Scații", „Turneul de șah" necesită demonstrații matematice de natură combinatorială, altele sînt de perspicacitate ca „Logică", „Tablouri logice", „Carcuri", „Cristalul". Tot la perspicacitate dar cu necesitatea urmăririi răbdătoare și cu obstacole logice care trebuie înlăturate prin alegerea justă a unei variante sînt „Schimbarea vagonului", „Rețeaua magică", „Steluța", „Întrecere de tir", și, în particular, „Monedă falsă" care dă loc unei analize logice model.

Atracția pe care o exercită problemele logice asupra unui număr mare de persoane dintre care nu lipsesc personalități matematice de prestigiu dovedește utilitatea prezentării lor într-o culegere de probleme destinate tocmai vîrstelor la care se formează, dacă este bine și călduros sprijinit și orientat, raționamentul logic deductiv, necesar nu numai în matematică, ci în orice activitate socială.

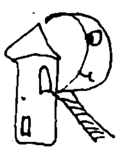
A. SCURTE PROZE CU TÎLC MATEMATIC

Cei trei filozofi

Obosiți de discuții și moleșiți de căldura verii, trei filozofi din Grecia antică s-au culcat sub un copac din grădina Academiei și au adormit. În timp ce dormeau, un trecător glumeț îi mînji pe frunte cu cărbune. Cînd s-au trezit și s-au privit, toți s-au înveselit și au început să rîdă cu poftă. Nici unul nu era neliniștit, căci fiecăruia i se părea firesc ca el, împreună cu alt înțelept, să rîdă de al treilea.

La un moment dat, toți au încetat să rîdă, căci fiecare și-a dat seama că este murdar pe frunte.

Cum au raționat ei?



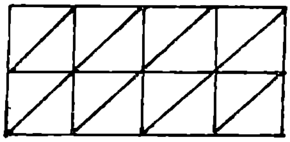
Primul înțelept, să-l numim A, a raționat astfel: „Fiecare dintre noi poate crede că fruntea lui este curată. B este convins că fruntea lui este curată și rîde de fruntea mînjită a înțeleptului C. Dar dacă B ar fi văzut că fața mea este curată, l-ar fi mirat rîsul lui C deoarece, în acest caz, C nu ar fi avut motiv să rîdă. Dar B nu este mirat, deci el poate crede că C rîde de mine. Așadar, fruntea mea este murdară".

Așa au raționat și ceilalți doi filozofi.

Ornamentul

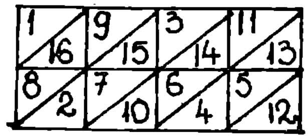
În ornamentul alăturat se pot distinge 16 mici triunghiuri. Unele grupuri de cîte 4 triunghiuri mici învecinate formează triunghiuri mari.

Pe desen se pot distinge 6 astfel de triunghiuri mari „împletite” unul într-altul.



Înscrieţi în fiecare triunghi mic al ornamentului un număr de la 1 la 16 (nu se admite repetarea numerelor), în aşa fel ca suma numerelor scrise în fiecare din cele 6 triunghiuri mari să fie egală cu 34.

Ornamentul completat potrivit cerinţelor arată astfel :

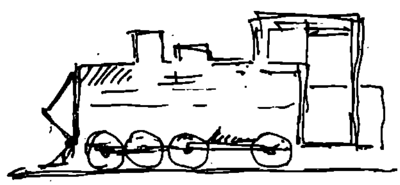


Un triunghi mare este, de exemplu, acela în care sînt înscrise numerele 1, 8, 9, 16 sau cel în care avem numerele 3, 9, 7, 15.

Schimbaţi vagonul

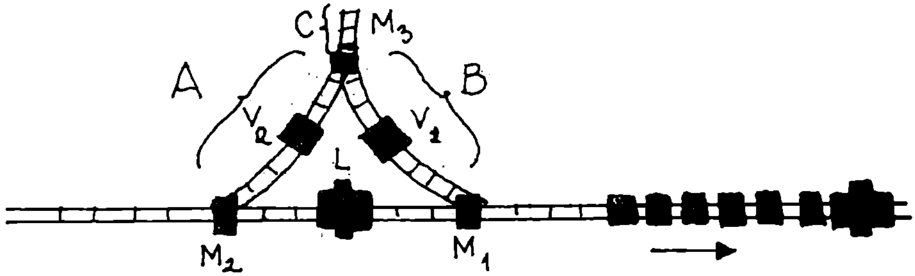
Întîmplarea ce face obiectul povestirii de faţă s-a petrecut în Franţa, în Lorena, şi constituie una dintre cele mai uluitoare acţiuni feroviare, rămasă vestită în istoria exploatării căilor ferate nu numai prin curajul celor ce au pus-o la cale, dar şi prin ingeniozitatea şi priceperea în meseria de feroviar.

În timpul celui de-al doilea război mondial, cînd Franţa era ocupată de trupele hitleriste, urma să plece spre Germania, pentru totdeauna, în mare secret, un tren avînd în garnitura sa, în ultimul vagon, o încărcătură de mare valoare pentru cultura franceză — numeroase opere de artă furate din cîteva muzee. Prinzînd de veste, membrii mişcării de rezistenţă au dat de urma garniturii şi au hotărît acţiunea de a schimba „din mers” vagonul cu operele de artă, cu altul identic, fără ca soldaţii hitlerişti care însoţeau trenul să bănuiască ceva. De altfel, după cum s-a constatat ulterior, aceştia nici nu fuseseră puşi la curent cu valoarea transportului, tocmai de teama să nu le scape vreun cuvînt care să dea francezilor de bănuit.



Trenul urma să se înscrie pe itinerarul Neufchâtel — Nancy — Metz, ultima mare localitate de pe teritoriul Franţei, pentru a trece graniţa şi a ajunge în localitatea Saarbrücken. Drept loc pentru schimbarea valorosului vagon a fost aleasă mica localitate Cambreaux, situată imediat după Metz, care prin configuraţia liniilor se preta pentru aceasta.

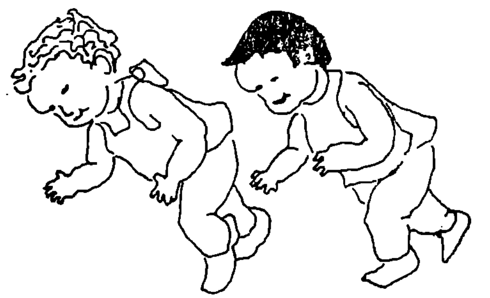
Pentru îndeplinirea operaţiei, a fost trimis la Cambreaux un vagon identic, ce a fost garat pe una din liniile de manevră ale staţiei. La Metz, lăcătuşii de revizie au provocat o defecţiune serioasă vagonului încărcat cu lucrări de artă. În staţia Cambreaux, unde trenul nu avea oprire, s-a procedat la remedierea defecţiunii. Soldaţilor hitlerişti care însoţeau trenul li s-a explicat că reparaţia nu se poate face decît pe o linie dotată cu instalaţii de ridicare. Staţia arăta astfel :



Locul unde a fost garat trenul este în dreapta jos, săgeata indicînd direcţia sa de mers. Vagonul însemnat V_1 este cel care a fost detaşat de tren. Pentru desprinderea lui de garnitură, mecanicului i s-a solicitat să dea trenul înapoi pe linia moartă B, unde se aflau instalaţiile de reparaţii, şi apoi să revină pe linia curentă şi să aştepte pînă ce reparaţia va fi gata. Pe o linie similară, A, aştepta vagonul V_2 pregătit să ia locul celui cu opere de artă. M_1, M_2, M_3 sînt macazuri, iar C reprezintă o mică porţiune de linie pe care nu poate încăpea decît un singur vagon, atît cît să treacă peste macaz, fără locomotivă. Nici locomotiva singură nu putea încăpea aici. Astfel, locomotiva de manevră, L, putea manevra cele două vagoane pe porţiunile de linie A, B şi cea dintre macazurile M_1 şi M_2.

Schimbarea între ele, a celor două vagoane va rămîne, în istoria manevrei vagoanelor pe linii feroviare, ca o operaţie de înaltă măiestrie. Ştiţi cum au fost schimbate vagoanele între ele?

Vagonul defect a fost reparat cu maximum de repeziciune. Apoi au urmat manevrele : prima mişcare a fost trecerea locomotivei peste macazul M_1. Aici are loc întîia schimbare de sens de mers (s-o notăm I), locomotiva fiind întoarsă cu spatele pe secţiunea de linie B şi împinge vagonul V_1 pînă la maximum pe porţiunea de linie C (care putea gara doar un singur vagon). Apoi locomotivei L i se schimbă din nou sensul de mers (II), după care parcurge secţiunea B, trece de macazul M_1, i se schimbă din nou sensul de mers (III), parcurge secţiunea pînă la macazul M_2, iar apoi pleacă (IV) pe linia A. În continuare, împinge vagonul V_2 pînă la capătul liniei, unde-l cuplează cu vagonul V_1 care rămăsese pe porţiunea C. După aceea i se schimbă iar sensul de mers (V), parcurge secţiunea A cu ambele vagoane remorcate şi trece cu ele peste macazul M_2. După această manevră, împinge vagoanele (VI) între M_1 şi M_2. Aici lasă vagonul V_1. Cu vagonul V_2 remorcat îşi schimbă iarăşi sensul (VII) trecînd peste macazul M_2. De aici intră din nou pe linia A (VIII), avînd vagonul V_2 în faţă, pe care îl împinge pe porţiunea C, unde este decuplat. În continuare, după ce i s-a schimbat din nou sensul de mers (IX), locomotiva parcurge secţiunea A şi depăşeşte macazul M_2. Se îndreaptă apoi (X) pe linia principală spre vagonul V_1 care, după cum ştim, rămăsese acolo. Îl cuplează, îşi schimbă iar sensul (XI) şi-l trage peste macazul M_2. De aici (XII) pleacă pe secţiunea A, unde lasă vagonul V_1. Se înapoiază singură (XIII) și trece peste macazul M_2. De aici (XIV) pornește din nou și trece și de macazul M_1. Apoi i se schimbă sensul de mers (XV) și este dusă pe linia B. Ajunsă la vagonul V_2, ce a rămas pe mica linie C, îl cuplează. Din nou își schimbă sensul (XVI), remorcînd vagonul V_2, pe care-l lasă în mijlocul liniei, la locul în care se aflau instalațiile de reparații. Continuă singură drumul, trece peste macazul M_1, i se schimbă pentru ultima oară sensul de mers (XVII) și este dusă la locul unde fusese inițial pe linia principală. Astfel, după 17 schimbări de sens de mers (operația a durat mai puțin de o oră și jumătate !) cele două vagoane au fost schimbate între ele. Mecanicul trenului a fost anunțat că poate lua vagonul „reparat" ; el a dat convoiul înapoi, l-a cuplat și apoi trenul și-a continuat drumul spre destinație, ce-i drept cu o oarecare întîrziere, care însă nu a stîrnit bănuieli.



Familială

Aseară, într-un cadru familial, s-au reunit la noi trei tați, fiecare cu fiul său, trei fiice împreună cu mamele lor, cîte doi colegi de clasă ai fiecăruia dintre copiii noștri și trei vecini. Împreună cu soția și copiii, gazde și invitați am fost în total opt persoane... Oare am numărat bine ? !

Da, numărătoarea este corectă ! Erau de față, în afara soției (1), mama soției (2), tatăl (3), bunicul meu (4) și cei trei copiii ai noștri (5, 6, 7) — un fiu, două fiice — și cu mine (8).

Copiii (gemeni) sînt în aceeași clasă, iar mama soției, tatăl și bunicul meu locuiesc în vecinătatea noastră.

Sfatul înțelepților

Trăia de mult un înțelept pe nume Hasen Said despre care mersese vestea în toată lumea. Oamenii îl numeau Înțeleptul — între — înțelepți. Și cum pornise el prin lume, ajunse într-o bună zi la curtea unui sultan, unde fu primit cu toată cinstea ce i se cuvenea.

Sultanul îl ospătă, îl găzdui, iar într-una din zile îi spuse :

— Treburile țării le conduc avînd lîngă mine întotdeauna Sfatul Înțelepților. În Sfatul acesta am ales doisprezece oameni, despre care se spune că ar fi cei mai luminați la minte din întreaga țară. Totuși, preaînțelepte Hasen, n-ai putea să pui tu Sfatul la o asemenea încercare, pe care s-o poată dezlega numai dacă fiecare va dovedi o înțelepciune demnă de încrederea ce le-am arătat-o ?

Hasen Said se gîndi puțin și rosti :

— Bine, adună-ți Sfatul.

Cînd întregul Sfat al Înțelepților se strînse în sala tronului, Hasen li se adresă astfel :

— O, înţelepţilor, stăpînul nostru, Sultanul, v-a adunat aici ca să arătaţi întreaga strălucire a minţii voastre prea luminate. Slugile au pus în faţa voastră cîte o cutie. Toate cutiile sînt la fel. În săculeţul acesta am douăsprezece pietre preţioase : unele sînt rubine, altele, smaralde. Eu o să vă rog ca fiecare dintre voi, pe rînd, să iasă o clipă din sală, iar în absenţa lui o să-i pun în cutie fie un rubin, fie un smarald.

Şi Hasen Said îl invită pe primul dintre înţelepţi să părăsească sala. Lui îi puse un rubin. Următorilor doi le puse cîte un smarald. Astfel, ieşiră unul după altul toţi înţelepţii, iar pietrele scumpe fură puse, una cîte una, în cutii. Cînd reveni în sală primul înţelept, Hasen le spuse :

— Fiecare dintre voi a văzut ce fel de piatră am pus în cutia celorlalţi, dar nici unul nu ştie ce se află în cutia lui. Dacă voi sînteţi cu adevărat înţelepţi, dacă ochii şi memoria nu vă înşeală, nimic nu vă va împiedica să îndepliniţi rugămintea mea : toţi cei în ale căror cutii li s-a pus cîte un smarald, să ia cutiile şi să le pună la picioarele Sultanului.

Aşa grăi înţeleptul — între — înţelepţi, totuşi cei cărora li se adresase rămaseră nemişcaţi la locurile lor. Sultanul se făcu roşu de mînie şi dădu poruncă să fie izgoniţi din palat toţi cei ce făceau parte din Sfatul înţelepţilor, dar Hasen îl opri :

— Nu te pripi, Măria-ta. Şi eu aş fi făcut întocmai ca ei.

Peste zece minute, Hasen li se adresă din nou înţelepţilor :

— Cel care are în cutia lui un smarald, să aducă cutia cu preţioasa piatră la picioarele Sultanului.

Aceeaşi linişte ; nimeni nu făcu nici măcar un gest. Hasen Said repetă invitaţia la fiecare zece minute, iar cînd se împlini un ceas de la prima rugăminte, o parte dintre înţelepţi se ridicară şi aduse cutiile sultanului. Acesta le deschise — înăuntrul lor, numai smaralde. Ceru să vadă şi cutiile celor ce rămăseseră la locurile lor. Toţi aveau numai rubine. Şi trebuie să mai spunem că în tot acest ceas, nici unul dintre înţelepţi nu scoase o vorbă, nu întrebă nimic.

— O, Măria-ta, zise Hasen după ce se încheie încercarea, poţi fi mîndru : în Sfatul tău stau numai oameni care merită să poarte titlul de înţelept.

Şi, luîndu-şi rămas bun de la toţi, plecă pe drumul său.

Cîte smaralde a pus Hasen Said în cutiile înţelepţilor şi cum au ghicit aceştia ce piatră se află în faţa fiecăruia dintre ei ?

Nu întîmplător Hasen Said a fost nevoit să pună de mai multe ori întrebarea. De cîte ori ? ! Dacă între prima şi ultima întrebare s-a scurs un ceas, iar el s-a adresat Sfatului la fiecare 10 minute, înseamnă că a rostit întrebarea de 7 ori. Şi tot aşa, nu întîmplător înţelepţii au aşteptat să pună el cele şapte întrebări pînă s-au hotărît să-şi ducă fiecare cutia. Să vedem, acum, cum au judecat cei 12 înţelepţi. Pe parcurs au fost mai multe variante :

I) Dacă era un singur smarald ? Dacă toţi ar fi ştiut acest lucru, problema ar fi putut fi rezolvată, cel căruia i se nimerea piatra s-ar ridica şi ar duce-o sultanului. Dar zece dintre ei văzuseră două smaralde, aşa că aceştia nu au schiţat nici un gest.

II) Dar dacă printre cele douăsprezece pietre preţioase erau doar două smaralde? Oricare din cei doisprezece înţelepţi ar fi judecat astfel: „Eu ştiu că în cutia unuia se află un smarald. Dacă ar fi fost un smarald, cum a văzut că la fiecare din ceilalţi există doar rubine, s-ar fi ridicat şi ar fi dus cutia sultanului. Dar n-a făcut-o pentru că a văzut că la mine se află o asemenea piatră şi consideră că eu trebuia să dau curs primei întrebări. Înseamnă că avem amîndoi cîte un smarald şi deci trebuie să ne ridicăm amîndoi". Cum n-au făcut-o înseamnă că sînt cel puţin trei pietre, adică unul dintre ei a văzut cel puţin trei pietre.

Continuînd în acest mod, înţelepţii ridicîndu-se după a şaptea întrebare reiese că erau şapte smaralde.

Drumuri în piramidă

Care este numărul de drumuri posibile în cadrul figurii de mai jos, astfel ca fiecare drum să fie marcat cu litere alăturate, care împreună să formeze cuvîntul MATEMATICA?

M
MAM
MATAM
MATETAM
MATEMETAM
MATEMAMETAM
MATEMATAMETAM
MATEMATITAMETAM
MATEMATICITAMETAM
MATEMATICACITAMETAM

Răspunsul este foarte greu de găsit dacă vom merge din vîrful piramidei pe drumurile posibile. Vom merge „de-a-ndaratelea", adică de la bază. Considerînd jumătatea din stînga a piramidei şi coloana centrală, să observăm că pentru fiecare pas înapoi există două posibilităţi de alegere (AC, cu C la stînga, sau deasupra). Pentru fiecare citire AC există două posibilităţi de a-l alege pe I (la stînga sau deasupra) deci, în total, $2 \cdot 2$ posibilităţi pentru traseul ACI. În felul acesta, pentru partea din stînga avem $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{9 \text{ ori}} = 2^9$ drumuri. Considerînd şi cealaltă parte a piramidei, obţinem $2^9 \cdot 2 = 2^{10}$ drumuri, din care trebuie să-l scădem pe cel central, numărat de două ori.

Rezultă $2^{10} - 1 = 1023$ drumuri.

Istoria şahului

Marele nostru scriitor Mihail Sadoveanu istoriseşte, în povestirea „Aventurile şahului" despre un brahman înţelept pe nume Sesa şi despre un împărat căruia i-a propus atît de cunoscutul joc de şah.

„— O, Împărate slăvite, a cuvîntat el închinîndu-i-se, află că eu sînt un sol al lui Dumnezeu; ți-am adus un joc ca să-l înveți și să înlături suferința de care ești cuprins. Iată această tablă care cuprinde 64 de carouri în două culori alternative. În fața ei se așează doi jucători: unul de o parte și altul de alta. Fiecare își rînduiește pe două linii piesele sale: împărat, sfetnici, călăreți, soldați de rînd. Unul are 16, celălalt la fel. Fiecare piesă, cu rînduielile și mișcările ei: împăratul cu ale sale, sfetnicii cu ale lor, oștenii de asemenea, întocmai ca în împărăția cea adevărată a Măriei-tale. Mișcînd fiecare la rîndul său cîte o piesă, jucătorii se silesc să atace, să slăbească și să distrugă cealaltă oștire ca să prindă pe regele de cealaltă culoare.

— Foarte frumos lucru, înțeleptule brahman, a răspuns împăratul, învață-mă jocul tău. Sessa a stat cîteva zile lîngă domnul său, învățîndu-l. Au privit și curtenii, învățîndu-l și ei, s-au bucurat cu toții și împăratul nu a mai fost înnegurat de plictis <...>

„— O, filozofule, i-a zis el cu bunătate, se cuvine să te răsplătesc pentru învățătura ta și mai ales pentru jocul tău. Cere-mi un dar și ți-l voi da. De mi-i cere juvaieruri și pămînturi, ale tale să fie. Ești vrednic.

— Doamne, a răspuns Sessa, jocul meu nu poate fi plătit.

— Cere orice vrei, brahmanule; sînt în stare să răspund la orice dorință.

— Doamne, binevoiește atunci a afla că cer un bob de grîu pentru cea dintîi căsuță a acestei table de joc, două boabe pentru a doua, patru pentru a treia, opt pentru a patra și tot așa în progresie geometrică[1] pînă la a 64-a căsuță. Cine îmi va putea plăti?

— Jitnicerii mei îți vor da ceva mai mult, se înveseli împăratul. Să-ți verse o baniță din grîul cel mai bun.

— Înălțate împărate, te rog să nu te superi pe slujitorul tău care este un brahman sărac. O baniță de grîu nu ajunge.

— Să-ți dea două.

— Aș fi de părere, împărate prealuminate, preaslăvit și preaîndurător, să dai poruncă jitnicerilor măriei-tale să facă o socoteală pe o foaie de papirus. Să scoată penele și să socotească. Împărăția-ta trebuie să le facă pe toate fără îndoială și cu dreptate. Nu-mi trebuie nici un bob mai mult decît va arăta socoteala.

— Facă-se voia ta, a încuviințat împăratul.

Vistiernicii s-au înfățișat. Au stat și au socotit; s-au uitat unul la altul și iar au socotit. Jitnicerii au numărat în vremea asta boabele de grîu cîte se cuprind într-o măsură și au văzut și cîte măsuri se cuprind într-o baniță.

Pentru determinarea numărului de boabe de grîu, pe care l-a cerut Sessa drept recompensă împăratului perșilor, va trebui să însumăm o progresie geometrică cu rația 2, avînd primul termen 1 și ultimul 2^{63}; suma acestei progresii are valoarea

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

---

[1] Se numește progresie geometrică un șir de numere în care fiecare se obține din precedentul prin înmulțire cu un același număr (numit *rație*).

Acesta este numărul de boabe de grîu pe care l-a cerut Sessa ca recompensă pentru descoperirea jocului de șah. Presupunînd că 1 m^3 de grîu conține circa 20 000 000 de boabe, avem nevoie de 992 337 203 685 m^3 de grîu, adică de aproximativ 8 ori mai mult grîu decît producția anuală a întregului Pămînt însămînțat cu grîu.

Împăratul se desfăta jucînd șah cu brahmanul său. Avea o partidă în care nădăjduia să biruiască.

— Ce-ați făcut? întrebă el vesel pe vistieri și slujitori. Curtenii își aplecară nasurile în pămînt.

— Ați socotit?

— Am socotit, stăpîne.

— Ce-ați aflat?

— Stăpîne, nu îndrăznim să-ți arătăm socoteala noastră; trebuie s-o mai facem odată.

— Cum? Ce înseamnă asta? se încruntă împăratul. Ați aflat un număr?

— Am aflat, înălțate împărate. Numărul nu spune mare lucru; sînt 20 de cifre una după alta: 18 446 744 073 709 551 615. Dar după cîte am socotit cîte boabe cuprinde o baniță și am aflat împărțirea, am aflat lucru cel mai înfricoșător dintre toate: că într-o sută de ani împărăția nu poate aduna în jitnițele ei atîta grîu.

Atunci tînărul împărat s-a scărpinat după ureche.

Iar înțeleptul Sessa a zîmbit:

— Să se socotească totuși, a zis el, dacă este vorba de 100 de ani sau de 1 000.

Vistiernicii au îngălbenit, căci socoteala acestui număr este într-adevăr ciudată.

Dacă regatul ne dă recoltă de 300 000 de vagoane de grîu anual, ar trebui, pentru plata brahmanului Sessa, îngrămădite recoltele a 280 000 de ani. Plata acestei cantități, dacă ar fi să se facă prin contribuția întregii populații a globului pămîntesc, ar necesita astăzi o acumulare de vărsăminte de 120 000 000 de lei pentru fiecare din cei două miliarde de oameni. Cînd vistiernicii au raportat la vremea de atunci asemenea socoteli fantastice, măritul împărat și-a pus miinile în cap".

Se mai povestește că slujitorii împăratului au calculat destul de repede cîte boabe trebuiau plătite brahmanului Sessa. Cum au judecat ei?

Pentru a determina cîte boabe trebuie plătite brahmanului Sessa, vistiernicii au efectuat suma:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

În povestire se arată că acest număr este egal cu $2^{64} - 1$. Pentru a arăta acest lucru, să notăm suma de mai sus cu S. Avem:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 1 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}) = (2 - 1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}) =$$

$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \ldots + 2 \cdot 2^{63} - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 -$$
$$- 1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^3 - \ldots - 1 \cdot 2^{63} =$$
$$= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} - 1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \ldots$$
$$\ldots - 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Pentru a calcula acest număr, vom scrie $2^{64} = (2^{10})^6 \cdot 2^4 = 1\,024^6 \cdot 16 = (1\,024^3)^2 \cdot 16 = (1\,024 \quad 1\,024 \cdot 1\,024)^2 \cdot 16 = (1\,048\,576 \cdot 1\,024)^2 \cdot 16 = 1\,048\,576^2 \cdot 1\,024^2 \cdot 16 = 1\,048\,576^3 \cdot 16 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Paharele inversate

Să considerăm o mulţime de n pahare aşezate cu gura în sus. Se cere să răsturnăm toate paharele printr-o serie de operaţii, astfel încît la fiecare operaţie să fie întoarse $n - 1$ pahare. Să se arate că acest lucru este posibil pentru n par şi imposibil pentru n impar.

Dacă n este par şi efectuăm n operaţii, lăsînd nemişcat cîte un alt pahar pentru fiecare operaţie, atunci, după ultima operaţie, fiecare pahar a fost întors de $n - 1$ ori, deci toate paharele au fost răsturnate.

Dacă n este impar, să asociem unui pahar cu buza în sus $+1$ şi unui pahar cu buza în jos -1. În poziţia iniţială, produsul numerelor asociate este $+1$ şi în cea finală -1. Orice operaţie inversează $n - 1$ pahare, deci un număr par. Rezultă că orice operaţie lasă produsul numerelor asociate neschimbat.

V	V	V	V
V	Λ	Λ	Λ
Λ	Λ	V	V
V	V	V	Λ
Λ	Λ	Λ	Λ

Comoara îngropată

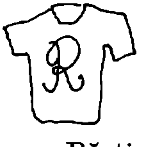
Un pirat a hotărît să îngroape o comoară pe ţărmul unei insule; pe ţărm erau două stînci asemănătoare A şi B şi, ceva mai departe de mare, trei cocotieri C_1, C_2, şi C_3. Stînd în C_1, piratul a măsurat segmentul C_1A_1 perpendicular pe C_1A şi egal ca lungime cu acesta şi îndreptat, faţă de C_1A, în regiunea opusă perimetrului triunghiului AC_1B. În acelaşi mod el a măsurat segmentul C_1B_1, perpendicular şi egal cu C_1B şi îndreptat, faţă de C_1B, în regiunea opusă perimetrului triunghiului AC_1B. Apoi piratul a marcat punctul P_1, intersecţia segmentelor AB_1 şi BA_1. Stînd în C_2 şi C_3, el a determinat în mod similar punctele P_2 şi P_3 şi, în cele din urmă, a îngropat comoara în locul determinat de centrul cercului circumscris triunghiului $P_1P_2P_3$. Întorcîndu-se după cîţiva ani, piratul şi-a dat seama că între timp o furtună puternică smulsese din pămînt toţi cocotierii. Cum a reuşit el, în pofida acestui fapt, să-şi regăsească comoara?

Triunghiurile AB_1C_1 şi A_1BC_1 sînt egale şi, prin urmare, unghiurile $\widehat{C_1AB_1}$ şi $\widehat{C_1A_1B}$ sînt egale. În plus, $\widehat{AP_1A_1} = \widehat{AC_1A_1} = 90°$ şi deci $\widehat{AP_1B} = 90°$. Astfel, P_1 (şi, prin urmare, şi P_2 şi P_3) sînt situate pe un cerc cu diametrul AB; comoara este deci ascunsă la mijlocul segmentului AB.

Drumul bun

Un călător, rătăcind printr-un ţinut locuit de două triburi, ajunge la o bifurcaţie a drumului. Neştiind pe care drum să apuce pentru a ajunge la destinaţie, se apropie de un băştinaş aflat întîmplător la răspîntie. El ştia că membrii unui trib din cele două mint totdeauna, iar membrii celuilalt trib spun totdeauna adevărul. Pe de altă parte, călătorul mai ştia că locuitorii acelui ţinut sînt aşa de ursuzi încît ei nu răspund decît la o singură întrebare.

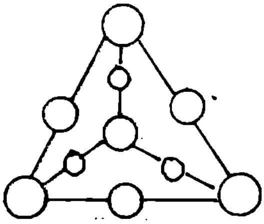
Cum trebuie să formuleze întrebarea călătorul nostru pentru a găsi drumul pe care trebuie să meargă ştiind că el nu are nici o posibilitate de a afla dacă băştinaşul întîlnit minte sau spune adevărul?



Dacă cerem ca răspunsul la întrebare să fie „da" sau „nu", călătorul poate proceda în felul următor: arătînd cu degetul un drum din cele două, îi spune băştinaşului: „Dacă te-aş întreba dacă acest drum duce spre satul pe care îl caut, ai răspunde «da»?".

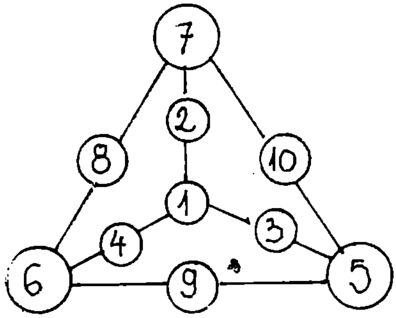
Băştinaşul, chiar dacă este mincinos, este silit să spună adevărul! Într-adevăr, dacă drumul duce spre sat, el ar răspunde la întrebarea directă „nu", dar, în modul în care este pusă întrebarea el minte şi răspunde „da". Pe de altă parte, dacă drumul nu duce spre sat, mincinosul este silit să răspundă „nu".

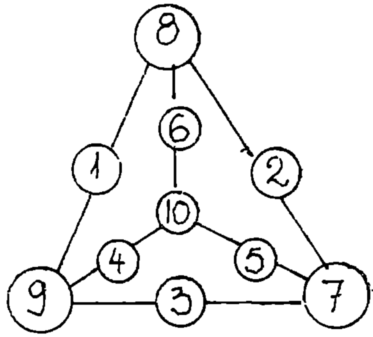
Rețeaua magică



Să se dispună în fiecare cerculeț unul din numerele de la 1 la 10, fiecare număr fiind folosit o singură dată, în așa fel încît suma numerelor așezate pe laturile și vîrfurile fiecăruia din cele trei triunghiuri mici să fie egală cu 28.

R. Avem, de exemplu, soluțiile :





Inversări miraculoase

Iată cîteva perechi de numere la care suma și produsul fiecărei perechi se deosebesc numai prin prin poziția cifrelor :

$9 + 9 = 18$	$9 \times 9 = 81$
$24 + 3 = 27$	$24 \times 3 = 72$
$47 + 2 = 49$	$47 \times 2 = 94$
$263 + 2 = 265$	$263 \times 2 = 526$

Încercați să găsiți și alte numere de acest fel.

R. O astfel de pereche este 497 și 2.

Cum și-a potrivit Kant ceasul

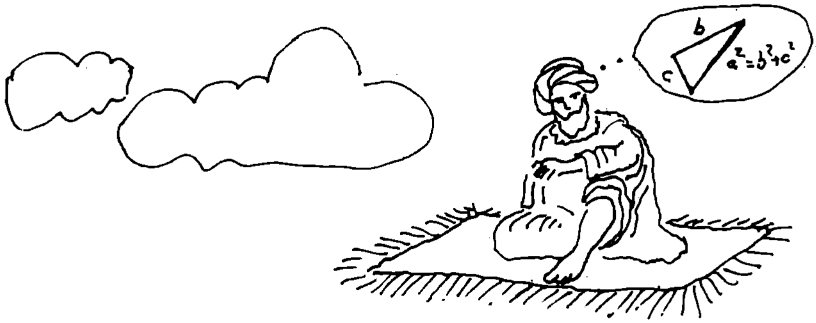
Se spune că filozoful german Immanuel Kant era un burlac cu obiceiuri atît de regulate, încît locuitorii Könisbergului își potriveau ceasurile cînd îl vedeau trecînd prin anumite puncte ale orașului.

Într-o seară, Kant fu neplăcut surprins să constate că propriul său ceas de perete a stat. Servitorul uitase să-l întoarcă. Cum ceasul de buzunar era dat la reparat, Kant nu avea nici o posibilitate de a potrivi ceasul de perete. Așa că se hotărî să facă o vizită bunului său prieten Schmidt, a cărui locuință era la o depărtare de circa 2 km. Cum intră în casa acestuia, filozoful își aruncă o privire spre pendulă.

După cîteva ore, Kant își luă rămas bun și o porni spre casă pe același drum pe care venise. Ca întotdeauna, el a mers cu un pas încet și constant pe care nu și-l schimbase de multă vreme. Nu avea nici o idee despre cît durează drumul de la Schmidt pînă acasă, pentru că acesta din urmă se mutase de curînd în împrejurimi. Cu toate acestea, imediat ce a intrat în casă, Kant potrivi limbile ceasului din perete.

Cum a putut ști Kant care era ora exactă?

Immanuel Kant a putut potrivi, la sosire, ceasul raționind astfel: înainte de a pleca de acasă, el a întors ceasul de perete astfel că, privindu-l la plecare și la venire, a putut determina cît timp a lipsit de acasă. Din acesta, a scăzut timpul petrecut la Schmidt (fiindcă s-a uitat, la venire și la plecare, la ceasul din holul acestuia). A obținut astfel timpul total petrecut pe drum. Deoarece s-a întors pe același drum și cu aceeași viteză, a împărțit durata totală a plimbării la 2, ca să afle cît a făcut la întoarcere. Acest timp, adăugat la ora pe care o arăta ceasul lui Schmidt, atunci cînd i-a părăsit acestuia locuința, i-a indicat ora sosirii acasă.



Minusuri

În toate căsuțele unui tablou de 100 × 100 sînt scrise plusuri. Se convine să se schimbe concomitent semnele în toate căsuțele unei linii sau unei coloane. Se poate ca, efectuînd aceste operații de mai multe ori, să se obțină un tablou în care să fie exact 1985 de minusuri? Dar 1984?

Să presupunem că în linia i am schimbat semnul de x_i ori și în coloana k de y_k ori. Atunci în căsuța situată la intersecția liniei i cu coloana k semnul se va schimba de $x_i + y_k$ ori. Prin urmare, în această căsuță semnul va fi minus atunci și numai atunci cînd x_i+y_k este impar. Să considerăm, la un moment dat, tabelul, de exemplu ca în figura de mai jos. Dacă într-o coloană k (s-au linie i) s-a făcut un număr par sau impar de schimbări, deci dacă y_k (sau x_i) este par sau impar, asociem acelei coloane (linii) numărul 0 sau 1. Tabelul arată, de pildă, că în coloana a treia am făcut un număr impar de schimbări, iar în linia a doua un număr par.

Fie x numărul de schimbări „impare" ale liniilor (deci numărul numerelor x_i impare) și y numărul de schimbări „impare" ale coloanelor (deci numărul numerelor y_k impare). Se observă că un minus în tabel

	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+

se obţine la intersecţia unei linii şi a unei coloane care au numere de paritate diferită. Deoarece pe linie avem x de „1", fiecare se asociază celor $100-y$ de „0", deci obţinem $x(100-y)$ încrucişări de linii „impare" şi coloane „pare".

Analog, vom obţine $y(100-x)$ încrucişări de coloane „impare" şi linii „pare", deci vom obţine, în total:

$$x(100-y)+y(100-x)=$$
$$=100x+100y-2xy$$

minusuri.

Este acum evident că nu putem avea:

$$100x+100y-2xy=1985$$

căci în primul membru avem un număr par, iar în al doilea un număr impar.

Să cercetăm acum cazul a 1984 de minusuri. Egalitatea:

$$100x+100y-2xy=1984$$

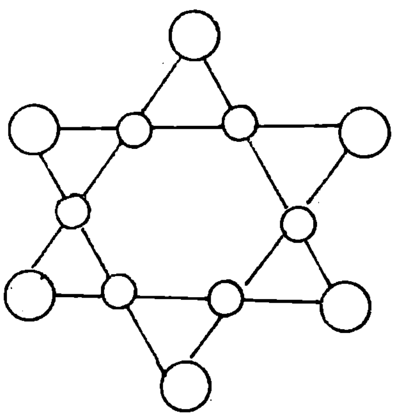
se mai poate scrie, după cîteva calcule:

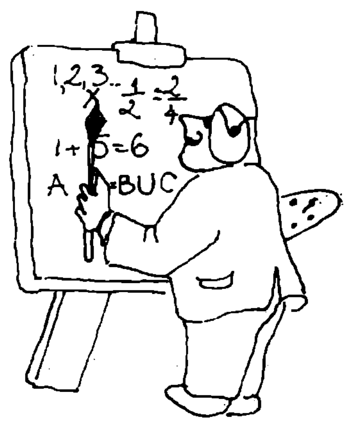
$$(x-50)(y-50)=1508=4\cdot 377=4\cdot 13\cdot 29.$$

De aici rezultă că unul din factorii $x-50$ şi $y-50$ trebuie să fie neapărat unul din numerele $4\cdot 13$, $4\cdot 29$, $13\cdot 29$, $4\cdot 13\cdot 29$ dar, în toate cazurile, x(sau y) depăşeşte pe 100, contrar faptului că $0\leqslant x\leqslant 100$, $0\leqslant y\leqslant 100$.

Deci, nici în acest caz, nu putem avea soluţie.

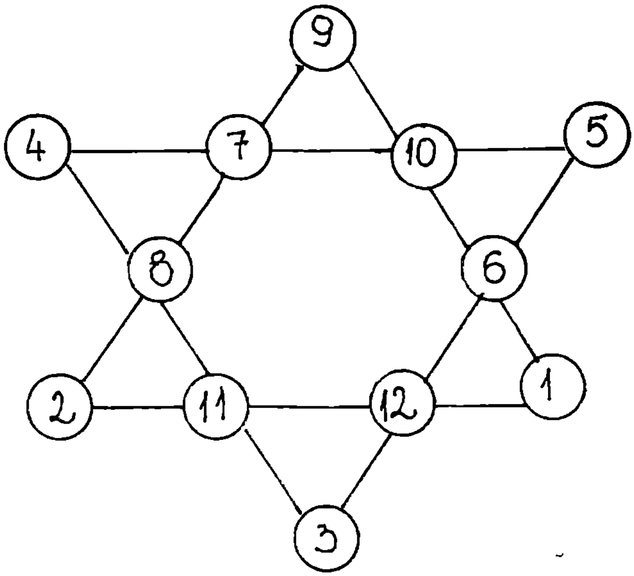
„Steluţa"





În cerculeţele din configuraţie plasaţi cîte un număr dintre numerele de la 1 la 12, fiecare număr fiind folosit o singură dată, aşa fel încît suma numerelor din cele patru cerculețe așezate de-a lungul fiecăreia din cele șase laturi ale steluței să fie egală cu 26.

R. Avem, de exemplu, configurația :



Etichetele încurcate

În trei cutii se află bile : în prima, două bile negre, în a doua, două bile albe, iar în a treia una albă și una neagră. Cutiile au fost etichetate, în funcție de conținutul lor, cu NN, AA, AN. Din greșeală, cineva a lipit greșit etichetele pe cele trei cutii încît nu se mai potrivesc deloc cu conținutul cutiilor.

Pentru a determina conținutul cutiilor, avem voie să extragem o singură bilă o dată dintr-o cutie, fără a privi în cutie.

Care este cel mai mic număr de extracții necesar pentru a determina conținutul cutiilor ?

Este necesară o singură extracție. Extragem o bilă din cutia etichetată „alb-negru". Să presupunem că bila extrasă este neagră. Rezultă că cealaltă bilă este tot neagră, căci altfel eticheta ar fi lipită corect. Deci am identificat cutia cu bile negre. Rezultă că cea a etichetelor „alb-alb" va conține o bilă albă și una neagră, căci altfel eticheta ar fi lipită corect. A treia cutie etichetată „negru-negru" va conține, neapărat, o bilă albă și alta neagră.

Prin același raționament rezolvăm problema dacă bila extrasă este albă.

Egalități interesante :

$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22,$

$1^2 + 6^2 + 7^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2,$

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 24^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 24^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Verificați egalitățile și căutați altele asemănătoare, pentru alte numere.

R. Vom folosi identitățile :

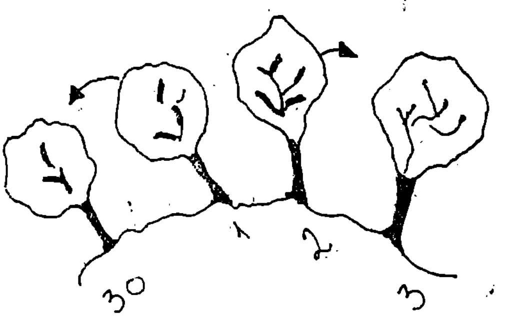
$$a^n + (a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n + (a + 9b + 4c)^n +$$
$$+ (a + 6b + 5c)^n + (a + 10b + 6c)^n = (a + b)^n + (a + c)^n +$$
$$+ (a + 6b + 2c)^n + (a + 4b + 4c)^n + (a + 10b + 5c)^n +$$
$$+ (a + 9b + 6c)^n.$$

pentru $a, b, c \in \mathbb{N}$ și $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dînd valori lui a, b, c găsim alte egalități asemănătoare.

Scatiii

În 30 de copaci așezați în cerc sînt 30 de scatii zglobii (pe fiecare copac cîte unul). Din timp în timp, doi scatii zboară deodată pe copacii alăturați, în sensuri contrare (unul în sensul acelor de ceasornic, celălalt în sens contrar).

Să se demonstreze că scatiii nu se strîng niciodată într-un singur copac.



R. Vom numerota copacii în ordine (să zicem, în sensul acelor de ceasornic) de la 1 la 30. Vom nota prin a_k numărul de scatii aflați la un moment dat pe al k-lea copac, unde $k \in \{1, 2, \ldots, \ldots, 30\}$.

Să considerăm expresia :

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \\ + \ldots + 30 \cdot a_{30}.$$

Vom arăta că dacă doi scatii zboară pe copacii vecini, în sensuri opuse, atunci S sau rămîne neschimbată, sau se modifică cu 30.

În adevăr, să presupunem că un scatiu zboară de pe copacul al k-lea pe copacul vecin (în sensul acelor ceasornicului), deci pe copacul $k + 1$. Suma S devine :

$$S' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (k - 1)\, a_{k-1} + k(a_k - 1) + (k + 1) \cdot$$
$$\cdot (a_{k+1} + 1) + \ldots + 30 \cdot a_{30} =$$
$$= 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (k - 1)a_{k-1} + ka_k + (k + 1)a_{k+1} + \ldots +$$
$$+ 30 \cdot a_{30} - k + k + 1 = S + 1,$$

adică S s-a mărit cu o unitate. Aici, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 29\}$.

Dacă scatiul zboară de pe copacul 30 pe copacul 1, S' devine:

$$S' = 1 \cdot (a_1 + 1) + 2 \cdot a_2 + \ldots + 29 \cdot a_{29} + 30(a_{30} - 1) = S - 29.$$

Deci, în acest caz, suma S se mărește cu 1 sau scade cu 29.

Invers, dacă scatiul zboară în sens contrar acelor de ceasornic, atunci suma S se micșorează cu 1 sau se mărește cu 29.

La un zbor simultan a doi scatii, în sensuri opuse, rezultă că suma S sau nu se modifică, sau se modifică cu 30 ($= 29 + 1$).

În momentul inițial, pe fiecare capac stătea cîte un scatiu deci, la acel moment:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \ldots + 30 \cdot 1 = 465.$$

După un număr oarecare de zboruri, vom obține o sumă S care va diferi de cea de mai sus printr-un multiplu întreg al lui 30 (potrivit celor arătate mai sus) deci va fi de forma $465 + 30p$. Dacă scatii s-ar strînge pe un singur copac, să zicem al q-lea, suma S ar fi, evident, egală cu $30q$ (căci atunci $a_q = 30$ și $a_t = 0$ pentru toți $t \neq q$) deci va trebui să avem $465 + 30p = 30q$, sau $30(q - p) = 465$, absurd, căci membrul al doilea nu este număr par, pe cînd primul, da.

Deci cei 30 de scatii nu se pot strînge într-un singur copac.

O remiză logică

La un concurs, trei participanți au întrunit numărul maxim de puncte. Pentru a stabili învingătorul, juriul a decis să le pună o ultimă problemă suplimentară. Li s-au arătat 5 bucățele de hîrtie: 3 albe și două negre. Apoi, cei trei concurenți au fost legați la ochi și fiecăruia i s-a lipit pe frunte o hîrtiuță albă, iar cele negre au fost distruse.

După aceasta, legăturile de la ochi au fost scoase și s-a anunțat că va învinge cel care va stabili primul culoarea hîrtiuței lipită pe fruntea sa. Niciunul din cei trei concurenți nu putea să vadă culoarea hîrtiuței lipite pe fruntea sa, în schimb vedea hîrtiuțele albe de pe fruntea celorlalți doi.

După un timp de gîndire, toți trei concurenți au ajuns concomitent la concluzia că au pe frunte o hîrtiuță albă, ceea ce a determinat juriul să declare remiză. Cum au raționat cei trei concurenți?

Să numim cei trei concurenți prin A, B, C. Concurentul C, de exemplu, a raționat astfel:

„Dacă unul dintre noi ar vedea două bilețele negre, ar răspunde imediat că el are biletul alb. Dar toți tac, deci există pe frunțile noastre cel mult un bilețel negru; acesta ar putea fi pe fruntea mea, deoarece eu văd pe frunțile celorlalți numai bilete albe. Dar dacă A și B ar vedea pe fruntea mea biletul negru, știind și ei că nu există decît cel mult un bilet negru, ar anunța că ei au bilet alb. Ei însă tac; deci eu nu am bilet negru, deci am alb!"

Așa au judecat toți trei.

Tabla de şah „ciuntită”

Dintr-o tablă de şah 8 × 8 se elimină două colţuri opuse. Poate fi acoperită suprafaţa rămasă cu piese de domino 2 × 1?

Nu putem acoperi tabla în modul cerut deoarece, prin eliminarea a două colţuri, deci a două pătrăţele de aceeaşi culoare, vom obţine că diferenţa dintre numărul pătrăţelelor albe şi cel al pătrăţelelor negre este 2 (sau invers), ori, o piesă de domino acoperă, simultan, şi un pătrăţel alb, şi unul negru, deci, oricum am aşeza piesele, numărul de pătrăţele albe acoperite va fi egal cu numărul celor negre.

Fesurile

Se povesteşte că într-un război trei soldaţi au căzut prizonieri. Aceştia se numeau Nikim, Altus şi Ram. S-a hotărît ca ei să fie executaţi. Totuşi, comandantul învingătorilor, mare amator de probleme logice, le spuse :

— Vă dau posibilitatea să vă salvaţi şi îi puse unul în spatele altuia. Iată — zise el — în această desagă am două căciuli albe şi trei negre. Pe capul fiecăruia voi pune cîte o căciulă. Dacă măcar unul va ghici ce culoare are căciula de pe capul său, veţi scăpa toţi, dacă nu, toţi veţi fi omorîţi.

Prizonierilor li se puse o legătură la ochi, după care fu aşezat cîte un fes pe capul fiecăruia. Apoi li se desfăcu legăturile. Nikim, ultimul dintre ei, văzu fesurile celor doi din faţă şi spuse :

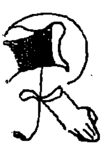
— Nu ştiu ce culoare are fesul meu.

Altus, al doilea, privi culoarea fesului lui Ram, aflat în faţa sa şi spuse şi el, de asemenea, că nu ştie ce culoare are fesul de pe capul său.

În sfîrşit, Ram, care nu vedea deloc culorile fesurilor celor doi din spatele său, spuse culoarea fesului pe care-l purta pe cap.

Ceilalţi doi prizonieri strigară de bucurie căci, într-adevăr, Ram ghicise.

Cum a judecat el şi ce culoare avea fesul aşezat pe capul lui?



Din răspunsul lui Nikim, ceilalţi doi prizonieri au dedus că pe capul lor nu pot exista numai fesuri albe, căci altfel el ar fi trebuit să spună „negru”. Deci pe capul lor exista cel puţin un fes negru. Dacă Altus ar fi văzut pe capul lui Ram fes alb, atunci el ar fi răspuns, cu siguranţă, „negru”. Dar el a văzut negru şi n-a putut răspunde. De aici, Ram a tras concluzia că pe capul său se află un fes negru.

Turneul de şah

Într-un turneu şahist, în care fiecare a jucat cu fiecare o singură dată, jumătate din puncte au fost obţinute de participanţii care au ocupat ultimele trei locuri în clasament. Cîţi jucători au participat la turneu?

După cum se știe, o partidă valorează un punct; el este acordat învingătorului sau este împărțit în mod egal celor doi jucători în cazul remizei $\left(\text{fiecare cîștigă } \frac{1}{2} \text{ punct}\right)$.

Să notăm cu n numărul de jucători (deocamdată necunoscut) și pe aceștia $k_1, k_2, \ldots, k_n$. În total, în turneu se vor juca $\frac{n(n-1)}{2}$ partide căci fiecare joacă cu ceilalți $n-1$, deci vor exista $\underbrace{[(n-1) + \ldots + (n-1)]}_{n \text{ ori}} : 2$ jocuri (am împărțit la doi căci în socoteala noastră am luat în considerație și jocul dintre A și B, dar și cel dintre B și A).

Să notăm cu x_t punctajul total obținut de jucătorul k_t, $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și să presupunem, fără a restrînge generalitatea problemei, că $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ (în caz contrar, renumerotăm jucătorii).

Potrivit enunțului, $n \geqslant 4$ (adică avem cel puțin 4 jucători în turneu) și:

$$(n-3)x_3 = \underbrace{x_3 + x_3 + \ldots + x_3}_{n-3 \text{ ori}} \leqslant x_4 + x_5 + \ldots + x_n = \frac{n(n-1)}{4}$$

(am folosit inegalitățile $x_3 \leqslant x_4$, $x_3 \leqslant x_5, \ldots, x_3 \leqslant x_n$).

Dar, jucîndu-se $\frac{n(n-1)}{2}$ partide și fiecare partidă jucată producînd un punct, ultimii trei jucători, ca și primii $n-3$, au obținut $\frac{n(n-1)}{4}$ puncte, astfel că am putut scrie ultima egalitate. De aici rezultă și:

$$\frac{n(n-1)}{4} = x_1 + x_2 + x_3 \leqslant x_3 + x_3 + x_3 = 3x_3.$$

Deci, folosind ambele ultime relații, rezultă:

$$(n-3)x_3 \leqslant x_4 + \ldots + x_n = \frac{n(n-1)}{4} = x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3x_3$$

de unde:

$$(n-3)x_3 \leqslant 3x_3$$

adică $n - 3 \leqslant 3$, deci $n \leqslant 6$.

Așadar, $4 \leqslant n \leqslant 6$.

Să cercetăm pentru ce valori ale lui n, cuprinse între 4 și 6, avem soluții ale problemei.

Dacă $n = 4$ atunci obținem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 = \frac{4(4-1)}{4} = 3$$

deci avem tabela scorului din figura 1. Există soluţie.

	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1		0	0	0
k_2	1		0	0
k_3	1	1		0
k_4	1	1	1	

Fig. 1

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
k_1		1	0	0	0
k_2	0		1	1	0
k_3	1	0		1	0
k_4	1	0	0		1
k_5	1	1	1	0	

Fig. 2

În figuri, în căsuţa de la intersecţia liniei k_i cu coloana k_j s-a trecut punctajul jucătorului k_i obţinut în faţa lui k_j.

Pentru $n = 5$ avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = \frac{5(5-1)}{4} = 5$$

şi soluţia este dată de tabela 2.

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
k_1		1	1	$^1/_2$	0	0
k_2	0		1	1	$^1/_2$	0
k_3	0	0		1	1	$^1/_2$
k_4	$^1/_2$	0	0		1	1
k_5	1	$^1/_2$	0	0		1
k_6	1	1	$^1/_2$	0	0	

Fig. 3

Pentru $n = 6$ avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = \frac{6(6-1)}{4} = 7\frac{1}{2}.$$

Avem soluţie în tabela 3.

Deci la turneu au participat sau 4, sau 5 sau 6 jucători.

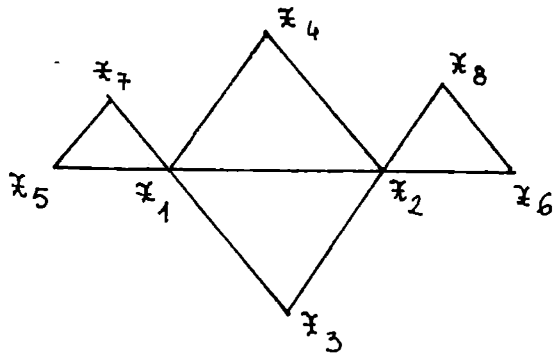
Puncte în plan

Mulţimea punctelor planului se împarte în două submulţimi fără puncte comune, fiecare submulţime conţinînd cel puţin un element.

Să se arate că cel puţin într-una din aceste submulţimi există trei puncte care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

R. Fie A şi B cele două mulţimi în care este împărţit planul. Dacă A are un singur element, problema este, evident, rezolvată.

Să presupunem, acum, că A are cel puțin două elemente și să considerăm configurația alăturată de puncte.



Presupunem că afirmația din enunț este falsă, adică nu există trei puncte cu proprietatea din enunț. Fie, de exemplu, $x_1, x_2 \in A$. Atunci, evident, $x_3, x_4 \in B$ căci dacă, de pildă, $x_3 \in A$, atunci am avea $x_1, x_2, x_3 \in A$ și punctele x_1, x_2, x_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

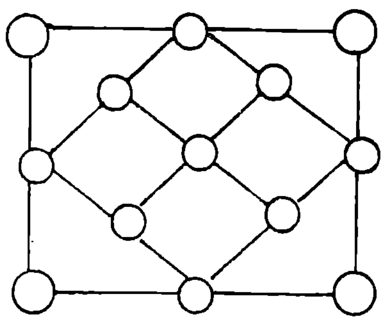
Deoarece punctele x_3, x_4, x_5 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, cum $x_3, x_4 \in B$, rezultă $x_5 \in A$ și, analog, $x_6 \in A$. Cum x_1, x_5, x_7, respectiv x_2, x_6, x_8 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, rezultă $x_7, x_8 \in B$.

Dar atunci $x_3, x_7, x_8 \in B$ și ele sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, contrar ipotezei făcută la începutul soluției.

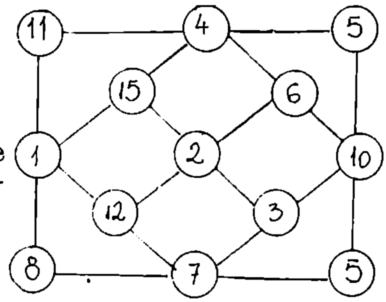
Deci presupunerea făcută este falsă, și astfel problema este rezolvată.

„Cristalul"

Alegeți 13 numere naturale, dintre care 11 diferite și 2 identice și scrieți-le în cerculețele din „cristal" în așa fel încît suma numerelor din fiecare rînd să fie 20.

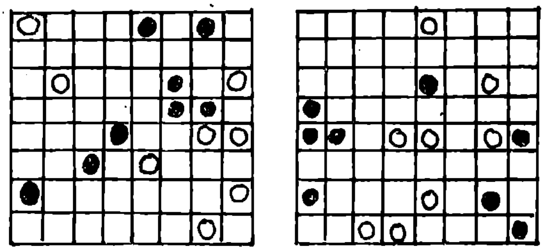


R. Avem, de exemplu, configurația :

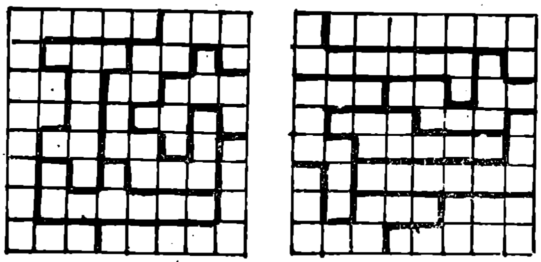


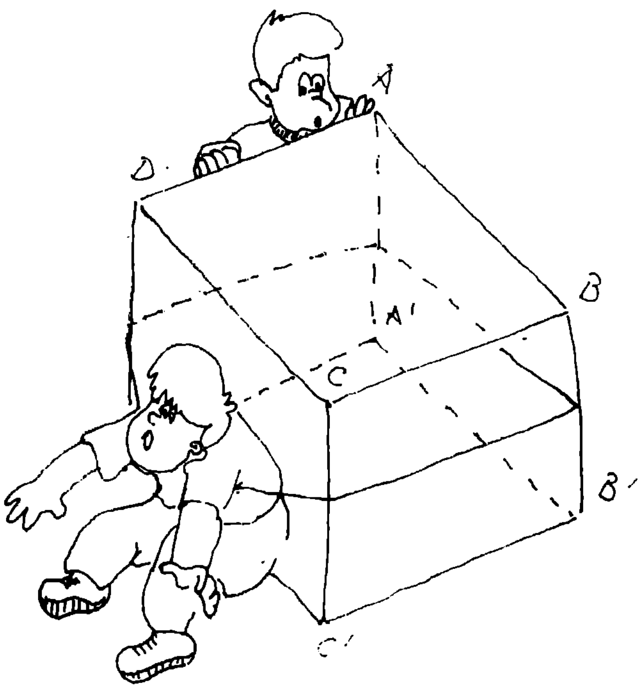
Careuri

Împărțiți careurile date mai jos în opt părți de arii egale, prin linii continue, așa încît în fiecare parte să se găsească cîte o bulină de fiecare fel:



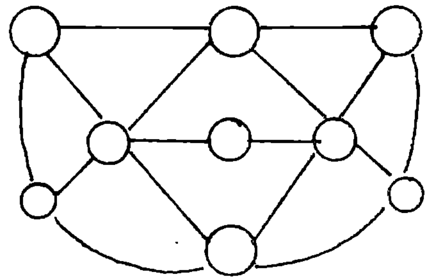
R. Avem împărțirile:



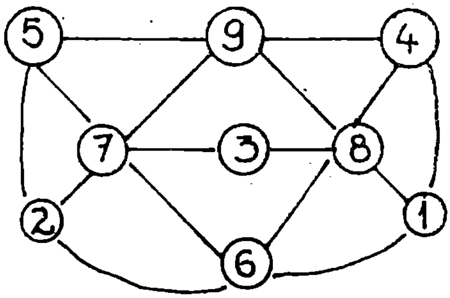


Cerculețe

În nodurile configurației din figură, marcate cu cerculețe, trebuie plasate numerele de la 1 la 9 (inclusiv 1 și 9) cîte o singură dată fiecare, astfel încît suma pe fiecare din cele 8 linii drepte și curbe să fie aceeași : 18. În total vor fi 8 sume de 18 : șapte pe linii drepte, iar a opta pe semicerc.



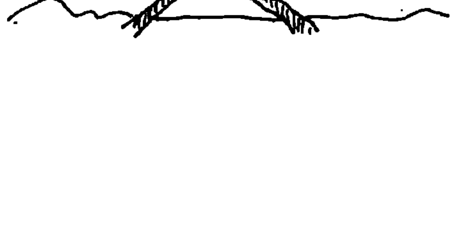
R. Configurația completată arată astfel :



Problema rîului

Distanța dintre două maluri ale unui rîu este cu puțin mai mare decît lungimea a trei trunchiuri de copaci așezați pe maluri. Cum se poate construi cu ajutorul celor trei trunchiuri o punte între cele două maluri?

R. Construcția arată astfel :

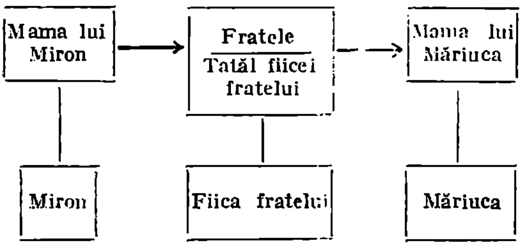


Logică

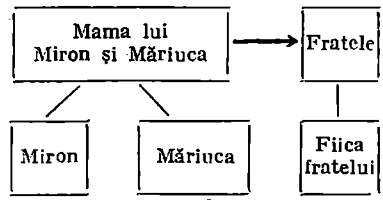
Miron este fiul sorei tătălui fiicei fratelui mamei lui Măriuca, dar mama lui Măriuca nu este soră cu mama lui Miron.

Ce relație de rudenie este între Măriuca și Miron?

R. Expresia „tatăl fiicei fratelui" definește pe „fratele" comun mamei lui Miron și mamei lui Măriuca (v. fig. a)



a



b

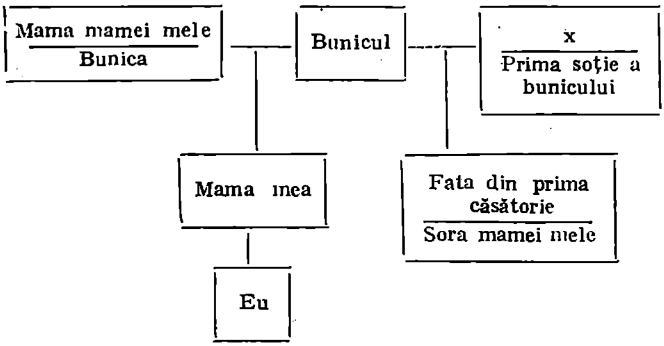
„Dar mama lui Miron nu este soră cu mama lui Măriuca" de unde concluzia că cele două mame (și surori) sînt, de fapt, una și aceeași persoană. Miron și Măriuca sînt frați.

În familie

Mi-a spus tata că unica fiică a celei din fotografie este sora unice fiice a mamei mamei mele.

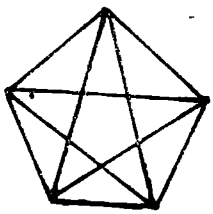
Cine este în fotografie?

R. Schema de rudenie între persoana care vorbește (eu) și persoana din fotografie (x) este redată în figura de mai jos.



Bunicul din partea mamei a fost căsătorit de două ori: din fiecare căsătorie a rezultat cîte o fiică, una din acestea fiind mama celui care vorbește.

Numărați triunghiurile

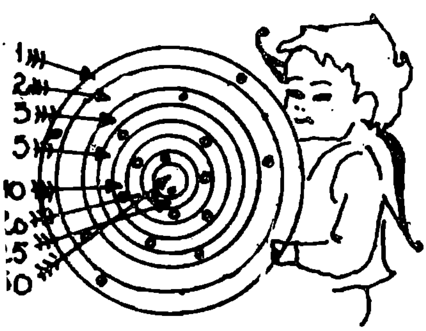


Cîte triunghiuri se găsesc în figură?

R. 35 de triunghiuri.

Întrecere la tir

Trei concurenți — A, B și C — au tras cu arme de tir în cadrul unui concurs la aceeași țintă. După concurs ținta arăta ca în figură.



Fiecare concurent a tras cîte 6 focuri. Locurile unde au nimerit ținta sînt indicate prin puncte. După numărătoarea punctelor, s-a constatat că cei trei concurenți obținuseră fiecare cîte 71 de puncte.

Din cele 18 lovituri, numai una a nimerit în cercul central al țintei (50 de puncte) și concurentul care a nimerit cercul a fost declarat învingător.

Lista cu clasamentul final al întrecerii a fost parțial distrusă de ploaie. S-au păstrat numai următoarele date: primele două lovituri i-au adus concurentului A 22 de puncte; lui C prima lovitură i-a adus numai 3 puncte.

Care a fost învingătorul?

Mai întîi trebuie să copiem numărul punctelor tuturor celor 18 focuri, apoi să le așezăm în 3 rînduri (cîte 6 numere în fiecare rînd), așa fel ca suma numerelor să fie egală în fiecare rînd cu 71 puncte. Este posibilă numai o singură variantă de așezare a numerelor conform condiției de mai sus și anume

rîndul 1 : 25, 20, 20, 3, 2, 1 — total 71 puncte;
rîndul 2 : 25, 20, 10, 10, 5, 1 — total 71 puncte;
rîndul 3 : 50, 10, 5, 3, 2, 1 — total 71 puncte.

Deoarece concurentul A a realizat din primele 2 focuri 22 puncte lui îi aparține rîndul nr. 1, căci numai în acest rînd există două numere care adunate fac 22.

Concurentul C a realizat din primul foc 3 puncte; prin urmare, lu îi aparține rîndul nr. 3 (în rîndul nr. 2 nu există cifra 3). În acest rînd se găsește și numărul 50, deci C a cîștigat concursul.

Moneda falsă

Între 12 monede există una falsă. Se știe că moneda falsă nu ar aceeași masă cu cele veritabile, dar nu se precizează dacă este mai ușoar sau mai grea. Monedele veritabile au, toate, aceeași masă. Se poate deter mina prin trei cîntăriri, folosind o balanță nemarcată și fără greutăți care este moneda falsă? Se poate stabili dacă ea este mai ușoară sau ma grea decît celelalte?

Dificultatea problemei constă în faptul că nu știm dinaint dacă moneda falsă este mai ușoară sau mai grea decît monedel bune. De aceea, împărțind monedele în 3 grupe de cîte monede fiecare, trebuie să le individualizăm, de exemplu să l numerotăm. Să punem pe unul din talerele cîntarului primu grup de monede care cuprinde, să zicem, monedele cu numerele 1, 2 3 și 4, iar pe celălalt taler grupul de monede marcate cu numerele 5, 6 7 și 8. În felul acesta s-a realizat prima cîntărire. Sînt posibile dou cazuri:

Cazul A: Cîntarul se echilibrează. În acest caz, moneda falsă se af în grupul al treilea de monede, marcate cu numerele 9, 10, 11 și 12. S comparăm acum masa a trei din aceste monede, de exemplu a monedele 9, 10 și 11, cu monedele 1, 2 și 3 care știm că sînt bune. În acest f efectuăm a doua cîntărire. În ipoteza cînd cîntarul se echilibrează, monec falsă este cea marcată cu numărul 12 și, comparînd-o, de exemplu, c moneda numărul 1 despre care știm că este bună, aflăm dacă este m ușoară sau este mai grea. Astfel, din trei cîntăriri putem rezolva problem Dacă însă a doua cîntărire nu echilibrează cîntarul, moneda falsă es fie cu nr. 9, fie cu nr. 10, fie cu nr. 11, iar după poziția talerului pe ca sînt puse aceste monede ne dăm imediat seama dacă este mai grea sa mai ușoară. Să admitem că este mai grea. Pentru a o separa dintre ce

3 monede, este suficientă încă o cîntărire (a treia). Pentru aceasta, punem pe cîntar monedele 9 şi 10. Atunci, moneda falsă fie că va fi pe talerul care va trage în jos, fie că este moneda nr. 11.

Cazul B : Prima cîntărire nu a echilibrat cîntarul. Să presupunem că trage în jos talerul cu monedele nr. 1, 2, 3 şi 4. Atunci moneda falsă se găseşte fie printre monedele 1, 2, 3, 4 şi este mai grea, fie printre 5, 6, 7, 8 şi este mai uşoară. Cu această ocazie am aflat însă că monedele 9, 10, 11 şi 12 din grupul al treilea sînt bune.

La a doua cîntărire comparăm monedele 9, 10, 11 şi 5 (trei monede bune şi una din grupul monedelor mai uşoare) cu monedele 3, 4, 6 şi 7 (două din grupul monedelor mai grele şi două din grupul celor mai uşoare).

Sînt posibile trei cazuri :

a) Cîntarul s-a echilibrat. Aceasta înseamnă că monedele alese sînt bune, iar cea falsă se găseşte fie printre numerele 1 şi 2 şi este mai grea, fie că este moneda cu nr. 8 şi este mai uşoară. Comparînd monedele 1 şi 2 (a treia cîntărire), aflăm că moneda falsă este cea cu nr. 8 şi este mai uşoară, dacă cîntarul s-a echilibrat, sau că moneda falsă este mai grea şi are nr. 1 ori nr. 2 (fiind moneda de pe talerul care trage în jos).

b) Talerul pe care sînt puse monedele 9, 10, 11 şi 5 trage în jos. Atunci moneda falsă nu poate fi în acest grup deoarece 9, 10 şi 11 sînt bune, iar dacă moneda 5 ar fi falsă, talerul nu ar putea să tragă în jos, deoarece am luat-o din grupul monedelor mai uşoare. Prin urmare, moneda falsă se găseşte pe talerul al doilea, printre cele numerotate cu 3, 4, 6 şi 7, şi anume printre acelea care au fost luate din grupul monedelor mai uşoare, adică este fie nr. 6, fie nr. 7. Moneda mai uşoară dintre aceste două (a treia cîntărire) va fi moneda căutată.

c) Trage în jos talerul cu monedele numerotate cu numerele 3, 4, 6 şi 7. Atunci moneda falsă fie că este mai grea şi se găseşte pe talerul care trage în jos, printre monedele luate din grupul celor mai grele, adică este moneda nr. 3 sau 4, fie că este mai uşoară şi, ca atare, se găseşte în grupul monedelor 9, 10, 11 şi 5. În ultimul caz, ea este moneda nr. 5, deoarece ştim că monedele 9, 10 şi 11 sînt bune.

Aşadar, moneda falsă poate fi una din următoarele trei : 3 sau 4 (şi atunci ea este mai grea) sau 5 (şi atunci este mai uşoară). Punem pe cîntar monedele 3 şi 4 (a treia cîntărire) ; atunci moneda falsă, fiind mai grea, se va găsi pe talerul care trage în jos, sau dacă cîntarul s-a echilibrat, moneda falsă (mai uşoară) va fi nr. 5.

Trîntorul şi dracul

Se povesteşte că trăia odată, aproape de malul unei ape, un trîntor.

— Vai de mine şi de mine ! — se tînguia toată ziua trîntorul. N-am nici un ban şi nimeni nu-mi dă nici unul. Toţi îmi spun : „Nu faci nimic şi vrei bani. Du-te la dracu !''. Aş vrea să-l văd şi eu pe dracul acela care o să mă facă bogat !

N-apucă trîntorul să sfîrşească vorba că înaintea lui se şi ivi un drăcuşor.

— M-ai chemat ? — zise acesta. Vrei să fi bogat ?

— Cum să nu ? ! — zise trîntorul. Dar cum ?

— Munca va fi ușoară și te vei îmbogăți deîndată. Vezi puntea aceea ?

— O văd ! — răspunse trîntorul.

— Atunci, n-ai decît să treci puntea pe malul celălalt și vei avea în buzunar de două ori mai mulți bani decît ai acum. Cînd vei trece înapoi puntea, banii din buzunar ți se vor dubla din nou și, tot așa, de fiecare dată cînd vei trece puntea vei avea de două ori mai mulți bani.

— Mare minune ! — se bucură trîntorul.

— Trebuie să te învoiești — adaugă drăcușorul — ca de fiecare dată cînd trei puntea să-mi dai 24 de bănuți pentru sfatul meu bun.

— Mă învoiesc — zise trîntorul. Din moment ce banii mei se vor dubla, de ce să nu-ți dau și ție 24 de bănuți? ! Hai să începem : vreau să mă îmbogățesc cît mai repede !

Trîntorul trece puntea odată și ... minune mare ! Într-adevăr, trîntorul avea în buzunar de două ori mai mulți bani. Dădu dracului cei 24 de bănuți și trecu puntea a doua oară. Banii s-au dublat iarăși. Numără iar 24 de bănuți, îi dădu dracului și trecu puntea a treia oară. Banii iar s-au dublat și, numărînd cei 24 de bănuți pe care trebuia să-i dea drăcușorului constată că nu mai rămăsese cu nici un ban în buzunar.

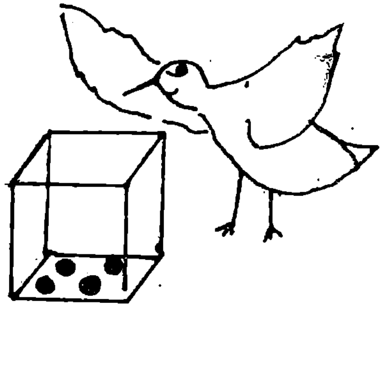
Dracul izbucni în rîs și se făcu nevăzut. Trîntorul rămase astfel fără nici un ban.

Cîți bani a avut trîntorul la început ?

R După a treia trecere, trîntorul avea în buzunar exact 24 de bănuți. Deoarece banii pe care îi avea înainte de a trece puntea s-au dublat, rezultă că înainte de trecere avea 12 bănuți. Dar acești bani îi rămăsese după ce dăduse 24 de bănuți; prin urmare el avusese 36 de bănuți. Deci, înainte de a doua trecere peste pod el a avut 18 bănuți; acești 18 bani îi rămăseseră după ce trecuse prima dată podul și dăduse 24 de bani. Așadar, după prima trecere el a avut în total $18 + 24 = 42$ de bani. De aici rezultă că, la început, trîntorul a avut 21 de bani.

„Cioara cea isteață"

O cioară însetată a găsit la un moment dat un ulcior în care era puțină apă și la care nu putea ajunge cu ciocul. Ea însă a început să arunce pietricele în ulcior pînă ce nivelul apei a ajuns la înălțimea la care cioara a putut să ajungă cu ciocul.



Problema nu ne interesează sub aspectul isteţimii pe care a putut-o avea cioara în rezolvarea acestei probleme, ci sub aspectul geometric al ei. Astfel, ajungem în mod firesc a ne întreba dacă ar fi putut oare cioara să bea apă atunci cînd nivelul ei în ulcior ar fi fost pînă la jumătatea acestuia ?

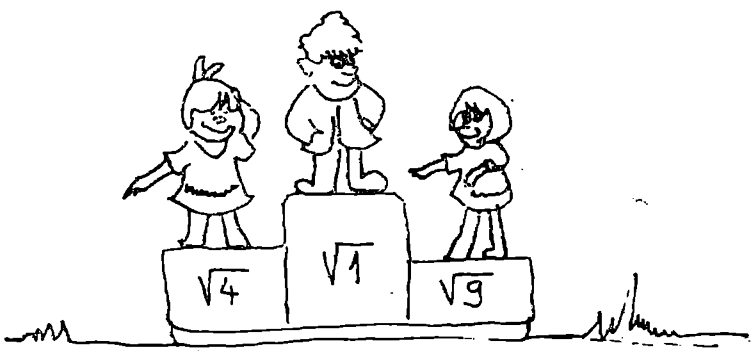
Analiza acestei probleme ne va convinge că procedeul folosit de cioară își atinge scopul, însă nu la orice nivel inițial al apei din ulcior.

Pentru simplitate, să presupunem că ulciorul are forma din figură (prismă dreptunghiulară dreaptă), iar pietricele reprezintă niște bile de aceeași mărime.

Să observăm că apa se va ridica deasupra nivelului pietricelelor numai în cazul cînd rezerva inițială de apă ocupă un volum mai mare decît toate spațiile dintre pietricele, atunci apa putînd umple toate spațiile și ridicîndu-se deasupra pietricelelor. Să încercăm să calculăm ce volum ocupă aceste spații. Cel mai simplu ar fi să efectuăm calculul presupunînd o astfel de așezare a bilelor de piatră, în care centrul fiecăreia dintre ele se află pe aceeași dreaptă cu centrul bilei superioare și centrul celei inferioare. Să presupunem că diametrul bilei este d și, prin urmare, volumul ei este de $\frac{1}{6}\pi d^3$, iar volumul cubulețului în care este înscrisă va fi d^3. Difererța dintre volumele lor $d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3$ este volumul părții neumplute a cubulețului, iar raportul:

$$\frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^3} = 0{,}48$$

indică faptul că partea neumplută a fiecărui cubuleț reprezintă 0,48 din volumul lui. Aceeași pare, adică mai puțin de jumătate, o constituie și suma volumelor tuturor golurilor din volumul ulciorului. Lucrurile se schimbă prea puțin, dacă ulciorul nu va avea o formă de prismă, iar pietricelele nu vor fi sferice. În toate cazurile, se poate afirma că dacă, inițial, apa din ulcior s-ar afla mai jos de jumătate, cioara n-ar fi reușit să ridice apa pînă la margine prin aruncarea pietricelelor în ulcior.



B. JOCURI LOGICE ŞI STRATEGII

1. Jocuri contra naturii

Problemele logico-matematice se caracterizează prin enunţuri discursive, în limbajul cotidian, privind situaţii din viaţa socială, din relaţiile de familie sau aşezarea unor obiecte, figuri sau numere în diverse configuraţii, fără a necesita pentru rezolvare cunoştinţe şi tehnici matematice superioare, dar făcînd apel atît la raţionamentul logico-deductiv, cît şi la aplicarea logicii la fapte şi situaţii pentru a se ajunge la o modelare logico-matematică a problemelor.

Am atras atenţia că aceasta nu scuteşte de multe ori pe rezolvitor de a folosi raţionamente matematice subtile în sprijinul modelării pe care o urmăreşte.

Jocurile logice, ca orice jocuri, implică existenţa a cel puţin doi parteneri, care urmăresc scopuri antagoniste, fiecare avînd ca obiectiv cîştigarea jocului în dauna celuilalt sau a celorlalţi parteneri. Există deci *situaţii conflictuale*, care se cer rezolvate, fiecare dorind să se rezolve în favoarea sa. Uneori, cel care joacă nu are ca parteneri oameni, deci nu este silit să intre în situaţii conflictuale cu parteneri umani, dar aceasta nu înseamnă că situaţia conflictuală nu există, ci vom spune că este un *joc împotriva naturii* sau avînd ca partener natura.

Un astfel de joc este nr. 5, *„Jocul cu 15"* în care pe o tablă pătrată cu $4 \times 4 = 16$ pătrate sînt 15 piese numerotate de la 1 la 15 şi aşezate într-o ordine arbitrară. Cerinţa jocului este să se aşeze aceste piese în ordinea naturală 1, 2, 3, 4 pe linia întîi etc., colţul din dreapta jos rămînînd gol. Regula impune mutarea pieselor numai pe orizontală sau verticală, nu şi pe diagonale, de la o poziţie la alta vecină, dacă aceasta este liberă.

Neexistînd partener uman, jucătorul, ca şi în cazul pasienţelor cu cărţi de joc, este singur, jucînd, deci, împotriva naturii, care este unicul său partener.

Calea urmată de fiecare partener pentru a realiza obiectivul urmărit se numeşte *strategie*, chiar şi atunci cînd joacă împotriva naturii.

În jocurile contra naturii, strategia nu întîmpină alte obstacole decît alegerea unui drum fără finalitatea dorită. În consecinţă, logica apare ca un ghid atît pentru alegerea variantei de urmat, cît şi pentru constatarea obstacolelor şi înlăturarea lor.

Unde apare matematică? În modelul format din operaţiile strategiei, jocul ,,cu 15", de exemplu, are ca strategie aplicarea judicioasă a teoriei permutărilor, constatînd de la început că scopul fiecărei mutări este să elimine *inversiunile*, adică plasarea pieselor cu un număr de ordine mai mare înaintea altora cu numere de ordine mai mici. Aceste inversiuni pot fi înlăturate prin *transpoziţii* între piese vecine. Strategia va consta în folosirea transpoziţiilor pentru a elimina pe rînd inversiunile iniţiale. Aceasta nu înseamnă că pe parcurs nu vom fi nevoiţi să mai creăm inversiuni de moment, pe care le vom elimina ulterior.

Cititorul va putea urmări strategia necesară în textul capitolului B relativ la acest joc. Soluţia este foarte laborioasă şi necesită stabilirea unor teoreme privitoare la permutările ireductibile sau reductibile la cea naturală.

(Concluzia este optimistă, fiindcă arată că, pornind de la orice permutare iniţială, putem ajunge la cea naturală şi chiar se indică strategia de urmat. Aceasta nu este în mod obligatoriu optimală, adică nu este formată din numărul minim de transpoziţii necesare.

Comentarii: Prima întrebare care se pune este dacă se poate obţine o strategie optimală. A doua, în ce măsură intervine *experimentul* în aplicarea strategiei bazate pe transpoziţii. În afara de aceasta, faptul că pot exista mai multe strategii conduce la sugestia de a se introduce unul sau mai mulţi parteneri umani, acţionînd fiecare pe tabloul său, competiţia constînd în atingerea ţelului cu un număr cît mai mic de mutări. Astfel, *„jocul" devine cu mai mulţi parteneri, dar nu pierde caracterul de joc împotriva naturii,* fiindcă nu se creează situaţii conflictuale, ci numai competiţionale, ca la întrecerile sportive de atletism.

În fond, *jocul care admite diverse modificații tehnice, este o problemă logico-matematică și considerăm că această constatare este valabilă în orice joc împotriva naturii.*

Într-adevăr, cînd rezolvăm o problemă de geometrie sintetică, unde nu știm calea de urmat, nu sîntem angajați într-un joc logic contra naturii?

II. Jocuri reductibile la jocuri împotriva naturii

Trecînd la jocuri cu parteneri umani sau mai general, la jocuri cu *situații conflictuale*, adică la jocuri în care un partener, fie el om sau mașină, ia o decizie și execută o mișcare într-un cîmp competițional, la care mișcare i se răspunde de un alt partener în cadrul aceluiași cîmp, va trebui să facem unele distincții. Acestea pot fi esențiale fiindcă există jocuri în care unul dintre cei doi parteneri pierde, orice strategie ar folosi, pe cînd alte jocuri sînt echitabile, în sensul că oricare dintre cei doi sau mai mulți parteneri poate cîștiga sau pierde.

Exemplu: Un joc foarte gustat în societate dînd impresia că unul dintre parteneri are darul divinației sau că este un matematician de geniu este jocul în care primul jucător alege în minte cîteva numere naturale de o singură cifră $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El le reține, iar cel de al doilea jucător se angajează să le ghicească, propunînd el însuși primului șiruri de n numere naturale $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și cerîndu-i ca de fiecare dată acesta să-i comunice numai suma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = s.$$

Cel de-al doilea cîștigă, dacă ghicește cele n numere alese, și ținute secret de primul în mai puțin de n încercări.

Întrebarea care se pune este, dacă ambii jucători pot folosi o strategie proprie pentru a cîștiga. La această întrebare se poate răspunde dacă se analizează logic semnificația alegerilor de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ făcute de cel de al doilea jucător, precum și a cerinței sale ca primul să-i comunice suma s. În această analiză, posibilitatea celui de-al doilea jucător de a face mai multe încercări, limitate la $n-1$, trebuie să joace un rol important în strategia acestuia.

Dacă am rămîne la diverse conjecturi logice, fără a încerca o modelare matematică a acestora, am fi uimiți de faptul că cel de-al doilea jucător cîștigă totdeauna, bineînțeles dacă urmărește deliberat și fără greșeli o *strategie pură*, adică un șir de maximum $n-1$ informații numerice obținute de la partenerul său.

Este nevoie aici de o cuantificare printr-o modelare matematică a șirului de informații cerute și această modelare apare, dacă se notează de fiecare dată informația ca o ecuație liniară cu n necunoscute, avînd coeficienții numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și membrul al doilea numărul s oferit de primul jucător.

Se obține în acest mod un sistem de forma:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= s_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= s_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= s_n
\end{aligned}$$

Dacă acesta este compatibil determinat, jucătorul al doilea îl rezolvă și dă imediat soluția unică $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *dar pierde fiindcă a făcut* n *încercări.*

El va trebui să realizeze cel mult $n-1$ ecuații liniare cu n necunoscute și sistemul să fie compatibil determinat. Aceasta însă nu poate fi posibil decît dacă intervin condiții, care nu au intrat pînă acum în joc, de exemplu, faptul că necunoscutele sînt numere naturale de o cifră, deci că eventuala ecuație diofantică rezultată din eliminarea a $n-2$ necunoscute nu ar putea avea decît o soluție în numere naturale de o cifră.

Se pare, deci, că jucătorul al doilea ar avea puține șanse de cîștig, modelul matematic folosit fiindu-i defavorabil. *Există însă o strategie infailibilă, care îi asigură cîștigul dintr-o singură încercare.* Este suficient să aleagă $a_1=1$, $a_2=10$, $a_3=10^2, \ldots, a_{n-1} = 10^{n-1}$. În acest caz:

$$x_1 + 10x_2 + 100x_3 + \ldots + 10^{n-1}x_n = \overline{x_nx_{n-1}\ldots x_1} = s,$$

deci un număr natural de n cifre, pe care primul jucător este obligat să i-l comunice prin suma s și căruia el n-are decît să-i spună cifrele pe rînd.

Comentarii: Se pune atunci problema dacă acest joc logico-matematic este corect, echitabil, dacă există strategii pentru ambii jucători. Evident, răspunsul este, din punct de vedere matematic și logic, negativ. Primul jucător nu intervine în joc decît ca furnizor de informații, el nu poate răspunde la o alegere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ decît prin s și, în consecință, nu există o strategie pură pentru el. *Primul jucător se comportă ca natura într-un joc împotriva naturii și, în consecință, jocul cifrelor este, de fapt, un astfel de joc.*

Singura sa şansă este ca cel de-al doilea să nu cunoască strategia sau să greşească, ceea ce ar scoate jocul din cadrul jocurilor logice şi matematice, deşi în ambele cazuri se poate greşi, dar cu posibilitatea de corectare a greşelii, posibilitate care aici nu există.

III. Jocuri cu strategii mixte

Vom da şi un exemplu de joc cu mai mulţi parteneri, în care oricare poate fi cîştigător, şansele depinzînd, în parte, de întîmplare, în parte de strategia adoptată. Este vorba de *Jocul nr. 2*: *„Remmy matematic"*.

Se scriu numerele de la 1 la 13 pe cartonaşe pătrate de dimensiuni suficient de mici şi fiecare număr se repetă de 4 ori, deci există 52 cartonaşe. Fiecare jucător trebuie să aibă desenat tot pe carton sau pe o foaie de hîrtie un pătrat cu $5 \times 5 = 25$ pătrăţele.

Se procedează ca la jocurile de cărţi, amestecîndu-se bine cartonaşele cu faţa în jos şi apoi se trag, pe rînd, cele 52 cartonaşe. Fiecare jucător înscrie numerele anunţate într-unul din cele 25 pătrăţele şi nu mai are voie să-l deplaseze.

Se extrag deci 25 din cele 52 cartonaşe şi există posibilitatea ca acelaşi număr să apară de la 1 pînă la 4 ori. Există un punctaj care acordă puncte pentru diverse combinaţii pe linii, pe coloane şi pe diagonale, ultimele fiind mai preţuite decît liniile şi coloanele.

Cîştigă jucătorul care a acumulat cele mai multe puncte. Cînd sînt mai mulţi s-ar putea face şi o clasificare sau, repetîndu-se jocul, totalizarea să se facă după un număr de partide.

Se poate pune întrebarea: unde intervine logica şi unde matematica în acest joc? Răspunsul vine după analiza regulilor şi a utilităţilor fiecărei strategii alese. Vom da un singur exemplu: pentru două, trei sau patru numere identice se acordă punctaje ca 10, 40, 160 puncte pe linii sau coloane şi 20, 50, 170 pe diagonale, dar dacă aceste numere sînt egale cu 1, se obţin pentru 4 de 1 cîte 200 puncte, respectiv 210 pe diagonale, iar pentru 3 de 1 şi 2 de 13, cîte 100, respectiv 110 puncte.

Comentarii: De aici decurge organizarea unei strategii, dar aceasta este influenţată puternic de rolul întîmplării, fiindcă numerele pot apărea sau nu, iar cînd apar se pot repeta pînă la 4 ori. Cum există şi un punctaj pentru 5 numere consecutive, acest joc trebuie examinat în lumina teoriei jocurilor, strategiile trebuind să fie mixte, avînd în vedere elementul aleator, care este predominant. Trebuie examinate probabilităţile fiecărei combinaţii de cifre, care aduc cîştiguri şi evaluate utilităţile. În orice caz, acest joc nu este din categoria celor în care unul dintre jucători are avantaj asupra celorlalţi prin faptul că joacă primul sau al doilea, dacă el cunoaşte strategia pură care duce la cîştig, iar ceilalţi n-o cunosc etc. Este un joc în care întîmplarea poate fi folosită în alegerea unei strategii, iar jucătorii joacă independent unul de altul, deci nu produc situaţii conflictuale.

IV. Jocuri cu strategii pure

Majoritatea jocurilor pentru care s-au elaborat strategii conduc în mod obligatoriu la victoria unuia dintre parteneri, de obicei a celui care face prima mutare. Bineînţeles, dacă acesta face greşeli în aplicarea acestei strategii, poate cîştiga alt partener. Un astfel de joc este *"Jocul lui* BACHET".

CLAUDE GASPAR BACHET *de* MEZIRIAC (1581—1638) a fost un excelent matematician francez care a adus frumoase contribuţii în teoria numerelor şi aritmetică, de exemplu, pătrate magice cu 25 elemente, formularea proprietăţii de descompunere a oricărui număr natural în cel mult patru pătrate, editarea cu comentarii preţioase a operei lui DIOPHANT, precum şi a unei cărţi de recreaţii matematice din care extragem jocul următor, care îi poartă numele:

Dintr-o mulţime de n obiecte, doi jucători extrag alternativ un număr arbitrar de obiecte, cu condiţia de a extrage cel puţin unu şi cel mult $p < n$ şi fixat dinainte.

Dacă $n = p + 1$, cîştigă sigur cel de al doilea, primul fiind obligat să extragă cel puţin un obiect. Atunci partenerul le ia pe toate p rămase. Vom face o analiză a jocului pornind de la această observaţie de bun simţ. Vom constata că dacă $n = p + 2$, va cîştiga cu siguranţă primul, fiindcă el va extrage un obiect şi situaţia va reveni la cazul $n' = n - 1 = p + 1$, cînd primul care extrage pierde şi acesta este cel de-al doilea.

Această analiză practico-logică ne îndeamnă să modelăm matematic datele şi operaţiile.

Se vede că $p + 1$ este un număr fatidic pentru cel care este obligat să facă primul o extracţie; deci fiecare dintre cei doi parteneri trebuie să-l facă pe celălalt să se găsească în faţa acestui număr pentru a-l sili să-i acorde victoria.

Dacă $n=p+q$ cu $1<q<p + 1$, primul care joacă va lua $q - 1$ obiecte şi cel de-al doilea va pierde. Situaţia generală poate impune un număr mai mare de obiecte, în care caz se vor face mai multe extracţii. Cum $p + 1$ este fatidic, să presupunem că $n = m(p + 1) + q$, unde $1 \leqslant q \leqslant p$.

Primul, dacă ridică q obiecte, aduce pe cel de al doilea în situaţia $n' = m(p + 1)$. Dacă acesta extrage $1 \leqslant r \leqslant p$ obiecte vom avea:

$$n'' - m(p + 1) - r = (m - 1)(p + 1) + p + 1 - r.$$

Dacă acum primul extrage $p + 1 - r \leqslant p$ obiecte, cel de-al doilea se va găsi în situaţia $n''' = (m - 1)(p + 1)$, similară cu cea precedentă. Prin inducţie, indiferent de numărul s, cu $1 \leqslant s \leqslant p$ obiecte pe care le va extrage cel de-al doilea, el se va găsi, ca urmare a jocului primului, după $m - 1$ operaţii în situaţia în care mai rămîn $p + 1$ obiecte, şi atunci, cum am arătat, va pierde.

În rezumat, jucătorul care se găseşte în faţa a m(p + 1) *obiecte pierde şi acesta poate fi al doilea, dacă* n = m(p + 1) + q, *primul dacă* n = m(p + 1).

Comentarii: Jocul lui BACHET, deşi are o strategie infailibilă, o poate oferi fiecăruia dintre cei doi jucători. Dacă aceştia o cunosc, realizarea ei depinde de doi factori numerici: numărul n de obiecte şi numărul maxim p de obiecte, care se pot extrage.

Prin urmare, jocul nu poate fi jucat în condiţii de egalitate decît de jucători care nu cunosc strategia şi această constatare este valabilă pentru orice joc în care există o strategie pură, care conduce pe unul dintre jucători indiscutabil la cîştigarea partidei.

Acolo unde există mai multe strategii pentru fiecare din jucători, dacă primul alege o strategie, cel de al doilea îi va răspunde cu o strategie a sa, care are ca scop să facă minim cîştigul primului, acest minim putînd fi şi zero sau negativ, deci să însemne şi pierdere. Dacă asociem fiecărei perechi de strategii astfel cuplate cîte o valoare numerică, reprezentînd utilitatea sau cîştigul corespunzător pentru fiecare din cei doi jucători, dacă jocul este cu sumă nulă, cîştigul unuia va fi egal cu pierderea celuilalt. Jucătorul al doilea va alege acea strategie care minimizează cîştigul primului, dar acesta va alege atunci acea strategie care ar face maxim acest cîştig minimal. Aceasta se numeşte atunci *strategie maximin,* la care cel de-al doilea răspunde cu o *strategie minimax.*

În cazul jocurilor unde numai unuia dintre jucători i se poate asocia o strategie, strategia minimax are ca utilitate zero şi jocul este ca un joc împotriva naturii, cel de-al doilea jucător neavînd nici o şansă de cîştig.

B. JOCURI LOGICE

Două persoane joacă următorul joc: una din ele se gîndeşte la o mulţime de numere naturale de o singură cifră, $x_1, x_2, \ldots x_n$, pe care al doilea jucător trebuie să le ghicească.

Celei de-a doua persoane îi este permis să întrebe cu cît este egală suma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere naturale pe care le propune al doilea jucător.

Al doilea jucător propune seturi de numere $(a_1, \ldots, a_n)$ pînă cînd ghiceşte numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cîştigă al doilea dacă reuşeşte să ghicească numerele adversarului în mai puţin de n încercări şi pierde în caz contrar.

Cum trebuie să procedeze al doilea jucător pentru a cîştiga întotdeauna? Cu alte cuvinte, cum anume trebuie alese numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru a ghici numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din mai puţin de n încercări?

Evident, pentru ghicirea numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt suficiente n încercări. Sistemele de numere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vor fi astfel alese încît sistemul obţinut:

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + \ldots + a_n^{(1)}x_n &= t_1,\\
a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \ldots + a_n^{(2)}x_n &= t_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1^{(n)}x_1 + a_2^{(n)}x_2 + \ldots + a_n^{(n)}x_n &= t_n
\end{aligned}$$

să fie compatibil determinat (aici $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sînt sumele comunicate de primul jucător). Astfel de sisteme sînt, de exemplu, $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 0, 1)$.

Dar, în acest caz, al doilea jucător pierde, numărul încercărilor sale nesatisfăcînd regula jocului.

În unele cazuri, pentru determinarea numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt suficiente $n - 1$ încercări. Astfel, să considerăm $n = 3$. Al doilea jucător rostește sistemul (2, 3, 1), iar primul comunică suma 37. Al doilea sistem rostit este (1, 2, 5), iar suma este 63. Așadar, avem sistemul :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 37,$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 63.$$

Prin eliminarea lui x_1 între cele două ecuații, obținem ecuația :

$$x_2 + 9x_3 = 89.$$

Dacă $x_2 \leqslant 8$, $x_3 \leqslant 8$, maximul sumei $x_2 + 9x_3$ este 80. Deci cel puțin unul dintre numerele x_2, x_3 este 9. Dar x_2 nu poate fi 9 căci, în acest caz, $9x_3 = 80$ și x_3 n-ar fi natural. Rezultă $x_3 = 9$ și atunci $x_2 = 8$ și, în final, $x_1 = 2$.

Ce se întîmplă, însă, dacă după eliminare obținem ecuația :

$$x_2 + x_3 = 6.$$

Această ecuație are mai multe soluții, anume (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0) deci nu este posibil să determinăm numerele alese de primul jucător. Deci, în acest caz, $n - 1$ încercări nu sînt suficiente.

Există însă o strategie în baza căreia al doilea jucător cîștigă întotdeauna. El poate ghici numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dintr-o singură încercare ! Cum ? ! Această strategie depinde, desigur, de alegerea convenabilă a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pentru a găsi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ convenabil, trebuie avut în vedere un amănunt care, la prima vedere, scapă jucătorilor, anume că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt de o singură cifră. Această informație oferă cheia strategiei. Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind de o singură cifră, ele pot fi cifre ale unui număr în baza zece. Să considerăm, așadar, numărul $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1}$. El mai poate fi scris și sub forma :

$$x_1 + 10x_2 + 10^2x_3 + \ldots + 10^{n-1}x_n.$$

Raționamentul este acum simplu : al doilea jucător spune numerele $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{n-1}$. Făcînd suma $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, primul jucător comunică tocmai numărul $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1}$ ale cărui cifre sînt tocmai cifrele căutate de al doilea jucător.

Bineînțeles, strategia este aplicabilă, și în cazul în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere naturale oarecare, cu condiția însă ca al doilea jucător să cunoască ordinul de mărime al celui mai mare (de exemplu, toate numerele sînt între 0 și 1 000). În acest caz, numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vor fi $10^3, 10^6, 10^9, \ldots, 10^{3n-3}$. Nu ne rămîne decît să grupăm numărul comunicat în grupe de cîte 3, de la dreapta la stînga. Numerele astfel obținute vor fi tocmai numerele căutate.

Să cercetăm acum un joc ceva mai complicat, așa-numitul joc al „încercuirii desantului". Două persoane se joacă cu „cruciulițe" și „zerouri" pe o foaie cu pătrățele infinită. Cel care începe pune o cruciuliță într-un pătrățel oarecare. La fiecare mișcare următoare a sa, el trebuie să pună o cruciuliță în orice pătrățel liber, vecin cu unul din pătrățelele în care este deja o cruciuliță, se consideră pătrățele vecine cele care au o latură comună sau un vîrf comun. Al doilea jucător, la fiecare mișcare a sa, poate să pună deodată trei cerculețe în oricare trei pătrățele libere (nu este obligatoriu să fie una lîngă cealaltă). Să se demonstreze că oricum ar juca primul, al doilea poate să-l „închidă": se ajunge la o situație în care primul jucător nu are unde să pună cruciulița.

Să se cerceteze jocurile analoage, în care al doilea jucător la o mișcare nu pune trei, ci numai două sau un cerculeț. Care va fi în acest caz rezultatul, la un joc corect al partenerilor : reușesc cerculețele să „închidă" cruciulițele (și care este numărul maxim de mișcări cît „rezistă" cruciulițele) sau jocul se continuă la infinit?

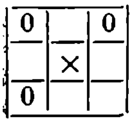


Fig 1

Manevrele cruciulițelor sînt foarte asemănătoare cu manevrele unui desant aerian care încearcă să evite încercuirea, de aceea jocul se numește „Încercuirea desantului". În prima variantă, se demonstrează imediat că primul jucător nu poate pune mai mult de 7 cruciulițe. În figura 1 se arată strategia cerculețelor la prima mutare, ca să obțină acest rezultat. În adevăr, după aceasta, primul jucător poate să pună o cruciuliță în unul din cele cinci pătrățele libere vecine.

Este evident că dacă primul jucător ar plasa o cruciuliță deasupra celei pusă anterior, al doilea îl va bloca în această direcție plasînd un cerculeț deasupra acesteia și alte două în părți. La fel se întîmplă dacă primul jucător plasează cruciulița dedesubt sau lateral cruciuliței anterioare. Singura sa șansă de scăpare este de a plasa cruciulița pe cîmpul vecin celei anterioare în sud-est, adică pe locul marcat în fig. 2 a cu x^2. La această mișcare, al doilea jucător răspunde plasînd cerculețele marcate prin 2. Primul jucător poate continua plasînd cruciulițe în cîmpurile laterale; orice altă mișcare (la stînga sau deasupra lui x^2) este inutilă.

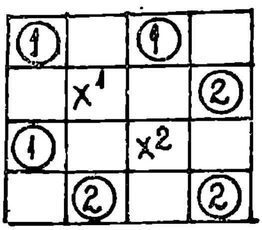


Fig. 2 a

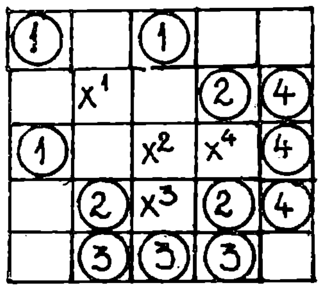


Fig. 2 b

Se vede, în această situație, că primul jucător va fi, în următoarele cîteva mișcări, încercuit. În adevăr, dacă el plasează o cruciuliță pe cîmpul situat dedesubtul lui x^2, al doilea jucător va răspunde că în figura 2b, plasînd cerculețele însemnate cu 3, barînd astfel drumul. La fel se întîmplă dacă primul jucător continuă jocul pe pătrățelul însemnat cu x^4.

Deci, în acest joc, al doilea jucător cîștigă întotdeauna.

Să trecem acum la analiza celui de-al doilea joc, în care al doilea jucător plasează numai două cerculețe. Ca o primă observație, să remarcăm că dacă al doilea jucător încearcă să pună cerculețele pe cîmpurile vecine cu cruciulițele, atunci el nu poate să stăvilească mișcarea cruciulițelor. Acest lucru se poate vedea imediat în figura 3.

Este evident că prin fiecare mişcare, cerculeţele acoperă doar două din cele trei pătrăţele situate pe o verticală sau orizontală vecină. S-ar părea, deci, că acum cerculeţele nu pot să înconjoare cruciuliţele şi cu atît mai mult dacă al doilea pune numai cîte un cerculeţ.

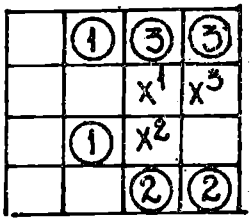


Fig 3

Vom arăta că dacă al doilea încearcă să realizeze o încercuire departe de prima cruciuliţă, el va putea să stăvilească deplasarea cruciuliţelor. Vom arăta că acest lucru este posibil, chiar dacă al doilea jucător pune doar un singur cerculeţ.

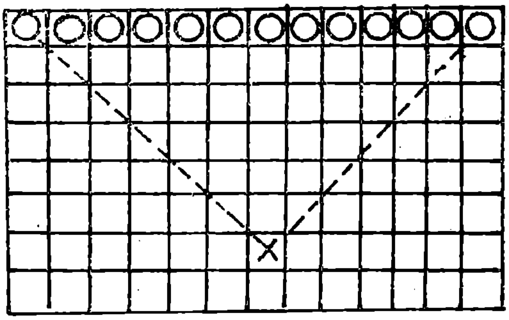


Fig. 4

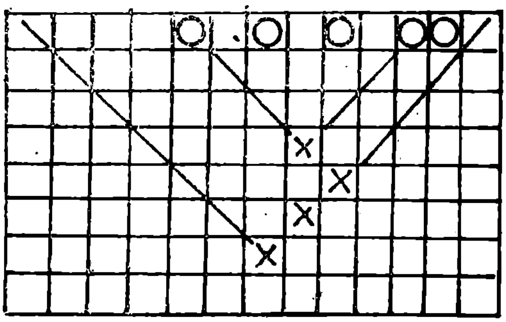


Fig. 5

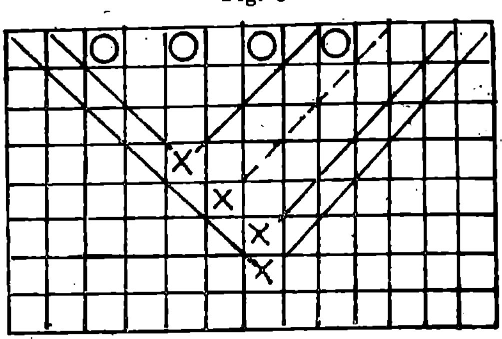
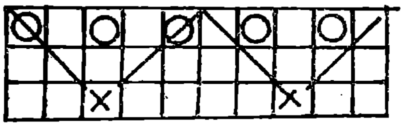


Fig. 6

Vom încerca să stăvilim mişcarea cruciuliţelor în sus. Privind figura 4, ne-am putea pune problema că este imposibil ca cruciuliţele să nu pătrundă dincolo de linia orizontală ocupată cu cerculeţe căci după 6 mişcări cruciuliţele pot să fie pe oricare dintre cele 13 pătrăţele marcate cu cerculeţe, iar al doilea poate pune în acest timp doar 6 cerculeţe. Să privim acum figura 5.

Jocul a început şi, cu fiecare mutare, cruciuliţele ameninţă un număr tot mai mic de cîmpuri de pe orizontala marcată cu cerculeţe : după a doua mişcare, 11 cîmpuri, după a treia, 9, după a patra, 7. Dar al doilea reuşeşte să pună în patru mişcări cerculeţele astfel încît în cîmpurile ameninţate ele să fie puse, unul da, altul nu. Demonstraţia acestui fapt este imediată, analizînd toate cazurile posibile (v. figura 5). După a cincea mişcare a cruciuliţelor, se obţine una din cele două situaţii reprezentate în figura 6. În cazul a), al doilea jucător poate să pună cerculeţele în cele două cîmpuri goale în orice ordine, iar în cazul b) el trebuie să pună cerculeţul întîi în cîmpul din mijloc şi apoi,



a Fig. 7 b

în funcție de mișcarea primului, în stînga sau în dreapta: astfel, deplasarea cruciulițelor este respinsă.

Astfel, „atacul frontal" al cruciulițelor este respins! Al doilea jucător poate să nu permită cruciulițe dincolo de a șasea orizontală (față de locul primeia).

S-ar părea că, în acest mod, problema este rezolvată, limitînd, așadar, cruciulițele în interiorul unui pătrat. Totuși, n-am luat în considerare posibilitatea atacului cruciulițelor „la colț".

Dacă cruciulița este situată pe diagonala pătratului, atunci ea amenință aproape de două ori mai multe cîmpuri de pe marginea pătratului decît în cazul „atacului frontal" pe latura acestui pătrat; ca, de exemplu, în figura 8, ea amenință 13 cîmpuri de pe fiecare latură și în total 25 de cîmpuri.

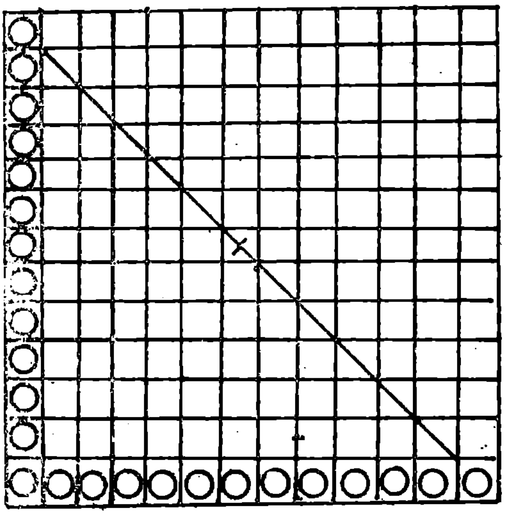


Fig. 8

Vor putea cerculețele să reziste acestui atac? În ajutorul cerculețelor vine posibilitatea de a lua drept cîmp de luptă laturile unui pătrat atît de mare cît este necesar. Vom lua un pătrat mare (mult mai mare decît cel din fig. 8) și vom trasa în el un pătrat la șase pătrățele de laturile primului. Centrul pătratului îl luăm în pătrățelul unde a fost pusă prima cruciuliță. Pînă cînd cruciulițele se află în interiorul pătratului mic, laturile pătratului mare nu sînt amenințate de atac frontal și în tot acest timp cînd cruciulițele se vor mișca către o latură sau un colț al pătratului interior, cerculețele pot să-și întărească pozițiile lor din colțurile pătratului mare punînd, de exemplu, în fiecare colț cîte 11 cerculețe (fig. 8) astfel că atacul „la colț" este stopat iar cel pe o latură îl putem opri prin procedeul descris mai sus. Pentru ca să plasăm în fiecare colț cîte 11 cerculețe, se poate arăta ușor că pătratul interior trebuie să aibă latura de 87 de pătrăţele şi deci pătratul exterior va avea latura de 99 de pătrăţele.

Alte variante ale acestui joc sînt următoarele :

a) se consideră vecine numai pătrăţelele care au o latură comună ;

b) planul este împărţit nu în pătrate, ci în hexagoane regulate ;

c) primul jucător poate să pună deodată p cruciuliţe, iar al doilea q cerculeţe.

Prezentăm un al treilea joc şi condiţia lui.

Doi jucători joacă următorul joc : 36 de chibrituri sînt puse în linie. Fiecare jucător ia, pe rînd, cîte un chibrit, două sau trei. Cel care ia ultimul băţ cîştigă jocul.

a) Arătaţi că cel de-al doilea jucător poate cîştiga întotdeauna.

b) Regulile jocului se schimbă în sensul că beţele trebuie luate de jucători numai dintr-o anumită grupă de chibrituri (astfel, de exemplu, dacă primul jucător ia chibritul al treilea şi al şaptelea, şirul de chibrituri a fost împărţit în trei grupe, şi anume, prima grupă de 2 chibrituri, a doua din următoarele 3 chibrituri, şi următoarea din 29 de chibrituri). În această situaţie mai poate al doilea jucător cîştiga întotdeauna?

a) Strategia celui de-al 2-lea jucător este de a lua $(4 - n)$ chibrituri, dacă primul jucător a luat n chibrituri ($n = 1$, 2 sau 3). Astfel, numărul de chibrituri rămase după ce al 2-lea jucător a luat este multiplu de 4, şi deci, la a 9-a mişcare, al doilea jucător va lua cel de-al 36-lea băţ.

b) Răspunsul este „nu". Să considerăm cele 36 de beţe aşezate în linie, numerotate de la 1 la 36 :

$$1, 2, \ldots, 36.$$

Primul jucător poate întotdeauna cîştiga adoptînd următoarea strategie :

Mişcarea 1. Jucătorul ia beţele din mijloc, 18 şi 19. Cele 34 de beţe rămase se află împărţite acum în 2 grupe egale ca număr, A şi B.

Mişcări ulterioare. Jucătorul 1 adoptă o strategie de mişcări simetrice cu cel de-al 2-lea jucător, în sensul că, dacă jucăturul 2 a luat băţul numerotat x, jucătorul 1 va lua băţul $34 - x$, astfel că A şi B păstrează o simetrie, cel ce termină fiind jucătorul 1.

Comentarii

Aceste trei jocuri constituie exemple pentru care teoria lor este pusă la punct. Un exemplul de joc a cărui teorie nu este definitivată este de pildă, jocul de şah. Este adevărat că, pînă în prezent, există o serie de scheme tactice şi analize ale acestui joc dar, între doi adversari la fel de puternici, intuiţia joacă, adesea, rolul hotărîtor. Într-o poziţie dată un jucător poate anticipa cîteva mutări dar aceste calcule pot fi răsturnate de adversar printr-o mutare neprevăzută, bazată tot pe calcul. Pe acest principiu funcţionează şahiştii-computer, maşini capabile să anali zeze sute, mii chiar zeci de mii de variante și să o aleagă pe cea mai convenabilă.

Există, în literatura mondială, multe lucrări dedicate jocurilor logice. Acestea analizează diversele strategii de cîștig, de pierdere, indicînd adesea calea cea mai scurtă către rezultatul dorit. În secțiunea de față nu am urmărit expres un astfel de scop, căci analiza profundă a jocurilor enumerate mai jos ar necesita, poate, o întreagă lucrare. Am înțeles să grupăm o serie de jocuri mai mult sau mai puțin cunoscute în scopul de a oferi cititorilor un agreabil mod de a-și petrece timpul și de a-i invita să găsească singuri strategia de cîștig.

Astfel, vom prezenta în continuare, cîteva jocuri logice și care se pot juca, în marea lor majoritate, la orice vîrstă. Există jocuri al căror succes depinde de șansă, altele în care șansa de a cîștiga este împletită cu ingeniozitatea, altele în care cîștigul este asigurat în urma unor calcule prealabile. Cine știe să facă calculul, acela care deține strategia de joc, devine cîștigătorul jocului.

Jocul nr. 1 Șahul tactic

Șahul tactic este un joc strategic între doi parteneri, între două tabere egal de puternice, albul și negrul, asemănător șahului clasic. Asupra descrierii regulilor acestui din urmă joc nu insistăm, el fiind, credem, cunoscut de marea majoritate a cititorilor.

În șahul tactic, fiecare jucător posedă 18 piese, care sînt întrucîtva diferite de cele ale șahului clasic : 6 pioni, 3 cai, 4 nebuni, 4 ture și un rege.

Tabla de joc a șahului tactic are dimensiunile 11 × 11, numerotate pe orizontal 1—11, iar pe vertical *a*—*k*. Pe ea sînt marcate două diagonale, pătrățelele b 5 și j 7, și două linii care traversează tabla de joc de-a lungul liniilor 3 și 9.

Piesele albe ocupă rîndurile 1, 2 și 3 după cum urmează : pionii — a 3, c 3, e 3, g 3, i 3, k 3 ; caii ocupă pătrățelele c 1, f 3 și i 1, nebunii — pătrățelele b 2, d 2, h 2, j 2, turele — pătrățelele a 1, e 1, d 1, k 1, iar regele pătrățelul f 1.

Piesele negre ocupă rîndurile 9, 10, 11 într-o poziție simetrică cu cele albe.

Regulile de desfășurare a acestui joc sînt următoarele :

I. Mutarea pieselor

1. Toate piesele au dreptul să se deplaseze în toate direcțiile.

2. Piesele se pot deplasa în modul următor :

a) pionii cîte un pătrățel ;

b) regele unu sau două pătrățele ;

c) caii unul sau trei pătrățele ori analog calului de la șahul clasic ;

d) nebunii 1—4 pătrăţele;

e) turele 1—5 pătrăţele.

Pionii şi caii au dreptul să se deplaseze pe prima diagonală a 1—k 11 cu 1—4 pătrăţele. Regele nu are dreptul să treacă liniile de demarcaţie trasate peste rîndurile 3 şi 9.

3. Turele pot să se deplaseze peste oricare alte piese, cu excepţia turelor şi a nebunilor adverşi.

4. Diagonala a doua (k 1—a 11) poate fi ocupată şi trecută de toate piesele, însă nici o piesă, cu excepţia turelor, nu se poate deplasa de-a lungul ei.

5. Pătrăţelele b 5 şi j 7 nu pot fi ocupate sau traversate de nici o piesă, cu excepţia turelor, care le pot traversa, dar nu le pot ocupa.

II. Reguli pentru luarea pieselor.

1) Luarea prin „atac direct".

a) piesele pot fi atacate numai în linie dreaptă, nu şi în diagonală (cu excepţia cazului descris la pct. 2); în plus, calul poate ataca şi analog calului de la şahul clasic;

b) o piesă nu poate fi luată decît dacă este atacată de două piese adverse, situate la depărtarea maximă în care piesele atacatoare pot muta.

c) piesa atacată poate fi luată de oricare din cele două piese atacatoare;

d) nebunii pot ataca peste pătrăţele b 5 şi j 7 şi peste alte piese fără să se poată deplasa, cealaltă piesă atacatoare trebuind să ia piesa atacată. Dacă o piesă este atacată de doi nebuni, ea este luată fără nici o mutare.

e) turele pot ataca peste pătrăţelele b 5 şi j 7 şi peste alte piese; excepţie de la această regulă fac turele şi nebunii adverşi.

2) Luarea prin „încercuire"

Dacă o piesă este încadrată de două piese adverse fie în linie directă, fie în diagonală, atunci poate fi luată fără nici o mutare.

3) Luarea prin „tură-nebun".

Dacă piesa se găseşte lîngă o tură adversă şi este atacată de un nebun, astfel încît cele trei piese se găsesc toate în linie dreaptă, ea poate fi luată de tură, prin deplasarea cu un pătrăţel. Spaţiul de trei pătrăţele dintre piesa atacată şi nebun poate fi ocupat şi de alte piese.

III. Deciderea jocului:

1) Jocul este cîştigat de una din tabere cînd:

a) regele advers a fost luat;

b) adversarul a rămas numai cu cinci piese dintre pioni, nebuni și cai ; o tabără a ocupat cinci pătrățele din zona adversarului cu pioni, nebuni și cai, printre care trebuie să se găsească neapărat un pion, fără ca la mutarea imediat următoare adversarul să poată lua una dintre aceste cinci piese ;

c) adversarul a pierdut toți pionii ;

d) adversarul nu mai are nici o posibilitate să efectueze vreo mutare.

2. Jocul este nedecis atunci cînd :

a) Unul dintre jucători este înfrînt printr-una din cele cinci posibilități descrise mai sus și la mutarea următoare pune la rîndul său pe adversar într-o situație de înfrîngere ;

b) dacă într-o partidă se repetă de trei ori aceeași poziție.

Jocul nr. 2. „Remmy matematic"

Pentru acest joc se pregătesc 52 cartonașe mici, numerotate : primele 4 cu 1, următoarele 4 cu 2, apoi 3 ș.a.m.d., pînă la 13.

Numărătoarea punctelor

(20)

1○	1△	7◇	1□	1◇	(200)
2○	10□	2◇	13○	2△	(50)
5○	12○	13◇	5◇	7◇	(10)
3○	3△	3◇	11□	3□	(160)
4○	12□	4◇	12□	12△	(80)
(1 200)	(10)	(550)	(150)		

Numărul participanților la joc nu este limitat. Fiecare jucător își desenează pe o coală de hîrtie un pătrat cu 25 de pătrățele. Unul dintre jucători (oricare) strînge toate cartonașele, le amestecă așa cum se procedează la cărțile de joc, apoi întoarce pe față primul cartonaș și anunță numărul scris pe el. Toți participanții scriu acest număr în unul din pătrățelele de pe coala lor de hîrtie. (După ce numărul a fost trecut într-un pătrățel, el nu mai poate fi mutat într-alt pătrățel). Apoi se anunță numărul înscris pe cartonașul următor, iar jucătorii îl scriu în oricare din pătrățelele libere de pe coala lor de hîrtie ș.a.m.d.

Jocul se termină odată cu completarea tuturor celor 25 de pătrățele După aceasta se face evaluarea tabelului fiecărui participant, prin acordarea unui număr de puncte, în funcție de modul cum au fost plasate cifrele în pătrățele. Declarat învingător este jucătorul care a totalizat cele mai multe puncte.

Calcularea punctelor se face după tabelul următor:

Combinarea numerelor	Pe orizontală sau verticală	Pe diagonală
două numere identice	10 p	20 p
două perechi de numere identice	30 p	40 p
3 numere identice	50 p	60 p
trei numere identice şi alte două numere identice	80 p	90 p
4 numere identice	160 p	170 p
5 numere succesive nu neapărat în ordine (des)crescătoare	50 p	60 p
numerele 1, 13, 12, 11 aşezate într-o ordine oarecare	150 p	160 p
4 de 1	200 p	210 p

Jocul devine şi mai atractiv dacă numerele scrise pe cartonaşe le sînt asociate simbolurile △, ○, □, ◇, astfel: prima serie de cartonaşe 1, 2, 3,..., 13 marcate cu △, a doua serie de cartonaşe 1, 2, 3,..., 13 marcate cu □ ş.a.m.d. (aşadar, fiecare din cartonaşele pe care este scris acelaşi număr va purta unul din simbolurile de mai sus, neexistînd două cartonaşe avînd scrise pe ele acelaşi număr şi cu simboluri identice). În acest caz, tabelul de mai sus poate fi completat astfel:

Combinarea simbolurilor	Pe orizontală sau verticală	Pe diagonală
cinci simboluri identice	△ 400 □ 450 ○ 500 ◇ 550	420 470 490 570
cinci simboluri identice şi numerele succesive, în ordine arbitrară	△ 1 000 □ 1 100 ○ 1 200 ◇ 1 300	1 050 1 150 1 250 1 350

Variantele pot fi combinate; dacă, de exemplu, pe orizontală, verticală sau diagonală avem cinci cartonaşe cu acelaşi simbol (de exemplu una şi două cifre identice) numărul punctelor realizate în acest caz este 1 200 + 10.

Suita 10, 11, 12, 13, 1 se consideră formatic de numere succesive.

Jocul nr. 3. Construcţia pătratelor

Se joacă în doi. Fiecare jucător trebuie să aibă 18 figuri de carton (v. fig. 1). Numărul figurilor este indicat prin cifre imediat sub fiecare dintre ele. Culoarea figurilor de care se foloseşte unul din participanţi trebuie să difere de culoarea figurilor celuilalt participant.

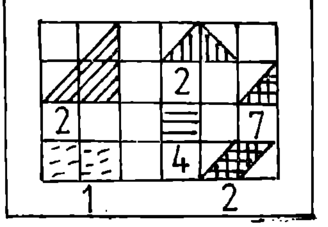


Fig. 1

Tabla de joc este un pătrat cu 36 pătrăţele, grupate în 9 sectoare a cîte 4 pătrăţele. Dimensiunile figurilor sînt în funcţie de dimensiunile pătrățelelor. Considerînd figurile date, se pot construi mai multe pătrate de aceeași mărime ca și sectoarele tablei (adică de 4 pătrățele). Desigur că fiecare jucător nu poate construi mai mult de 4 pătrate, căci nu dispune decît de 18 figuri, cu o suprafață totală de 17,5 pătrățele.

Pătratele se construiesc pe tablă în mod succesiv. Fiecare jucător pune o figură pe oricare pătrățel liber al oricărui sector care n-a fost încă ocupat de partener, dar nu are voie să ocupe cu figurile sale mai mult de 4 sectoare.

Este interzis să se mute o figură dintr-un pătrățel într-altul, să se schimbe poziția sau să se deplaseze figurile dintr-un sector în altul.

Jocul se termină atunci cînd nici unul din parteneri nu poate construi un pătrat cu figurile rămase. Cîștigă cel care construiește mai multe pătrate.

Jocul nr. 4. Solitarul

Jocul se joacă pe o tablă cu treizeci și trei de cîmpuri (v. fig.). În figură, fiecare cîmp este notat cu o pereche de numere, arătînd linia orizontală și cea verticală la intersecția cărora se află respectivul cîmp.

		73	74	75		
		63	64	65		
51	52	53	54	55	56	57
41	42	43	44	45	46	47
31	32	33	34	35	36	37
		23	24	25		
		13	14	15		

La începutul jocului, toate cîmpurile, cu excepția unuia singur, sînt ocupate de piese.

Trebuie scoase 31 piese indicîndu-se cîmpul „inițial" gol (a, b) și cel „final" (c, d) în care trebuie să se afle piesa rămasă la sfîrșitul jocului. Regulile jocului sînt următoarele: orice piesă poate fi scoasă de pe tablă dacă alături de ea (orizontal sau vertical) se află de o parte o piesă („cea care bate"), iar de partea cealaltă un cîmp gol pe care trebuie trecută piesa „care bate".

Jocul nr. 5. „Jocul cu 15"

„Jocul cu 15" constă în următoarele: într-o cutie cu 16 celule sînt așezate, într-o ordine arbitrară, 15 piese numerotate (v. de exemplu, fig. *1*).

9	3	1	2
15	14	8	11
6	7	10	12
13	5	4	

1

9	3	1	2
15	14	8	11
6	7	10	
13	5	4	12

2

Se cere să trecem la aşezarea normală *4* cu ajutorul unui număr de „mutări simple ale turnului de şah", constînd de fiecare dată în deplasarea spre o celulă goală a unei piese situate într-o celulă vecină. Deplasările se fac deci, pe orizontală sau verticală nu şi pe diagonală.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

3

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

4

De exemplu, deplasînd piesa 12 trecem de la poziţia *1* la poziţia *2*, apoi *3*. Apoi putem muta în locul gol piesa 10 sau 11 etc.

Jocul nr. 6. „Jocul centratelor"

Jocul se dispută între doi parteneri. Fiecare îşi alege cîte un număr format din 4 cifre necunoscut pentru adversar.

Cifrele nu se pot repeta sau să fie 0 (de exemplu, numerele 4 745 5 039 etc., nu sînt bune). Obiectivul fiecărui jucător este de a ghici numărul ales de adversar. Fiecare jucător (alternativ sau succesiv) pronunţă un număr care crede că ar fi cel ales de adversar. Dacă nu este numărul corect, adversarul îi comunică numărul de cifre comune (eventual nici una) dintre numărul ales de el şi cel care i-a fost comunicat şi anume cîte ocupă aceeaşi poziţie (cîte sînt „centrate") şi cîte ocupă poziţii diferite (cîte sînt „necentrate"). De exemplu, dacă numărul ales a fost 1 837, iar cel comunicat 2 873, atunci există o cifră centrată (8) şi două necentrate (3 şi 7). Valoarea cifrelor centrate, respectiv necentrate nu se comunică, ci numai numărul lor. Cîştigă cel care determină numărul ales de adversar din mai puţine încercări.

Jocul nr. 7. Jocul maharajahului

Jocul maharajahului se joacă pe o tablă obişnuită de şah, 8×8. Unul din jucători îşi aşează cele 16 piese (aceleaşi ca la şah) în modul obişnuit, dar celălalt are o singură piesă, numită „maharajah" şi avînd mişcările combinate ale reginei şi calului. Maharajahul este aşezat iniţial pe oricare pătrăţel liber neameninţat de pion, după care partea adversă face prima mişcare, după regulile obişnuite de mutare a pieselor din şahul clasic. Maharajahul pierde dacă este capturat şi cîştigă dacă reuşeşte să facă regele şah-mat. Pionii nu pot fi înlocuiţi cu regine sau cu alte piese, dacă avansează pe ultimul rînd.

Jocul nr. 8. „Jocul lui Gale”

Jocul se joacă în doi, pe o tablă ca în figura alăturată. Dacă se joacă pe hîrtie, unul dintre jucători desenează cu un creion negru cîte o linie dreaptă, care unește o pereche oarecare de puncte negre vecine, orizontal sau vertical, dar nu diagonal. Celălalt jucător folosește un creion roșu pentru a uni în mod similar perechi de puncte roșii. Ei trasează pe rînd cîte o linie, cu condiția ca acestea să nu se întretaie, iar drumul fiecăruia nu se traversează unul pe altul. Cîștigă cel care reușește să completeze un drum continuu care unește cele două laturi opuse ale tablei care sînt de culoarea lui.

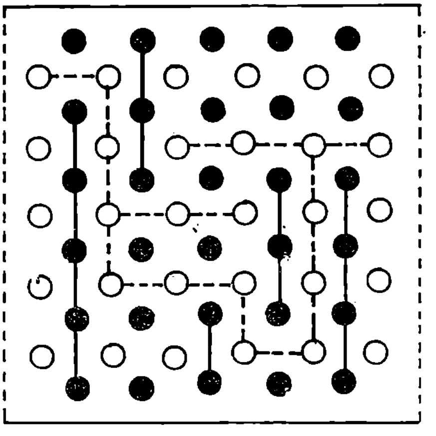


Figura arată un final în care cîștigă „roșul” (drumul este marcat prin linii întrerupte).

Jocul nr. 9. Jocul monezilor

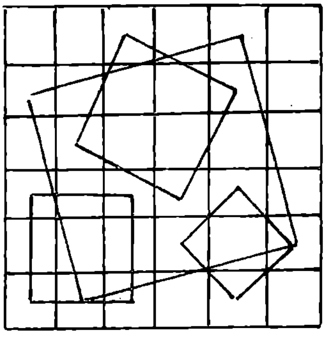
Pe o masă sînt aranjate în cerc un număr oarecare de monezi, în așa fel încît fiecare să se atingă cu cele două vecine. Jucătorii ridică, pe rînd, fie o monedă, fie două care se ating. Cel ce ridică ultima monedă, cîștigă.

Jocul nr. 10. Jocul cruciulițelor

Doi jucători joacă, alternativ, punînd cîte o piesă (de exemplu, monezi, dominouri de aceleași dimensiuni sau cruciulițe din plastic) pe o tablă în formă dreptunghiulară sau pătrată. Piesele nu se pot suprapune. Pierde cel care nu mai are unde pune piese. În tot timpul jocului piesele nu pot fi deplasate.

Jocul nr. 11. Jocul „evitării pătratelor”

Jocul folosește o tablă de șah de 6 $\times$ 6. Unul dintre jucători are 18 piese (rondele) roșii, iar celălalt 18 piese negre. Ei plasează, alternativ, cîte una dintre piesele lor pe oricare cîmp liber al tablei. Fiecare se străduie să evite așezarea pieselor astfel ca patru oarecare dintre ele să fie colțurile unui pătrat. Aceste pătrate pot fi de orice dimensiuni și pot fi înclinate oricum față de tablă. Există 105 astfel de pătrate, dintre care cîteva sînt indicate.



Învingător este jucătorul care îl aduce pe adversar în situația de a nu mai reuși să evite formarea unuia din cele 105 pătrate. Jocul poate fi jucat și cu creionul și hîrtia, înlocuind piesele prin simbolurile x și 0.

Jocul nr. 12. Jocul inversărilor

Jocul se joacă între doi parteneri pe o tablă 8 × 8 cu 64 de piese care sînt vopsite în culori contrastante (de exemplu, roşu şi negru) pe cele două feţe. Piesele pot fi confecţionate dintr-o foaie de carton colorată pe cele două părţi, din care se taie rondele sau forme pătratice.

Jocul „inversărilor" începe cu masa goală. Unul dintre jucători („roşul") are 32 de piese întoarse cu faţa roşie în sus, iar celălalt („negrul") 32 cu faţa neagră în sus.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28 ●	29 ●	30	31	32
33	34	35	36 ○	37 ○	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig 1

Jucătorii pun, alternativ, cîte o piesă pe tablă, potrivit următoarelor reguli :

1) Primele patru piese trebuie aşezate pe cele patru pătrăţele centrate. Un astfel de mod de aşezare poate fi cel din fig. 1.

2) După ce sînt completate cele patru pătrăţele centrale, jucătorii continuă să plaseze alternativ pe tablă cîte o piesă. Fiecare piesă trebuie aşezată astfel ca să fie adiacentă cu o piesă adversă, orizontal, vertical sau diagonal. Mai mult, ea trebuie să fie în linie dreaptă cu o altă piesă de aceeaşi culoare şi cu una sau mai multe piese adverse, iar între ele să nu fie locuri goale. Cu alte cuvinte, o piesă trebuie întotdeauna plasată astfel ca să formeze pereche cu o altă piesă prietenă, de o parte şi de alta a unei piese sau a unui şir de piese adverse. Aceste piese adverse sînt considerate capturate, dar, în loc să fie luate de pe masă, sînt întoarse, astfel că ele devin prietene. Pe toată durata jocului, piesele rămîn nemişcate ca poziţie, dar pot fi întoarse de pe o faţă pe alta ori de cîte ori impune desfăşurarea jocului.

3. Dacă aşezarea unei piese capturează simultan mai mult decît un şir de piese adverse, sînt inversate piesele din toate şirurile.

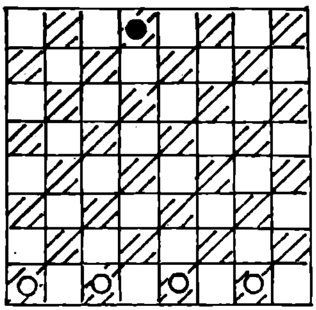
4. Piesele pot fi capturate numai prin aşezarea unei piese. Şirurile care devin flancate la ambele capete ca rezultat al altor cauze nu sînt capturate.

5. Dacă un jucător nu poate muta, el pierde rîndul. Continuă să piardă rîndul pînă în momentul cînd pentru el devine posibilă o mişcare permisă.

6. Jocul se sfîrşeşte cînd toate cele 64 de pătrăţele sînt ocupate, sau cînd nici unul din jucători nu mai poate muta (fie pentru că nu are posibilităţi permise de a muta, fie că şi-a terminat piesele). Cîştigător este cel care sfîrşeşte jocul cu mai multe piese pe tablă.

Jocul nr. 13. Jocul „Cîinii şi vulpea"

Pentru joc sînt necesare : o tablă 8 × 8, patru pioni albi şi un pion negru. La începutul jocului piesele se aşează după cum se indică în figură.



Unul din jucători va juca cu „cîinii" — cele patru piese albe — iar al doilea va juca cu „vulpea" — piesa neagră. Atît „vulpea" cît și cîinii pot muta doar cîte un pătrățel, în diagonală, dacă pătrățelul în care urmează a se muta este liber. „Vulpea" va putea muta în orice direcție dar „cîinii" numai înainte. „Vulpea" cîștigă dacă reușește să ajungă pe linia întîi a tablei și pierde dacă este încolțită de cîini și nu mai are unde muta.

Jocul nr. 14. Jocul pe tablă cu pătrățele

Acest joc se practică pe o figură poligonală, alcătuită dintr-un număr oarecare de pătrățele, dimensiunile și conturul său nejucînd nici un rol. Cei doi jucători îngroașă, pe rînd, cu creionul laturile pătrățelelor interioare, desenate inițial punctat. Laturile pătrățelelor care se confundă cu marginea figurii se consideră ca fiind îngroșate. Fiecare jucător, la o mișcare, poate îngroșa o singură latură. Jucătorul care va îngroșa ultima latură a unui pătrățel îl va cîștiga, notîndu-l cu un semn distinctiv. În acest caz, el cîștigă dreptul de a mai îngroșa încă o latură, drept la care nu are voie să renunțe. În acest fel, el poate cîștiga, dacă situația îi permite, mai multe pătrățele la rînd.

În final, jocul va fi cîștigat de cel care a ocupat mai multe pătrățele calculîndu-se fie diferența, fie raportul dintre numerele pătratelor cîștigate de fiecare.

Jocul nr. 15. Jocul Nim

În trei rînduri orizontale sînt așezate 12 monede : 3 în primul rînd, 4 în al doilea și 5 în al treilea. Cei doi jucători iau, aternativ, dintr-un rînd, un număr oarecare de monede. Cîștigă cel care ia ultima monedă.

Jocul nr. 16. Jocul Tiktacktoe

Jocul folosește o tablă 3×3 cu pătrățele și piese de două culori. Fiecare din cei doi jucători posedă numai piese din aceeași culoare. Jucătorii pun alternativ pe tablă cîte o piesă. Cîștigă cel care reușește să așeze trei fise „legate" fie orizontal, fie vertical, fie diagonal.

Jocul se poate practica și pe hîrtie, înlocuind piesele prin semnele x și 0.

Dacă jocul este nedecis, el se poate continua deplasînd piesele în pătrățele vecine (cîte una) pînă apare o situație cîștigătoare.

Jocul nr. 17. Jocul lui Bachet

Dintr-o grămadă care conține inițial n obiecte, doi jucători iau alternativ un număr arbitrar de obiecte cel puțin unul și cel mult a (fixat dinainte). Cîștigă cel care, la o anumită mutare, ia toate obiectele rămase.

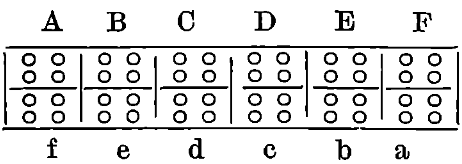
Jocul nr. 18. Jocul „tzianşitzi“

Din două grămezi, formate dintr-un număr arbitrar de obiecte, cei doi jucători pot să ia : fie un număr arbitrar de obiecte dintr-o grămadă (chiar toate odată), dar cel puţin unul, fie acelaşi număr de obiecte din ambele grămezi. Cîştigă cel care reuşeşte să ia ultimul obiect aflat pe masă.

Jocul nr. 19. Jocul „Owa”

Pentru acest joc se folosesc 12 cutiuţe şi 48 de bile (se poate juca şi pe o tablă cu piese circulare). Cutiuţele sînt aşezate aşa cum se arată în figură, în fiecare căsuţă fiind distribuite la începutul jocului cîte 4 bile.

Se joacă în doi. Un jucător (să-l numim X) alege latura AF, celălalt x, latura af. Primul jucător începe prin a scoate toate bilele aflate într-o cutie de pe latura sa şi le distribuie, cîte una, în cutiile următoare. Ordinea succesiunii cutiilor este inversă acelor de ceasornic. (ABCDEF abcdef). De exemplu, dacă jucătorul X, începînd jocul, scoate bilele din cutia D el trebuie să le distribuie cîte una, în cutiile E, F, a, b. Jucătorul x va putea să răspundă, de exemplu, prin golirea cutiei a (care după mutarea lui X are 5 bile) distribuind bilele în cutiile b, c, d, e, f. După aceste două mutări va rezulta următoarea poziţie :



f	e	d	c	b	a
5	5	5	5	6	0
4	4	4	0	5	5
A	B	C	D	E	F

Dacă unul din jucători goleşte o cutie care are 12 sau mai multe bile, atunci cu prilejul distribuirii lor în celelalte cutii el va sări cutia respectivă, adică o va lăsa goală.

În fine, dacă, distribuind bilele în cutii, ultima bilă a fost pusă în utilma cutie a laturii (f sau F) adversarului, după care în această ultimă cutie se vor găsi 2 sau 3 bile, jucătorul care a făcut mutarea va lua bilele respective, considerîndu-le „cîştigate”. Dacă şi în cutiile precedente de pe latura adversarului (E, D, C, etc.) se vor găsi cu această ocazie tot 2 sau 3 bile, el le va lua şi pe acestea, dar numai pînă la cutia în care numărul bilelor este altul decît 2 sau 3.

Jocul încetează în următoarele două cazuri :

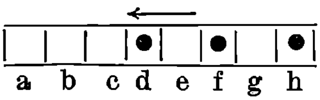
1. Jucătorii au căzut de acord că bilele rămase pe tablă nu sînt suficiente pentru crearea unei situaţii cîştigătoare pentru oricare din parteneri ;

2. Unul din jucători nu mai are nici o bilă pe latura sa.

Învingător este jucătorul care la sfîrşitul jocului a cîştigat mai multe bile.

Jocul nr. 20. Jocul deplasărilor

Se joacă în doi. Tabla de joc este o fîşie de hîrtie împărţită în 8 pătrăţele (v. fig.). În pătrăţelele d, f şi h se aşează cîte o piesă. Participanţii mută, pe rînd, oricare din cele trei piese în direcţia arătată de săgeată şi o aşează în unul din celelalte pătrăţele. Piesa mutată poate să sară peste alta sau poate fi plasată în pătrăţelul ocupat de altă piesă.



Cîştigă cel care va pune ultima piesă în pătrăţelul a.

Jocul nr. 21. Jocul lui Luc

Jocul se joacă într-un număr oarecare de jucători. Fiecare jucător joacă pe rînd. Scopul jocului este de a muta piesele albe în locul celor negre şi invers. Piesele albe se pot deplasa numai spre stînga, iar cele negre numai spre dreapta. Piesele se pot deplasa fie o căsuţă, fie pot sări peste alta. Cîştigă cel care reuşeşte schimbarea într-un număr minim de mutări.

Jocul nr. 22. Jocul „cu soţ"

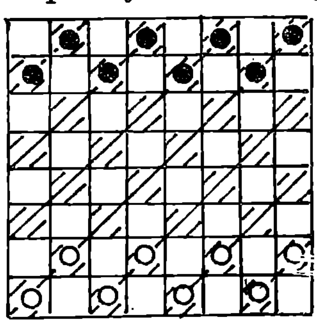
Doi jucători iau, alternativ, 1—4 chibrituri din cele 27 aflate pe masă. Cîştigă cel care, la sfîrşitul jocului, va avea un număr par de chibrituri.

Jocul nr. 23. Jocul cartonaşelor

Se joacă în doi. Primul jucător spune un număr natural nenul care să fie cel mult egal cu 10. La acest număr, al doilea jucător adună un număr ales de el—care, de asemenea, este cel mult egal cu 10 — şi spune suma. La această sumă primul adună un alt număr natural cel mult egal cu 10 şi anunţă suma ş.a.m.d. Cîştigă cel care spune primul o sută.

Jocul nr. 24. Război în opt

La joc iau parte două persoane care urmăresc, fiecare, să scoată din luptă armata adversă. El se desfăşoară pe o tablă de şah 8 × 8, fiecare partener dispunînd de cîte opt piese („roşu" şi „negru") aşezate la începutul jocului ca în figura alăturată.



În cursul jocului, prin mutări alternative, „soldaţii" unui jucător urmăresc să încercuiască „soldaţii" adversarului, mutarea putîndu-se face într-un pătrăţel vecin, numai pe diagonală, fie înainte, fie înapoi. Se consideră capturată piesa (sau piesele) care nu mai are posibilitatea să se deplaseze legal ca urmare a faptului că a fost flancată de piese adverse. Aceasta este eliminată de pe tablă.

Pierde jucătorul care nu mai are nici o piesă pe tablă sau cel care are cele mai puţine şi se ajunge la concluzia că cele existente în acel moment nu sînt suficiente pentru a permite o captură. Jocul se poate sfîrşi şi prin remiză, în aceleaşi condiţii.

Piesele blocate pot fi luate de pe tablă în orice moment al jocului.

Jocul nr. 25. Jocul segmentelor

Se joacă în doi. Pe o foaie de hîrtie sînt însemnate un număr arbitrar de puncte. Fiecare dintre jucători trasează, alternativ, cîte un segment care uneşte două puncte oarecare ale configuraţiei. Fiecare punct nu poate fi capătul a două sau mai multe segmente. Segmentele nu se pot întretăia. Pierde cel care nu mai poate trasa nici un segment.

Jocul nr. 26. Colţul negru

Jocul se joacă pe o tablă cu pătrăţele 4 × 4 (sau pe orice tip de tablă, recomandabil pînă la 8 × 8). Unul din colţurile tablei este înnegrit, iar jocul începe întotdeauna din colţul opus acestuia.

Cei doi jucători au la dispoziţie un număr adecvat de piese (jetoane din carton) de formă pătrată şi de mărime egală cu aceea a pătrăţelului unitar al tablei. Jetoanele au trasate pe faţă linii care leagă între ele, cîte două, laturile opuse sau două cîte două laturile apropiate (v. fig. 1).

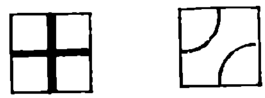


Fig. 1

Jocul începe obligatoriu cu un jeton cu liniile încrucişate. Problema este ca, plasînd unul lîngă altul asemenea jetoane, să se formeze o linie continuă din colţul de început al tablei în „colţul negru", din dreapta, jos. Cîştigă cel care pune ultimul jeton.

Din cele două linii ale fiecărui jeton numai una duce linia jocului mai departe, dar la mutări următoare pot fi cuprinse în continuarea liniei şi capetele (ramificaţii din linia principală) rămase pe parcurs. În felul acesta pot apare şi bucle.

Dacă lîngă primul jeton, al doilea jucător va plasa un jeton cu linii încrucişate, linia jocului se continuă drept (v. fig. 2), iar dacă va plasa un jeton cu linii curbe, linia jocului este întoarsă cu 90° la stînga, sau la dreapta (v. fig. 3).

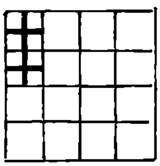


Fig. 2

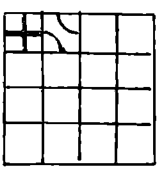


Fig. 3

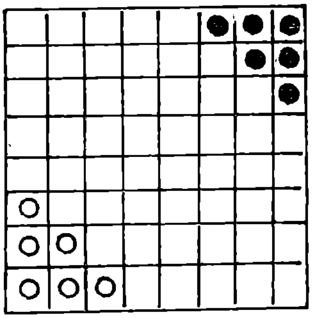
Este interzis ca linia principală să fie condusă la marginea tablei. Jucătorul cu a cărui mutare se scoate linia jocului la conturul tablei pierde jocul.

Jocul nr. 27. Jocul cuvintelor

Un alt joc logic de natură lingvistică este următorul : unul din parteneri spune 3 vocale distincte (sau mai multe ori mai puţine, după cum se stabileşte la începutul jocului),iar celălalt trei consoane, prin alternanţă, de exemplu o, t, a, v, ă, r. Cu ajutorul acestor litere se formează cuvinte (nu se admite repetarea literelor) de două, trei etc. litere. Cîştigă cel care formează cît mai multe cuvinte (se exclud numele proprii). De exemplu, cu literele de mai sus putem forma cuvintele văr, tavă, var, vată, vot, otravă, etc.

Jocul nr. 28. Din colț în colț („Halma")

Se joacă în doi pe o tablă 8 × 8 (tabla de șah). Fiecare dintre parteneri dispune de cîte 6 piese, de culori diferite (alb și negru), care inițial sînt așezate ca în diagramă. Jocul constă în deplasarea propriilor piese în colțul opus, în locul pieselor adverse. Cîștigă cel care ocupă cîmpul advers sau dacă adversarul este blocat în propriu teren și refuză să mute.



Deplasarea se poate face în orice direcție și sens (vertical, orizontal, diagonal) sau prin „săritură". „Săritura" se poate realiza numai în linie dreaptă (vertical, orizontal sau diagonal) peste o singură piesă de orice culoare în orice sens, cu condiția ca piesa peste care se sare să fie vecină, iar locul în care urmează să se încheie săritura este liber, sau peste mai multe piese, prin sărituri legate (succesiune de sărituri), dacă fiecare din ele sînt legate, iar pătratul în care se termină una din sărituri este punct de pornire pentru o săritură următoare.

Jocul nr. 29. Jocul „Dubleții"

Se joacă în doi. Fiecare dintre parteneri comunică celuilalt două cuvinte formate din cîte patru litere (ori mai multe sau mai puține, după cum se stabilește la începutul jocului). De exemplu, primul alege CALD și FISĂ, iar al doilea VARA și FUGĂ. Fiecare trebuie să transforme primul cuvînt ales de partener în al doilea cu ajutorul unor cuvinte intermediare, fiecare diferind de cel precedent printr-o singură literă. Este interzis să se folosească drept cuvinte intermediare nume proprii sau care nu pot fi găsite într-un dicționar uzual.

De exemplu, al doilea jucător va transforma cuvîntul CALD în cuvîntul FISĂ astfel:

CALD—CALĂ—OALĂ—FALĂ—FILĂ—FISĂ

iar primul va transforma VARA în FUGĂ astfel:

VARA—GARA—GURA—FURA—FUGA—
—FUGĂ

Cîştigă cel care reuşeşte transformarea din mai puţine înlocuiri. Fiecare dintre concurenţi, în acest caz studiat a reuşit transformarea din cinci înlocuiri, deci jocul are rezultat nedecis.

Jocul nr. 30. Jocul grămezilor

Se joacă în doi. Iniţial, pe cîmpul de joc, se află mai multe grămezi de piese. Alternativ, fiecare jucător îşi alege o grămadă formată din cel puţin două pietre şi o împarte în două grămezi mai mici. Mişcările se fac pe rînd, pînă cînd toate grămezile conţin cîte o singură piatră.

Cîştigă jucătorul care face ultima mişcare.

Jocul nr. 31. Jocul numerelor

Două persoane joacă următorul joc: primul se gîndeşte la două numere cuprinse între 1 şi 25 (inclusiv), iar al doilea trebuie să le ghicească. El poate spune orice două numere de la 1 la 25, iar primul este dator să-i spună cîte numere a ghicit — 0, 1 sau 2.

Încercările se repetă pînă cînd numerele sînt ghicite.

Apoi rolurile se schimbă. Cîştigă cel are ghiceşte numerele adversarului din mai puţine încercări.

Jocul nr. 32. Jocul paralelogramului

Se joacă în doi. Tabla de joc este formată dintr-un paralelogram caroiat ca în figura 1 de mai jos.

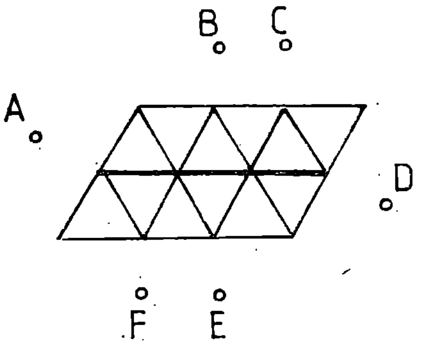


Fig. 1

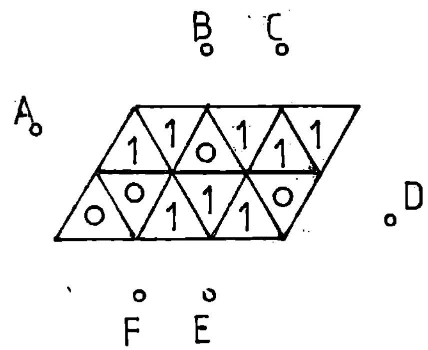


Fig 2

La începutul jocului, fiecare jucător îşi alege unul din punctele exterioare A, B, C, D, E aşezate astfel încît ducînd paralele prin aceste puncte la segmentele caroiajului să fie traversate toate triunghiurile mici. Jucătorii pun apoi, alternativ, în fiecare din cele 12 triunghiuri mici, una din cifrele 0 sau 1, la alegere, pînă cînd în fiecare triunghi este plasată cîte o cifră. Un astfel de exemplu este dat în figura 2. După completarea triunghiurilor cu cifre, fiecare jucător transformă configuraţia în alte configuraţii succesive, după algoritmul următor: Să presupunem că primul jucător, să-l numim I, şi-a ales iniţial punctul A. Din acest punct duce paralele la direcţiile segmentelor din configuraţie. Aceste paralele traversează cele 6 triunghiuri mici situate deasupra liniei mijlocii a paralelogramului (îngroşată în figură), precum şi triunghiul situat în stînga jos. Odată stabilite triunghiurile traversate, jucătorul va transforma cifrele situate în interiorul lor, după regula : 0 se transformă în 1 şi 1 se transformă în 0. Să notăm această transformare cu T. Tabloul, după transformarea T, arată astfel (v. fig. 3).

La următoarea sa mişcare, jucătorul I alege oricare alt punct din cele exterioare rămase şi aplică, după acelaşi procedeu, o transformare asemănătoare a tabloului cu cea precedentă.

Scopul jocului este ca, după astfel de transformări succesive, să se obţină un tablou în care toate cifrele să fie identice.

Al doilea jucător procedează analog, pornind pe caroiajul stabilit iniţial din punctul pe care şi l-a ales la începutul jocului (se înţelege, jucătorii fac operaţiile pe aceeaşi configuraţie a caroiajului, copiată pe foi separate).

Cîştigă cel care reuşeşte să finalizeze jocul, deci să transforme caroiajul într-unul cu cifre identice, prin cît mai puţine transformări.

Exemplu : Caroiajul din figura 2 poate fi transformat astfel :

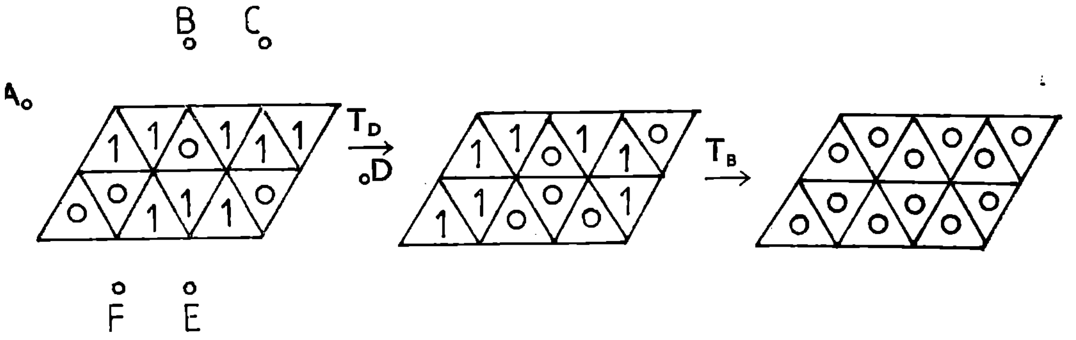
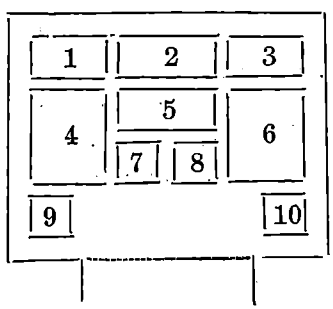


Fig. 3

Jocul se poate desfăşura pe configuraţii cu mai multe triunghiuri, alegînd punctele exterioare în mod corespunzător. De asemenea, se poate juca plasînd în triunghiurile configuraţiei numerele 0, 1, 2 (sau un număr finit de numere, alese dinainte) cu transformările :

$$0 \to 1;\ 1 \to 2;\ 2 \to 0$$

sau altele, de comun acord.



Jocul nr. 33. Jocul patrulaterelor

În limita spaţiului disponibil din casetă, fără a suprapune cartonaşele sau a le ridica de pe tablă, să se scoată de pe tablă cartonaşul cu nr. 2, fără ca între timp vreuna din piese să iasă din cadru (ieşirea se face prin „poarta" marcată prin linie întreruptă). Piesele sînt alipite dar, pentru a le distinge, în figura alăturată a fost lăsat spaţiu între ele.

Jocul nr. 4. Jocul „Solitarul"

Din teoria acestui joc rezultă că soluţia se obţine numai şi numai în cazul în care $(a-c)\vdots 3$ şi $(b-d)\vdots 3$, unde (a, b) este cîmpul iniţial, iar (b, d) cel final. Dăm, ca exemplu, soluţia problemei în care cîmpul (44) este atît iniţial cît şi final :

1. 64—44	6. 75—73	11. 65—45	16. 34—36
2. 56—54	7. 43—63	12. 15—35	17. 37—35
3. 44—64	8. 73—53	13. 45—25	18. 25—45
4. 52—54	9. 54—52	14. 37—35	19. 46—44
5. 73—53	10. 35—55	15. 57—37	20. 23—43

21. 31—33	26. 14—34
22. 43—23	27. 34—32
23. 51—31	28. 13—33
24. 52—32	29. 32—34
25. 31—33	30. 34—54
	31. 64—44.

Jocul nr. 5. Jocul cu „15".

Vom denumi *permutări* diversele poziţii ale pieselor. Constatăm că unele permutări vor fi de „nerezolvat", adică de la ele nu se va putea trece la permutarea *3*.

Justificarea acestei propoziţii se bazează pe consideraţii foarte simple : vom conveni să spunem că două piese se află într-o *dezordine relativă* (formează o *inversiune*), dacă piesa cu număr mai mare se află înaintea celei cu număr mai mic; de exemplu, permutarea *3* nu prezintă nici o inversiune, în permutarea *1* piesa 1 formează două inversiuni (cu 3 şi cu 9), piesa 2 mai formează două inversiuni cu aceleaşi piese, piesa 3 formează o singură inversiune cu 9 (inversiunile piesei 2 cu 3 şi a lui 3 cu 1 au fost luate în considerare anterior) etc.

Se constată uşor că permutarea *1* prezintă în total 49 de inversiuni.

Vom considera că în celula goală se află piesa 16 (fictivă) şi că deci fiecare mutare se reduce la o *transpoziţie* (schimbare de locuri) între piesa fictivă 16 şi una dintre piesele vecine cu ea.

În permutările *1*, *3*, *4*, nici o piesă nu formează inversiuni cu piesa 16, pe cînd în permutarea *2* fiecare dintre piesele 13, 5, 4, 12 formează cîte o inversiune cu 16.

Permutările cu un număr par de inversiuni (luînd în considerare şi piesa fictivă 16), de exemplu permutările *2* şi *3*, le vom numi *pare*, iar pe cele cu un număr impar de inversiuni, cum sînt *1* şi *4*, le vom numi *impare*.

În algebra superioară se demonstrează că transpoziţia a două elemente oarecare dintr-o permutare îşi schimbă paritatea; prin urmare, orice mutare în jocul „15" care este o transpoziţie cu 16 a uneia dintre celelalte piese schimbă paritatea permutării (vezi, de exemplu, trecerea de la *1* la *2*); este clar că un număr par de mutări va duce la o permutare de aceeaşi paritate cu cea iniţială, iar un număr impar la o permutare de paritate opusă.

Dacă vom colora, pentru comoditate, cele 16 celule ca pe o tablă de şah, atunci la fiecare mutare se va schimba culoarea celulei goale, deci va fi adevărată teorema de mai jos :

Teorema 1. Vor fi nerezolvabile, adică ireductibile la permutarea *3*, permutările impare cu celula goală albă şi toate permutările pare cu celulă goală neagră.

În adevăr, de la o permutare impară cu celulă goală albă la o permutare cu celulă goală (tot albă), în colţul din dreapta jos, putem trece printr-un număr par de mutări, adică în acest caz putem ajunge numai la o permutare impară, deci nu vom putea realiza permutarea *3*. În mod analog se demonstrează că permutările pare cu celulă goală neagră sînt şi ele nerezolvabile.

Va fi, de asemenea, adevărată şi următoarea teoremă mai generală :

Teorema 2. Dacă vom considera în jocul cu „15" că sînt admisibile nu numai mutările simple ale turnului, ci şi transferul oricărei piese într-o celulă goală, precum şi transpoziţia a două piese oarecare, atunci nici o permutare impară nu poate fi adusă printr-un număr par de mutări la permutarea *3* şi nici o permutare pară nu poate fi adusă printr-un număr impar de mutări la permutarea *3*.

În adevăr, modificînd astfel regulile jocului, orice mutare fiind o transpoziţie a două piese oarecare (una din ele poate fi şi cea fictivă), schimbă tipul permutării, afirmaţie ce se poate dovedi destul de uşor. Ori, permutarea *3* la care trebuie să ajungem pînă la urmă este pară.

Deoarece în cazul mutării calului (ca şi în cazul mutărilor simple ale turnului) se schimbă, rînd pe rînd, culoarea celulei goale, teorema *1* va fi valabilă şi pentru jocul cu „15" astfel modificat, încît piesele să poată fi deplasate în celula goală numai prin săritura calului.

Teorema 3. Orice permutare pară cu celulă goală albă şi orice permutare impară cu celulă goală neagră sînt rezolvabile, adică reductibile la permutarea *3*. Celelalte permutări pot fi aduse la permutarea *4*.

Să studiem întîi deplasarea a cinci piese pe un dreptunghi format din şase celule. Dacă vom da atenţie numai poziţiei relative a pieselor care parcurg dreptunghiul în sens orar (fără a ține seama de poziția celulei goale), atunci pozițiile *1*, *2*, *3* (v. fig. 1) ale pieselor pot fi caracterizate printr-o aceeași permutare *1 4 3 5 2* (sau, ceea ce este același lucru, prin permutările *4 3 5 2 1*, *3 5 2 1 4* etc.).

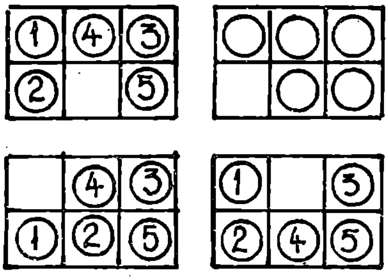


Fig. 1

Se vede ușor că orice mutare orizontală (să zicem mutarea care ne conduce de la *1* la *2*) și mutările verticale din coloanele extreme (de exemplu, mutarea care ne trece din *2* în *3*) nu schimbă poziția relativă a pieselor, pe cînd orice mutare în coloana din mijloc (de exemplu, mutarea piesei 4 în poziția *1*, care ne conduce la *4*) schimbă poziția relativă a pieselor, permutarea *1 3 5 4 2*, prin care se caracterizează noua poziție, obținîndu-se din permutarea precedentă prin deplasarea numărului corespunzător cu doi pași: *1 3 5 4 2*. Folosind acest fapt, este ușor să așezăm alături una de alta, trei piese (de exemplu, 1, 2 și 3) în ordinea crescătoare a numerelor lor; astfel, plecînd de la permutarea *1 4 3 5 2*, după ce deplasăm inițial piesa 2, iar apoi piesa 4 în coloana din mijloc (posibilitatea acestor mutări trebuie creată prin deplasarea circulară prealabilă a pieselor), ajungem la permutarea *1 2 3 4 5* (pentru o altă poziție inițială am obține *1 2 3 5 4*).

În conformitate cu ceea ce am demonstrat, ordonarea pieselor pornind de la orice poziție inițială se poate realiza, bunăoară, în felul următor (care nu ne dă, însă, în general, soluția cea mai rapidă) :

1) începem prin a face în așa fel încît în dreptunghiul „1, 2, 5, 6, 9, 10" (aici numerele de ordine ale celor șase celule care formează dreptunghiul sînt indicate în conformitate cu permutarea normală *3*) să se afle piesele 1, 2 și alte trei piese, iar o celulă să fie goală;

2) să deplasăm piesele 1 și 2 pe locurile corespunzătoare;

3) procedînd analog, să dispunem consecutiv în locurile lor piesele :

3 și 4, operînd în dreptunghiul „3, 4, 7, 8, 11, 12";

5 și 6, operînd în dreptunghiul „5, 6, 9, 10, 13, 14";

7 și 8, operînd în dreptunghiul „7, 8, 11, 12, 15, 18";

9 și 13, operînd în dreptunghiul „9, 10, 11, 13, 14, 15";

4) în interiorul dreptunghiului „10, 11, 12, 14, 15, 16" se vor afla piesele 10, 11, 12, 14 și 15, dintre care trei, anume 10, 11 și 12, pot fi mutate pe locurile lor, ceea ce ne va conduce fie la permutarea *3* (fig. 1), dacă permutarea inițială satisfăcea condițiile din teorema *3*, fie la permutarea *4*.

Putem modifica întrucîtva jocul cu „15", luînd piese pe care sînt notate litere formînd în ansamblu o anumită frază. Dacă, în aceste condiții, o literă va figura de două ori, iar celelalte cîte o singură dată, atunci, oricare ar fi poziția inițială a pieselor, ele pot fi aduse printr-un anumit număr de mutări la poziția „corectă".

Să luăm de exemplu, fraza „ şi eu să cînt rapid" asociind literelor :

ş	e	u	s	ă	c	î	n	t	r	a	p	d
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15

şi distribuind numerele 2 şi 14 într-un anumit fel între literele u şi a, vom obţine, oricare ar fi poziţia iniţială a pieselor pe tablă, două permutări de tipuri diferite, deoarece ele trec una în cealaltă printr-o singură transpoziţie. Prin urmare, o permutare va fi neapărat rezolvabilă.

Dacă, de exemplu, litera u din fig. 3 a) ar fi asociată cu 12, iar cea din b) cu 14, am obţine o permutare de tip par (44 de inversiuni), iar repartizînd numerele în ordine inversă decît cea din figură, am obţine o permutare impară (47 de inversiuni).

Deoarece celula goală din poziţia (a) este neagră, rezultă că pentru a ajunge la poziţia (b) trebuie neapărat ca litera u din partea de sus să fie mutată în celula a 14-a, iar cea de jos în celula a 10-a.

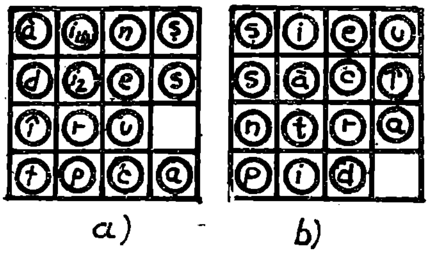


Fig. 3

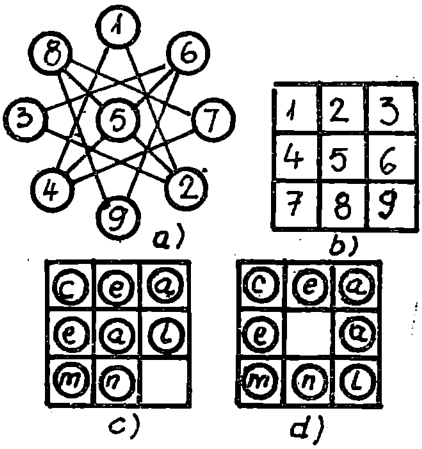


Fig. 4

Toate cele spuse despre jocul cu „15" rămîn valabile şi pentru jocul cu „9" unde opt piese se deplasează într-un pătrat cu nouă celule.

Să studiem interesanta variantă a jocului cu „9", denumită „cameleonul". Jocul se desfăşoară pe o tablă cu nouă celule unite între ele prin segmente de dreaptă (fig. 4, a). Pe cele opt piese sînt scrise cîte o literă din cuvîntul „cameleon", iar piesele sînt aşezate la întîmplare în opt celule ale tablei.

Deplasînd piesele după segmentele de legătură, trebuie să le dispunem în aşa fel încît, citind în sensul acelor de ceasornic, începînd cu celula 1, să obţinem cuvîntul „cameleon".

Numerotînd celulele tablei după cum se arată în fig. 4, a), ne convingem uşor că orice pereche de celule va fi unită printr-un segment de dreaptă dacă şi numai dacă celulele avînd aceleaşi numere în pătratul b) vor fi legate între ele printr-o mutare simplă a turnului de şah.

Deoarece cuvîntul „cameleon" cuprinde două litere e identice, iar celelalte apar cîte o singură dată (la fel cum în fraza noastră de mai sus am avut litera i dublă), rezultă, conform celor arătate mai sus, că oricare ar fi poziția inițială a pieselor în pătratul b), ele pot fi aduse la poziția c), deci și (ad), ceea ce corespunde cu soluționarea jocului (comparați cu a).

Jocul nr. 7. Jocul maharajahului

La prima vedere, s-ar putea crede că maharajahul are șanse foarte slabe de a cîștiga. Dar mobilitatea sa este atît de mare, încît dacă se mișcă repede și agresiv, poate face șah-mat după numai cîteva mutări, la începutul jocului. Dacă a pierdut această ocazie, el poate curăța masa de piese și forța apoi regele singuratic să ajungă într-un colț al tablei, unde este făcut șah-mat.

Totuși, jocul poate fi întotdeauna cîștigat de partenerul care are piesele convenționale, dacă joacă cu grijă. Se poate arăta că maharajahul (M) poate fi întotdeauna capturat în cel mult 25 de mutări. Strategia este independentă de mișcările lui M, cu excepția a trei mutări posibile. În cele ce urmează sînt înșiruite numai mutările atacantului :

1. a—4
2. a—5
3. a—6
4. a—7
5. e—3
6. Cal h—3
7. Cal f—4
8. Nebun d—3
9. 0—0
10. Damă h—5
11. Cal c—3
12. Cal c—3, d—5
13. Turn a—6
14. b—4

M este acum forțat să se miște pe rîndul 7 sau 8

15. h—3

Această mișcare trebuie făcută numai dacă M se află pe cîmpul g—7. Mișcarea îl forțează să părăsească diagonala, permițînd mutarea următoare.

În continuare, jucătorul cu piesele convenționale face mișcările :

16. Nebun b—2
17. Turn f—1, a—1
18. Turn a—1, a—6
19. Turn e—7

M este silit să se retragă pe rîndul 8.

20. Turn a—6, e—6
21. Nebun g—7

Această mutare se face numai dacă M se află pe f—8 sau g—8.

22. c—3

Această mutare trebuie făcută numai dacă M se află pe g—8.

23. Damă e—8

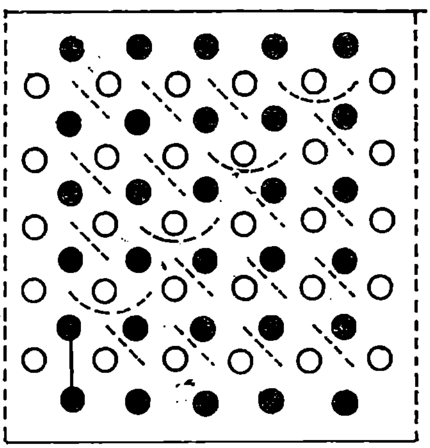
Acum M poate fi capturat în mișcarea următoare.

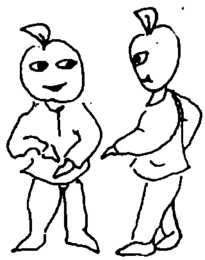
Mutările 1—4 pot fi interschimbate cu mutările 5—9, cu condiția ca succesiunea din fiecare grup să fie păstrată. Această interschimbare se poate dovedi necesară dacă M blochează un pion. Mutările 15 și 22 sînt mişcări de întîrziere, necesare numai dacă M este pe cîmpurile menţionate. Mutarea 23 este cerută numai dacă M trebuie forțat spre acea parte a tablei ocupată de regină.

Jocul nr. 8. Jocul „Gale"

Denumirea acestui joc provine de la numele inventatorului său, DAVID GALE, cadru universitar la Universitatea Brown (Providence, Rhode Island). În 1951 a fost construit un robot pentru practicarea acestui joc, de către CLAUDE SHANNON.

Multă vreme nu s-a putut determina strategia de cîştig a acestui joc, deşi s-au dat mai multe demonstraţii că astfel de strategii există. O astfel de strategie a fost găsită de OLIVER GROSS, un expert în jocuri de la „Rand Corporation" (U.S.A.), departamentul de matematică. Să presupunem





că negrul are prima mișcare. El începe trasînd linia din stînga jos a diagramei. Apoi, ori de cîte ori adversarul trece cu linia sa peste capătul uneia din liniile punctate, negrul joacă trecînd cu linia sa peste celălalt capăt al liniei respective.

Pe diagramă nu sînt indicate mișcări de-a lungul laturilor tablei. Astfel de mişcări sînt admise de regulile jocului, dar ele nu contribuie cu nimic la victorie. Dacă în cursul jocului adversarul încearcă să deruteze, făcînd mișcări de-a lungul laturilor, celălalt jucător poate răspunde tot prin mişcări de-a lungul laturilor sau, pur și simplu, poate juca oriunde pe tablă. Dacă la un moment dat al jocului această mișcare la întîmplare este cerută de strategie, pur și simplu ea poate fi făcută oriunde. A avea o mișcare în plus pe tablă este uneori un avantaj, dar niciodată un dezavantaj.

Această strategie este aplicabilă pentru tablele de orice dimensiuni.

Jocul nr. 10. Jocul cruciulițelor

Se poate arăta, foarte ușor, că cel care începe jocul poate cîștiga întotdeauna. Pentru aceasta este suficient ca el să ocupe cu prima piesă centrul tablei. Apoi, la fiecare mișcare a adversarului său, el pune cîte o piesă simetric cu cea pusă de adversar mai înainte, față de centrul tablei. Oriunde ar plasa o piesă al doilea jucător, primul ocupă poziția simetrică, liberă.

Jocul nr. 11. Jocul „evitării pătratelor"

În figura alăturată este descris un sfîrșit nedecis al jocului. S-a arătat că această soluție este unică, exceptînd ușoare variații în cele patru cîmpuri marginale, marcate cu săgeți. Cîmpurile acestea pot fi ocupate de orice culoare, cu condiția doar să nu fie toate monocolore.

○	●	○	●	○	●
●	●	○	○	○	○
○	●	●	○	●	●
●	●	○	●	●	○
○	○	○	○	●	●
●	○	●	○	●	○

Tabla de 6 × 6 este cea mai mare tablă pe care este posibilă remiza. S-a demonstrat că remiza este imposibilă pe o tablă de ordinul 7 — și, întrucît orice tablă de ordin mai mare conține un subpătrat 7 × 7, remizele sînt, evident, imposibile și pe acestea.

S-a observat că al doilea jucător poate să forțeze întotdeauna remiza printr-o strategie bazată pe simetrie. El poate imita de fiecare dată ultima mișcare a adversarului, fie simetric în raport cu dreapta care desparte tabla în două (paralelă cu baza), fie cu o rotație de 90° în jurul centrului tablei (v. figura). O altă strategie este să joace pe cîmpul corespunzător opus de pe linia care trece prin cîmpul jucat de adversar și centrul tablei. Toate aceste strategii sînt valabile pe table de ordin par mai mic sau egal cu 6.

O strategie de reflexie față de dreapta care separă tabla în două părți și este paralelă cu una dintre laturi asigură victoria.

De reținut că pe o tablă de tipul $n \times n$ se pot forma $\frac{n^4 - n^2}{12}$ pătrate.

Un joc asemănător poate fi practicat înlocuind pătratele prin triunghiuri echilaterale.

Jocul nr. 15. Jocul „Nim“

În analiza acestui joc vom presupune că în cele trei grămezi se află, mai general, a, b şi respectiv c monede. Vom scrie, pentru început, numerele a, b şi c în sistemul de numeraţie în baza 2 :

$$a = a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \ldots + a_{m-1} 2 + a_m;$$

$$b = b_0 2^m + b_1 2^{m-1} + b_2 2^{m-2} + \ldots + b_{m-1} 2 + b_m;$$

$$c = c_0 2^m + c_1 2^{m-1} + c_2 2^{m-2} + \ldots + c_{m-1} 2 + c_m,$$

unde toate „cifrele" $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_m, b_m, c_m$ sînt egale sau cu 0 sau cu 1 (aici scriem acelaşi număr de „cifre" la toate numerele a, b şi c, deoarece putem întotdeauna adăuga unul sau mai multe zerouri la începutul numerelor formate din mai puţine „cifre" decît celelalte; astfel, presupunem că din „primele cifre" a_0, b_0 şi c_0 cel puţin una, însă nu neapărat toate, este egală cu 1). Cel care execută o anumită mişcare, poate înlocui unul dintre numerele a, b şi c cu orice număr mai mic. Să presupunem, de exemplu, că el a luat un număr oarecare de monede din prima grămadă; în acest caz, el va modifica neapărat cel puţin una dintre „cifrele" $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Să observăm că orice modificare a unei „cifre" din reprezentare în baza doi a unui număr va schimba neapărat paritatea acestei „cifre" (deoarece singurele modificări posibile sînt înlocuirea lui 1 cu 0 sau a lui 0 cu 1). Deci, jucătorul, luînd un număr de monede din prima grămadă va modifica neapărat paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele" $a_0, a_1, \ldots, a_m$. La fel, luînd un număr de monede din a doua grămadă, el va modifica paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele" $b_0, b_1, \ldots, b_m$ şi, luînd monede din a treia grămadă, el va modifica paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele" $c_0, c_1, \ldots, c_m$.

De aici rezultă că dacă în condiţiile iniţiale cel puţin una dintre sumele „cifrelor" de un anumit rang :

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \quad a_2 + b_2 + c_2, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

a fost impară, primul jucător poate cîştiga totdeauna. În adevăr, să presupunem că prima sumă impară este $a_k + b_k + c_k$. Rezultă că cel puţin una dintre „cifrele" a_k, b_k şi c_k este egală cu 1; pentru precizare, vom considera că $a_k = 1$. Primul jucător poate atunci, luînd un număr oarecare de monede din prima grămadă, să obţină ca „cifrele" $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ să nu se modifice, „cifra" a_k să devină egală cu 0, iar „cifrele" $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ $\ldots, a_m$ să ia valori convenabile (deoarece toate numerele care verifică aceste condiţii sînt mai mici decît a şi, deci, pot fi obţinute prin scăderea unui anumit număr din a). În particular, jucătorul poate obţine şi ca toate sumele :

$$a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1}, \quad a_{k+2} + b_{k+2} + c_{k+2}, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

să devină pare. Prin mişcarea următoare, al doilea jucător va modifica desigur paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele" $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sau b_0,

$b_1, \ldots, b_m$ sau $c_0, c_1, \ldots, c_m$ și deci va aduce iarăși jocul la o situație în care cel puțin una din sumele:

$$a_0 + b_0 + c_0,\ a_1 + b_1 + c_1,\ \ldots,\ a_m + b_m + c_m$$

este impară. Primul jucător poate face din nou ca toate aceste sume să devină pare; atunci al doilea va fi iarăși nevoit să facă impară cel puțin una dintre aceste sume etc. Numărul de monede în toate cele trei grămezi se va micșora tot timpul; deci, la un moment dat, vor fi luate toate monedele. Însă, deoarece după fiecare mișcare a celui de-al doilea, cel puțin una dintre sumele:

$$a_0 + b_0 + c_0,\ a_1 + b_1 + c_1,\ \ldots,\ a_m + b_m + c_m$$

va rămîne impară, iar după fiecare mișcare a celui dintîi toate aceste sume vor deveni pare, este clar că nu vor mai rămîne monede (adică a, b și c vor deveni egale cu 0, 0, 0) după mișcarea primului.

Dacă în condițiile inițiale toate sumele:

$$a_0 + b_0 + c_0,\ a_1 + b_1 + c_1,\ \ldots,\ a_m + b_m + c_m$$

sînt pare, situația nu este convenabilă pentru cel care începe jocul; este clar că, dacă al doilea nu face nici o greșeală, primul jucător trebuie să piardă.

Observație. Să observăm că jocul prezintă mai multe avantaje pentru cel care începe: situațiile în care el pierde sînt, evident, rare, într-un anumit sens (ele sînt mai puține decît situațiile de cîștig, mai ales dacă numerele a, b și c sînt mari), așa că într-un joc corect și la o alegere întîmplătoare a numerelor a, b și c primul jucător va cîștiga mult mai des decît va pierde.

Vom observa că toate raționamentele date aici nu depind de faptul că numărul grămezilor este egal cu 3: atît problema în sine cît și soluția dată aici își păstrează în întregime sensul, oricare ar fi numărul grămezilor.

În loc de a utiliza în rezolvarea acestei probleme sistemul de numerație în baza doi, putem utiliza și sistemele de numerație în baza patru, opt etc. Vom formula, fără demonstrație, rezultatele obținute folosind sistemul de numerație în baza patru. Să presupunem că numerele a, b și c sînt scrise în sistemul de numerație în baza patru:

$$a = a_0^* 4^m + a_1^* 4^{m-1} + \ldots + a_{m-1}^* 4 + a_m^*,$$

$$b = b_0^* 4^m + b_1^* 4^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^* 4 + b_m^*,$$

$$c = c_0^* 4^m + c_1^* 4^{m-1} + \ldots + c_{m-1}^* 4 + c_m^*.$$

În acest caz, situația inițială este de pierdere, pentru cel care începe jocul, dacă toate grupurile de trei „cifre”:

$$(a_0^*, b_0^*, c_0^*),\ (a_1^*, b_1^*, c_1^*),\ \ldots,\ (a_m^*, b_m^*, c_m^*)$$

(aici „cifrele" pot lua valorile 0, 1, 2 sau 3) au forma (0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 3, 3) sau (1, 1, 3). Dacă aceasta nu se întîmplă, primul jucător poate să cîştige; pentru aceasta el trebuie doar să observe că, după fiecare mişcare a sa, grupurile de trei „cifre" considerate să fie de forma indicată.

Jocul nr. 16. Jocul „Ticktacktoe"

Acest joc, menţionat chiar de Ovidiu în cartea a III-a din *Ars amatoria* a fost foarte răspîndit la chinezi, greci şi romani. Din punctul de vedere al teoriei jocurilor, ticktacktoe reprezintă un joc de strategie cu două persoane finit (jocul se sfîrşeşte totdeauna).

Este interesant de observat că primul jucător cîştigă totdeauna dacă face prima mutare în centru. În adevăr, iată schema de desfăşurare:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

— Primul jucător : căsuţa 5.
— Al doilea jucător : căsuţa 3.
— Primul jucător: 4.
— Al doilea jucător : 6.
— Primul jucător : 9.
— Al doilea jucător: 1.

— Primul jucător : mută fisa din căsuţa 4 în căsuţa 7.
— Al doilea jucător : nu poate face nici o mutare.
— Primul jucător : mută fisa din căsuţa 5 în căsuţa 8; jocul este cîştigat.

Jocul nr. 17. Jocul lui Bachet

Pentru jucătorul care vine la rînd, va fi nefavorabil, dacă numărul de obiecte din grămadă (îl vom nota cu m) este un multiplu al lui $a + 1$. În adevăr, dacă $m = a + 1$, oricare ar fi mutarea respectivului jucător, adversarul poate să ia dintr-o dată toate obiectele rămase. Dacă însă $m = s(a + 1)$, cu $s \in \mathbb{N}$, atunci, după orice mutare a primului jucător, adversarul, făcîndu-şi mutarea corespunzătoare, poate lăsa în grămadă $(a + 1)(s - 1)$ obiecte, apoi $(a + 1)(s - 2)$ obiecte etc., făcînd pînă la urmă ca numărul de obiecte din grămadă să fie $a + 1$, ceea ce îi asigură cîştigul.

În toate celelalte poziţii iniţiale (cînd $m = (a + 1)s + r$, $1 \leqslant r < a$), primul jucător, luînd r obiecte, îl sileşte pe adversarul său să piardă.

Prima descriere a acestui joc datează din anul 1612.

Jocul nr. 18. Jocul „tzianşitzi"

Să presupunem că numărul de chibrituri din cele două grămezi este egal respectiv cu a şi b. În loc de a căuta situaţiile în care primul jucător cîştigă, vom determina toate situaţiile în care acesta pierde: concluzia trasă din analiza jocului „nim" arată că aceste situaţii sînt mult mai puţine decît cele de cîştig pentru primul jucător şi, deci, vor fi mult mai simplu de găsit.

Prima situaţie de pierdere este uşor de găsit — aceasta va fi situaţia determinată de numerele $a = 1$, $b = 2$; în acest caz, după fiecare mişcare a primului jucător, adversarul său prin mişcarea următoare termină jocul cu cîştig. Toate celelalte perechi (a, b) în care unul din numere este egal cu 1 sau 2 sau pentru care $b - a = 1$, sînt cîştigătoare pentru cel ce începe jocul : acesta poate, printr-o mişcare, să aducă jocul la situaţia (1, 2).

Următoarea pereche de pierdere este perechea (3, 5); aici, după fiecare mişcare a primului jucător, adversarul său sau cîştigă imediat sau aduce jocul la situaţia (1, 2). Deci toate celelalte situaţii pentru (a, b), unde unul din numerele a, b este egal cu 3 sau 5 sau $b - a = 2$, sînt cîştigătoare pentru cel ce începe jocul.

La fel se găseşte următoarea pereche de pierdere pentru primul jucător, anume perechea (4, 7); după aceea vin perechile (6, 10), (8, 13), (9, 15) etc. Să găsim legea generală după care obţinem aceste perechi. Pentru găsirea unei astfel de legi, vom utiliza aici „un sistem de numeraţie generalizat", anume descompunerea numerelor după termenii şirului lui FIBONACCI"

Din egalitatea $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$, ce generează termenii şirului lui FIBONACCI ($u_0 = u_1 = 1$), rezultă că în acest sistem de numeraţie :

1°). Toate „cifrele" q_k ale unui număr oarecare a sînt egale cu 1 sau 0 (ca şi în sistemul de numeraţie în baza 2 deoarece aici $2u_k > u_{k+1}$ pentru orice k şi, deci, restul a_k al împărţirii lui u_{k+1} prin u_k este mai mic decît 2);

2°). Dacă „cifra" q_k este egală cu 1, restul corespunzător r_{n-k+1} este mai mic decît u_{k-1}, căci $r_{n-k} = u_k + r_{n-k+1}$, $r_{n-k} < u_{k+1}$, $r_{n-k+1} = r_{n-k} - u_k < < u_{k+1} - u_k = u_{k-1}$, şi deci „cifra" q_{k-1}, egală cu restul împărţirii lui r_{n-k+1} prin u_{k-1}, este zero.

Astfel, orice număr întreg N se scrie în mod unic sub forma :

$$N = q_n u_n + q_{n-1} u_{n-1} + q_{n-2} u_{n-2} + \ldots + q_1 u_1$$

(descompunerea numărului N în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI, unde toate „cifrele" q_k sînt egale sau cu 1 sau cu 0 şi unde între fiecare două unităţi stă cel puţin un zero). Descompunerea numărului N în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI o vom scrie sub forma :

$$N = „q_n q_{n-1} q_{n-2} \ldots q_1".$$

Astfel :

$1 = u_1 =$ „1", $2 = u_2 =$ „10", $3 = u_3 =$ „100", $4 = u_3 + u_1 =$ $=$ „101", $5 = u_4 =$ „1 000", $6 = u_4 + u_1 =$ „1 001", $7 = u_4 + u_2 =$ $=$ „1 010", $8 = u_5 =$ „10 000" etc.

Vom scrie, acum, în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI perechile (a, b) de pierdere pentru primul jucător, găsite mai sus :

1) „1", „10"	4) „1 001", „10 010"
2) „100", „1 000"	5) „10 000", „100 000"
3) „101", „1 010"	6) „10 001", „100 010".

De aici se observă uşor legea generală: în toate perechile scrise, primul număr se termină cu un număr par de zerorui (amintim că 0 este un număr par), iar al doilea se obţine din primul adăugînd la sfîrşit un zero (şi deci se termină cu un număr impar de zerouri).

Vom numi *pereche distinsă*, o pereche de numere pentru care în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI cel mai mic dintre aceste numere se termină cu un număr par de zerouri, iar cel mai mare se obţine din cel mai mic prin adăugarea a încă unui zero la sfîrşit.

Să observăm că, din însăşi definiţia perechilor distinse, rezultă că fiecare număr întreg pozitiv d intră într-o pereche distinsă (şi numai în una singură): dacă în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI numărul d se termină cu un număr par de zerouri, atunci al doilea număr din aceeaşi pereche se obţine din d prin adăugarea unui zero la sfîrşit, iar dacă d se termină în sistemul de numeraţie al lui FIBONACCI cu un număr impar de zerouri, al doilea număr se obţine din d prin suprimarea ultimului zero.

Să considerăm şirul diferenţelor $m - n$ ale numerelor din perechile distinse (m, n), cu $m > n$. Vom arăta că şi în acest şir de numere intră orice număr întreg pozitiv d o dată şi numai o singură dată. În adevăr, dacă:

$$d = „p_l p_{l-1} \dots p_1" = p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_1 u_1$$

se termină cu un număr impar de zerouri, atunci pentru perechea distinsă:

$$n = „p_l p_{l-1} \dots p_1 0" = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l + \dots + p_1 u_2$$

$$m = „p_l p_{l-1} \dots p_1 00" = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \dots + p_1 u_3. \qquad (*)$$

avem:

$$m - n = p_l(u_{l+2} - u_{l+1}) + p_{l-1}(u_{l+1} - u_l) +$$

$$+ \dots + p_1(u_3 - u_2) = p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_1 u_1 = d.$$

Dacă însă $p_1 = p_2 = \dots = p_{2m} = 0$, $p_{2m+1} = 1$, adică numărul d se termină cu un număr par de zerouri, atunci pentru perechea distinsă:

$$n = „p_l p_{l-1} \dots p_{2m+2} \underbrace{0101 \dots 01}_{01 \text{ de } m+1 \text{ ori}}" = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l +$$

$$+ \dots + p_{2m+2} u_{2m+3} + (u_{2m+1} + \dots + u_3 + u_1)$$

$$m = „p_l p_{l-1} \dots p_{2m+2} \underbrace{0101 \dots 010}_{01 \text{ de } m+1 \text{ ori}}" = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \qquad (**)$$

$$+ \dots + p_{2m+2} u_{2m+4} + (u_{2m+2} + \dots + u_4 + u_2)$$

avem :

$$m - n = p_l(u_{l+2} - u_{l+1}) + p_{l-1}(v_{l+1} - u_l) +$$

$$+ \dots + p_{2m+2}(u_{2m+2} - u_{2m+3}) + (u_{2m+2} - u_{2m+1}) + \dots + (u_4 - u_3) +$$

$$+ (u_2 - u_1) = p_l u_l + p_{l-1}u_{l-1} + \dots + p_{2m+2}u_{2m+2} + u_{2m} + \dots + u_2 + u_0 =$$

$$= p_l u_l + p_{l-1}u_{l-1} + \dots + p_{2m+2}u_{2m+2} + u_{2m+1} = d,$$

deoarece :

$$u_{2m} + \dots + u_4 + u_2 + u_0 = u_{2m} + \dots + u_4 + (u_2 + u_1) = u_{2m} +$$

$$+ \dots + u_6 + (u_4 + u_3) = u_{2m} + \dots + (u_6 + u_5) = \dots = (u_{2m} + u_{2m-1}) = u_{2m+1}.$$

Reciproc, prin perechile distinse (*) sau (**), numărul $m - n = d =$ $=$ „$p_l p_{l-1} \dots p_1$" se determină în mod unic (formulele (*) corespund cazului în care n se termină cu zero, iar formulele (**) corespund cazului în care n se termină cu 1 şi în scrierea acestui număr două zerouri figurează unul după altul pentru prima oară pe locurile[1] $2m + 2$ şi $2m + 3$); în acest caz, dacă pentru două perechi distinse (m, n) şi (m_1, n_1) avem $n_1 > n$ (şi deci şi $m_1 > m$), atunci :

$$d_1 = m_1 - n_1 > m - n = d.$$

Vom demonstra, acum, că dacă perechea iniţială (a, b) nu este distinsă, atunci primul jucător poate cîştiga, iar dacă ea este distinsă, atunci cel ce începe jocul, la un joc corect al adversarului, trebuie să piardă. Demonstraţia acestui fapt o vom da în două etape.

A. Vom demonstra că, dacă perechea iniţială (a, b) cu $a < b$, nu este distinsă, primul jucător poate să cîştige imediat (adică printr-o mişcare) sau poate aduce jocul la o situaţie în care perechea (a, b) devine distinsă.

Dacă numerele a şi b sînt egale sau unul dintre ele este egal cu zero, primul jucător poate cîştiga dintr-o dată luînd toate obiectele. În caz contrar, vom examina perechea distinsă (a, p) şi perechea distinsă (m, n), care este astfel încît $m - n = b - a$ (perechile (a, p) şi (m, n) există, conform celor demonstrate mai sus). Dacă $p < b$ atunci putem, cu o singură mişcare, să trecem de la perechea (a, b) la perechea distinsă (a, p). Dacă însă $p > b$, atunci :

$$p - a > b - a = m - n,$$

deci perechea distinsă (p, a) „este mai mare" decît perechea (m, n), adică $p > m$, $a > n$. Însă, deoarece $b - a = m - n$, atunci $b > m$, $n = a -$

[1] $p_{2m+2} = 0$, deoarece, în caz contrar, în scrierea numărului d în sistemul de numeraţie al lui Fibonacci „cifra 1" ar fi întîlnită de două ori la rînd, ceea ce nu este posibil (v. proprietatea 2°))

$-(a-n)$, $b=b-(b-m)=b-(a-n)$ și, deci, putem printr-o mișcare să trecem de la perechea (a, b) la perechea distinsă (m, n).

B. Vom demonstra că, dacă în situația inițială perechea (a, b) este distinsă, atunci după orice mișcare a primului jucător, ea va înceta să mai fie distinsă.

În adevăr, dacă primul jucător va lua un număr oarecare de chibrituri numai dintr-una din cele două grămezi, perechea va mai înceta de a mai fi distinsă, deoarece unul și același număr nu poate face parte din două perechi distinse diferite. Dacă primul jucător va lua un număr egal de chibrituri din fiecare grămadă, diferența $b-a$ nu se va modifica și perechea va înceta de a mai fi distinsă, deoarece în nici un grup de două perechi distinse diferența numerelor nu poate fi aceeași.

Acum este clar că, dacă (a, b) nu este o pereche distinsă, primul jucător poate să cîștige totdeauna, iar dacă (a, b) este o pereche distinsă, el trebuie să piardă (bineînțeles, dacă adversarul lui nu va comite o greșeală). În adevăr, dacă (a, b) nu este o pereche distinsă, cel ce începe jocul poate să cîștige imediat sau să obțină ca perechea (a, b) să devină distinsă; după aceasta, adversarul lui va trebui din nou să creeze situația în care perechea (a, b) nu este distinsă (însă cu numere (a, b) mai mici decît la început), iar primul jucător poate din nou face ca perechea (a, b) să fie distinsă etc. Deoarece numerele a și b se micșorează tot timpul, primul jucător, sau va cîștiga înainte de a face acest lucru, sau va aduce jocul la cea mai mică pereche distinsă $(1, 2)$, după care el cîștigă cu o singură mișcare, oricare ar fi mișcarea adversarului. Dacă însă perechea (a, b) este distinsă, primul jucător este nevoit să aducă jocul în situația în care (a, b) nu este o pereche distinsă; după aceea, adversarul lui poate să urmeze tactica descrisă și să cîștige. Deoarece raționamentul conține și indicații asupra metodei corecte a jocului, cu aceasta problema este complet rezolvată.

Observație. Rolul fundamental în întregul raționament l-a avut următoarea proprietate a numerelor, care formează o pereche distinsă: orice număr întreg pozitiv $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ intră o singură dată în compunerea unei perechi distinse și apare o singură dată ca diferența a două numere ale unei perechi distinse. Această proprietate permite să se scrie fără dificultate perechile distinse una după alta:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n), \ldots;$$

trebuie doar să luăm numărul 1 ca a_1 și apoi să considerăm de fiecare dată că $b_k = a_k + k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ și că a_{k+1} este cel mai mic număr întreg pozitiv care nu figurează încă printre numerele a_1, b_1; a_2; b_2; $\ldots$; a_k, b_k:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	...
$b_n = a_n + n$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	...

Trecerea la sistemul de numerație al lui FIBONACCI este necesară doar pentru a constata dacă o pereche (a, b) dată dinainte este distinsă sau nu și pentru a formula regulile jocului fără pierdere.

Vom mai observa că proprietatea menționată a numerelor perechilor distinse permite, de asemenea, să se scrie cîte o formulă pentru numerele a_n, b_n (în funcție de numărul n). Pentru a deduce aceste formule, vom demonstra că dacă α și β sînt numere iraționale, legate prin relația :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,$$

atunci orice număr întreg pozitiv se află printre numerele :

$$a_n=[\alpha n]_*,\quad b_n=[\beta n]_*,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

și anume o singură dată.

Pentru demonstrație, vom observa că $a_n=[\alpha n]_* < N$, dacă $n = 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\alpha}\right]_*$ și $b_n=[\beta n]_n < N$, dacă $n=1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\beta}\right]_*$; astfel, există, în total, numai :

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]_*+\left[\frac{N}{\beta}\right]_*$$

numere a_n și b_n, mai mici decît N. Însă deoarece N/α și N/β sînt numere iraționale, astfel încît :

$$\frac{N}{\alpha}+\frac{N}{\beta}=N\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=N,$$

atunci :

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]_*+\left[\frac{N}{\beta}\right]_*=N-1$$

(deoarece $\left[\frac{N}{\alpha}\right]_*=\frac{N}{\alpha}-\varepsilon_1$, $\left[\frac{N}{\beta}\right]_*=\frac{N}{\beta}-\varepsilon_2$, unde $0<\varepsilon_1<1$, $0<\varepsilon_2<1$ și deci numărul întreg :

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]_*+\left[\frac{N}{\beta}\right]_*=\left(\frac{N}{\alpha}-\varepsilon_1\right)+\left(\frac{N}{\beta}-\varepsilon_2\right)=N-\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

se află între N și $N-2$). Deci există $N-1$ numere întregi a_n și b_n mai mici decît N, adică : 0 astfel de numere mai mici decît 1; un singur astfel de număr mai mic decît 2 (numărul 1), două astfel de numere mai mici decît 3 (numerele 1 și 2); trei astfel de numere mai mici decît 4 (numerele 1, 2 și 3) etc.

Pentru a obţine numerele perechilor distinse trebuie să mai avem :

$$b_n - a_n = [\beta n]_* - [\alpha n]_* = n.$$

Pentru aceasta, este suficient să punem condiţia ca $\beta - \alpha = 1$, $\beta = \alpha + 1$ (deoarece $[(\alpha + 1)n]_* - [\alpha n]_* = [\alpha n + n]_* - [\alpha n]_* = n$). Astfel, avem :

$$\beta = \alpha + 1, \ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} = 1,$$

de unde

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0, \ \text{deci} \ \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

şi, în definitiv :

$$a_n = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} n\right]_*, \ b_n = \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n\right]_*, \ n = 1, 2, 3, \ldots (***)$$

De formulele (*) este legată următoarea rezolvare interesantă a problemei noastre. Vom introduce în consideraţii numerele iraţionale :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618, \ \gamma = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382.$$

Să presupunem că situaţia iniţială este determinată de perechea de numere (a, b), unde $b > a$. În acest caz, dacă în situaţia iniţială $\{a\alpha\}_* > \gamma$ şi $b = [a\alpha]_* + 1$, această situaţie este nefavorabilă pentru primul jucător ; în toate celelalte cazuri, cel ce începe jocul poate să cîştige. Dacă în situaţia iniţială $\{a\alpha\}_* < \gamma$, mişcarea cu care se cîştiga va fi trecerea de la perechea (a, b), la perechea $(a, [\alpha a]_* - a)$. Dacă însă $\{a\alpha\}_* > \gamma$ şi $b > [a\alpha]_* + 1$, mişcarea cîştigătoare este trecerea de la perechea (a, b) la perechea $(a, [a\alpha]_* + 1)$, iar dacă :

$$\{a\alpha\}_* < \gamma, \ b < [a\alpha]_* + 1, \ b - a = n,$$

va fi cîştigătoare trecerea de la perechea (a, b) la perechea $([n\alpha]_*, [n\alpha]_* + n)$.

Jocul nr. 21. Jocul lui Luc.

Eliminînd, după o analiză destul de simplă, mutările care conduc la poziţii nerezolvabile, ajungem uşor la o soluţie care se scrie astfel :

annaaannnnaaaannnnnaaaannnnaaanna.

Aici literele *a* şi *n* indică culoarea pieselor mutate.

Jocul nr. 22. Jocul „cu soţ".

Pentru a-şi asigura victoria, primul jucător trebuie să ia la prima mişcare 2 chibrituri iar apoi, în funcţie de numărul chibriturilor luate de „adversar", va proceda după cum urmează.

Dacă adversarul are un număr par de chibrituri, primul jucător trebuie să-i lase un număr de chibrituri care să fie cu 1 mai mare decît multiplii lui 6 (19, 13, 7); dacă adversarul are un număr impar de chibrituri, primul jucător trebuie să-i lase un număr de chibrituri care să fie cu 1 mai mic decît multiplii lui 6 (23, 17, 11, 5), iar dacă aceasta nu este cu putință, atunci să-i lase un număr de chibrituri multiplu de 6 (24; 18, 12, 6).

Să presupunem că primul jucător a luat 2 chibrituri, iar adversarul 4 sau 2 (un număr par). Rămîn 27 — 6 = 21 chibrituri, sau 27 — 4 = 23 chibrituri. În conformitate cu regula, primul jucător va lua 2 sau 4 chibrituri, pentru a-i lăsa adversarului 19 chibrituri. Dacă însă adversarul a luat 3 chibrituri (un număr impar), atunci au rămas 27 — 5 = 22 chibrituri. Deoarece primul jucător nu poate face să rămînă 17 chibrituri (nu poate lua 5), el va lua 4 chibrituri, pentru a rămîne 18. Dacă adversarul a luat un singur chibrit, atunci primul jucător va lua un singur chibrit pentru a rămîne 27 — 4 = 23 chibrituri, etc.

Notînd cei doi jucători cu A și B, regula de joc de mai sus rezultă din următoarele raționamente:

1) Să presupunem că, la sfîrșitul jocului, au rămas pe masă 5 chibrituri. Această situație îl avantajează pe A numai dacă urmează să ia B, care are un număr impar de chibrituri (deoarece pînă acum au fost luate 22 chibrituri). Putem analiza toate variantele mutărilor posibile:

	A	B	A	B	A	B	A	B
avea	impar	impar	impar	impar	impar	impar	impar	impar
a luat	—	1	—	2	—	3	—	4
a luat	3	1	3	—	1	1	1	—
	par	impar	par	impar	par	impar	par	impar

Dacă însă B (prin urmare și A) are un număr par de chibrituri, pe A nu îl avantajează să-i lase 5 chibrituri deoarece va pierde partida.

2) Să presupunem că la sfîrșitul jocului au rămas pe masă 6 chibrituri. Situația îl avantajează pe A numai în cazul cînd mutarea următoare trebuie s-o facă B, care are un număr impar de chibrituri. (Evident că, în acest caz, A are un număr par de chibrituri). În adevăr, avem tabelul:

	A	B	A	B	A	B	A	B
avea	par	impar	par	impar	par	impar	par	impar
a luat	—	1	—	2	—	3	—	4
a luat	4	1	4	—	2	1	2	—
	par	impar	par	impar	par	impar	par	impar

Dacă B are un număr par de chibrituri (prin urmare, A are un număr impar), pe A nu-l avantajează să-i lase adversarului 6 chibrituri, deoarece va pierde partida. În adevăr, este suficient ca B să ia un chibrit, ca A să se găsească în situația în care se găsea B cînd eram pe masă 5 chibrituri (vezi pct. 1).

3). Să presupunem că la sfîrșitul jocului au rămas pe masă 7 chibrituri. Situația îl avantajează pe A numai dacă mișcarea următoare trebuie s-o facă B, care are un număr par de chibrituri (este clar că, în acest caz, A are și el un număr par de chibrituri. In adevăr:

	A	B	A	B	A	B	A	B
avea	par	par	par	par	par	par	par	par
a luat	—	1	—	2	—	3	—	4
a luat	1	0	4	1	4	—	2	1
	mai departe se ajunge la schema 1		par	impar	par	impar	par	impar

Dacă însă B (prin urmare și A) are un număr impar de chibrituri, pe A nu îl avantajează să-i lase pe masă 7 chibrituri, deoarece va pierde partida. În adevăr, dacă B va lua un singur chibrit, atunci A se va găsi în situația în care se afla B cînd erau pe masă 6 chibrituri (vezi pct. 2).

4) În toate cazurile, pe A nu îl avantajează să lase pe masă 8, 9 sau 10 chibrituri, deoarece va pierde partida. Să presupunem, de exemplu, că după mutarea lui A pe masă au rămas 8 chibrituri. Sînt posibile 2 cazuri:

a) A are un număr impar de chibrituri, iar B un număr par; B ia 3 chibrituri. Acum va avea și el un număr impar de chibrituri, iar pe masă rămîn 5 chibrituri. În acest caz, după cum știm (vezi pct. 1), pierde cel care face mutarea. Deoarece A trebuie să mute, el va pierde partida.

b) A are un număr par de chibrituri, iar B un număr impar. B ia acum un chibrit. Atunci el va avea un număr par de chibrituri, iar pe masă rămîn 7 chibrituri. După cum știm (vezi pct. 3), în această situație va pierde cel care trebuie să facă mutarea. A trebuie să mute, deci va pierde partida. B are posibilitatea să-și asigure cîștigul jocului și în cazul cînd A va lăsa pe masă 9 sau 10 chibrituri.

5) Dacă A lasă pe masă un număr oarecare de chibrituri, adică 11, 12, 13, ..., condițiile de cîștig se repetă în aceeași ordine ca și pentru 5, 6 și 7 ... chibrituri, ceea ce confirmă regula sus-amintită.

Să presupunem, de exemplu, că după mutarea lui A au rămas pe masă 11 chibrituri. Nu este greu să arătăm că A va cîştiga, dacă B (deci şi A) are un număr impar de chibrituri. În adevăr :

A	B	A	B
impar	impar	impar	impar
—	1 sau 3	—	2 sau 4
3 sau 1	—	4 sau 2	—
Mai departe se ajunge la schema 3		Mai departe se ajunge la schema 1	

Analog se poate analiza situaţia pentru 12 sau 13 chibrituri.

6) Rămîne să mai arătăm de ce iniţial, cînd pe masă sînt 27 de chibrituri, la prima mutare trebuie să se ia 2 chibrituri. Dacă A va lua un chibrit, B poate lua 2 şi rămîn 24 chibrituri. Urmează A la mutare care nu poate lăsa pe masă 19 chibrituri, caz în care pierde.

CUPRINS

Bun de Tipar: 27 Decembrie 1984
Coli Tipo: 31,5. Apărut 1985.

c. 850. I. P. INFORMAȚIA
Str. Brezoianu, Nr. 23 — 25
București